Paweł KLIBER

Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

OPTYMALIZACJA INWESTYCJI W MODELU Z HETEROGENICZNYMI AGENTAMI

W artykule prezentujemy pewne uogólnienia modeli optymalizacji inwestycji opartych na teorii sterowania optymalnego. W szczególności interesuje nas sytuacja, gdy w gospodarce działa wielu agentów, tj. wiele przedsiębiorstw produkcyjnych i wielu konsumentów. W pierwszym punkcie przedstawiamy wyniki uzyskane na podstawie klasycznych modeli optymalizacji inwestycji. W drugim rozważamy model z wieloma konsumentami, a w trzecim – model z wieloma producentami. Pokazujemy, że modele te można sprowadzić do modeli z jednym konsumentem i producentem, dobierając odpowiednio społeczną funkcję użyteczności i zagregowaną funkcję produkcji. Czwarty punkt zawiera podsumowanie otrzymanych wyników. Formułujemy w nim nierozwiązany dotąd problem, sprowadzający się do pytania, czy niezależne decyzje agentów mogą prowadzić do rozwiązania optymalnego z punktu widzenia maksymalizacji użyteczności społecznej.

1. Klasyczne zagadnienie optymalizacji inwestycji

Zakładamy, że zależność między produkcją a nakładami czynników w gospodarce opisuje zagregowana funkcja produkcji $f: R_+ \to R_+$. Produkcja zależy zatem jedynie od nakładu kapitału k. O funkcji f zakładamy, że jest rosnąca i wklęsła[1]. W każdej chwili t produkcja jest dzielona na inwestycje

[1] Z założeń tych wynika, że funkcja f jest ciągła na R_+ i różniczkowalna wszędzie na R_+ poza co najwyżej skończoną liczbą punktów. Zob. [14, tw. 10.1.1 i 25.3].

i konsumpcję. Zadowolenie z konsumpcji wyraża funkcja użyteczności $u: R_+ \to R_+$. Zakładamy, że funkcja użyteczności jest rosnąca i wklęsła. Inwestycje przyczyniają się do wzrostu zasobu kapitału. Wstrzymanie inwestycji oznacza, że zasób kapitału kurczy się ze stałą stopą deprecjacji δ. Jeżeli konsumpcję w chwili t oznaczymy przez $c(t)$, to dynamikę kapitału opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t). \tag{1}$$

Społeczna stopa dyskonta użyteczności wynosi ρ, co oznacza, że jednostka użyteczności w chwili obecnej jest równoważna $e^{-\rho t}$ jednostkom użyteczności w chwili t. Jeżeli przyjmiemy, że kryterium oceny funkcjonowania gospodarki jest suma zdyskontowanej użyteczności w pewnym okresie $[0, T]$, gdzie $0 < T \leqslant +\infty$, to otrzymamy następujące zadanie sterowania optymalnego[2]:

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t))\, dt, \tag{2}$$

pod warunkiem, że

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t), \tag{3}$$

$$\forall t \in [0, T]: 0 \leqslant c(t) \leqslant f(k(t)), \tag{4}$$

przy czym maksimum poszukujemy po wszystkich funkcjach $c(t)$, spełniających warunek (4) oraz prawostronnie ciągłych i mających w każdym przedziale ograniczonym co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju[3].

Zadanie (2)-(4) było wielokrotnie badane w literaturze. Nie sposób wskazać analitycznej postaci rozwiązania dla dowolnej funkcji użyteczności u i funkcji produkcji f bez względu na długość horyzontu T i początkowy

---

[2] Takie samo zadanie otrzymujemy, rozważając gospodarkę, w której istnieją dwa czynniki produkcji: kapitał (K) i praca (L), funkcja produkcji $F(K, L)$ jest jednorodna stopnia pierwszego, zasób pracy rośnie ze stałą stopą, a kryterium dobrobytu społecznego jest sumą zdyskontowanej użyteczności konsumpcji *per capita* w przedziale $[0, T]$, ([7], [16], rozdz. 1]).

[3] Zazwyczaj w zadaniach sterowania optymalnego rozważa się taką właśnie klasę funkcji jako możliwe trajektorie zmiennej sterującej (np. [2], [6], [8], [18]).

zasób kapitału $k(0)$. Można jednak wskazać pewne ogólne własności rozwiązania ([4], [7], [11], [12], [16]).

- Jeżeli horyzont czasu T jest ograniczony, to w rozwiązaniu pojawia się końcowa faza konsumpcyjna. W tej fazie produkcja jest w całości przeznaczana na konsumpcję, tj. $c(t)=f(k(t))$.
- Przy dostatecznie długim horyzoncie czasu w rozwiązaniu optymalnym pojawia się faza magistralna, w której zasób kapitału jest stały. Poziom kapitału w tej fazie spełnia równanie $f'(k)=\delta+\rho$ (jeżeli funkcja f nie jest w tym punkcie różniczkowalna, to $\delta+\rho\in\partial f(k)$, gdzie $\partial f(k)$ jest subgradientem). Jeśli $T=+\infty$, to zasób kapitału dąży do poziomu magistralnego przy $t\to+\infty$.
- Jeżeli funkcja użyteczności nie jest silnie wklęsła, to w rozwiązaniu optymalnym istnieją trzy fazy – inwestycyjna, konsumpcyjna i magistralna. Sterowanie optymalne rozpoczyna się od fazy dojścia kapitału do poziomu magistralnego, co polega albo na inwestowaniu całej produkcji (jeżeli początkowy poziom kapitału $k(0)$ jest mniejszy od poziomu magistralnego), albo na zupełnym zaprzestaniu inwestycji (jeżeli $k(0)$ jest większe od poziomu magistralnego).
- Jeżeli funkcja użyteczności jest silnie wklęsła, to nie ma tak jednoznacznego podziału na fazy. Kapitał dochodzi do poziomu magistralnego wzdłuż tzw. ścieżki siodłowej, na której konsumpcja jest wyznaczana z równania

$$u'(c(t))=\psi(t),$$

gdzie ψ jest ceną dualną (zob. [4], [16]).

- W niektórych przypadkach zadanie może nie mieć rozwiązania dla $T=+\infty$. Na przykład gdy u jest funkcją liniową, a f jest funkcją liniową lub funkcją typu CES, to zadanie nie ma rozwiązania – istnieją trajektorie, dla których całkowita zdyskontowana użyteczność jest nieskończona [7].

2. Optymalizacja inwestycji w gospodarce z różnymi konsumentami

Przyjmujemy, że w gospodarce znajduje się wielu konsumentów z różnymi funkcjami użyteczności. Konsumentów można podzielić na pewne grupy społeczne, które będziemy oznaczali symbolem θ. Zbiór wszystkich grup społecznych oznaczamy przez Θ. Grupy mogą mieć różną liczebność.

Liczebność grup jest opisana za pomocą pewnej skończonej miary μ określonej na[4] Θ. Miara μ opisuje liczebności grup w ten sposób, że dla każdego podzbioru $X \subseteq \Theta$ wielkość $\mu(A)$ oznacza, ile osób (lub jaka część ludności) należy do grup społecznych ze zbioru A.

Zadowolenie z konsumpcji w różnych grupach społecznych mierzy funkcja użyteczności $u: \Theta \times R_+ \to R_+$. Wielkość $u(\theta, y)$ pokazuje, jaką użyteczność z konsumpcji y osiąga konsument, należący do grupy społecznej θ. Zakładamy, że dla każdego $\theta \in \Theta$ funkcja $u(\theta, \cdot)$ jest rosnąca i wklęsła, co oznacza, że w każdej grupie społecznej użyteczność rośnie wraz ze wzrostem konsumpcji, ale przyrosty użyteczności są coraz mniejsze (pierwsze prawo Gossena).

Aby ocenić dobrobyt społeczny, wprowadzamy jeszcze jedną miarę ν określoną na[5] Θ. Zakładamy, że miary μ i ν są równoważne, to znaczy

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$$

dla każdego zbioru mierzalnego $A \subseteq \Theta$. Wielkość $\nu(A)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subseteq \Theta$ jest miarą znaczenia, jakie przy ocenie dobrobytu społecznego przykładamy do konsumentów z grupy $\theta \in A$. Jeżeli zatem $c: \Theta \to R_+$ jest funkcją opisującą rozkład konsumpcji w społeczeństwie (tj. grupa społeczna θ konsumuje $c(\theta)$), to dobrobyt społeczny jest równy

$$\int_{\Theta} u(\theta, c(\theta)) d\nu(\theta).$$

Miary μ i ν są równoważne, a zatem istnieje $\frac{d\nu}{d\mu}$, dodatnia pochodna Radona-Nikodyna (tj. gęstość) miary ν względem miary μ. O pochodnej tej zakładamy, że

$$\varepsilon_1 < \frac{d\nu}{d\mu} < \varepsilon_2 \tag{5}$$

dla pewnych dodatnich liczb ε_1, ε_2. Założenie to oznacza, że z jednej strony nie przypisujemy zbyt dużego znaczenia mało licznym grupom społecznym ($\frac{d\nu}{d\mu} < \varepsilon_2$), a z drugiej strony – duże grupy społeczne nie są marginalizowane ($\varepsilon_1 < \frac{d\nu}{d\mu}$).

[4] Ściślej mówiąc, zakładamy, że określona jest pewna σ-algebra podzbiorów zbioru Θ i miara jest określona na przestrzeni mierzalnej złożonej z Θ i tej σ-algebry.

[5] Ściślej: na tej samej przestrzeni mierzalnej, na której określona jest miara μ.

Z założenia (5) wynika, że dla dowolnego $p \geqslant 1$ zachodzi równość $L_p(\nu) = L_p(\mu)$, gdzie $L_p(\nu)$ i $L_p(\mu)$ są zbiorami funkcji $\Theta \to R$ całkowalnych z potęgą p odpowiednio względem ν i μ (np. [5, rozdz. 12], [9, rozdz. II, § 5] lub [17, rozdz. 1]). Istotnie, dla $x \in L_p(\mu)$ mamy

$$\int_\Theta |x(\theta)|^p \, d\nu(\theta) = \int_\Theta |x(\theta)|^p \frac{d\nu}{d\mu}(\theta) \, d\mu(\theta) < \varepsilon_2 \int_\Theta |x(\theta)|^p \, d\mu(\theta) < \infty .$$

Podobnie, jeśli $x \in L_p(\nu)$, to

$$\int_\Theta |x(\theta)|^p \, d\mu(\theta) = \int_\Theta |x(\theta)|^p \frac{d\mu}{d\nu}(\theta) \, d\nu(\theta) < \frac{1}{\varepsilon_1} \int_\Theta |x(\theta)|^p \, d\nu(\theta) < \infty .$$

W dalszej części artykułu przestrzenie $L_p(\mu) = L_p(\nu)$ będziemy oznaczać przez L_p.

Możliwości produkcyjne gospodarki opisuje zagregowana, jednoczynnikowa funkcja produkcji $f: R_+ \to R_+$. Zakładamy, że jest to funkcja rosnąca i wklęsła. Przez $k(t)$ oznaczamy zasób kapitału w chwili t. Produkcja jest dzielona na inwestycje i konsumpcję, przy czym ta ostatnia jest dzielona między poszczególne grupy społeczne. Konsumpcję grupy θ w chwili t oznaczamy przez $c(\theta, t)$. Całkowita konsumpcja w chwili t jest zatem równa

$$c(t) = \int_\Theta c(\theta, t) d\mu(\theta).$$

Zasób kapitału powiększają inwestycje, a pomniejsza jego deprecjacja, co daje następujące równanie dynamiki kapitału:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \int_\Theta c(\theta, t) d\mu(\theta) - \delta k(t). \tag{6}$$

Oznaczmy przez L klasę nieujemnych funkcji $L_p(\mu)$ dla pewnego $p > 1$ (jeżeli $L_1(\mu) = L_\infty(\mu)$, to można przyjąć $L = L_1(\mu)$). Zakładamy, że podział konsumpcji w każdym momencie t opisuje funkcja $c(\cdot, t) \in L$. Przyjmując, że celem jest maksymalizacja zdyskontowanej całkowitej użyteczności konsumpcji w pewnym horyzoncie czasu $[0, T]$ $(0 < T \leqslant +\infty)$, otrzymujemy następujące zadanie optymalizacyjne:

$$\max \int_{\Theta} \int_{0}^{T} e^{-\rho t} u(\theta, c(\theta, t))\, dt dv(\theta), \tag{7}$$

pod warunkiem że

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \int_{\Theta} c(\theta, t) d\mu(\theta) - \delta k(t), \tag{8}$$

$$\forall t \in [0, T] : \int_{\Theta} c(\theta, t)\, d\mu(\theta) \leqslant f(k(t)), \tag{9}$$

przy czym $c(\cdot, t) \in L$ dla każdego $t \in [0, T]$, $c(\theta, \cdot)$ jest μ-prawie wszędzie[6] funkcją typu *cadlag* (fr. *continu á droite et pourvu de limites á gauche*, prawostronnie ciągłą z granicami lewostronnymi) oraz dla każdego $t \in [0, T]$, $\|c\|_p \leqslant A$ dla pewnej stałej A.

Przykład 1. Jeżeli społeczeństwo składa się z n osób z funkcjami użyteczności u, to μ jest miarą liczącą (tj. $\mu(A)$ jest równe liczbie elementów w zbiorze A), natomiast $v(\{i\}) = a_i$, gdzie a_i oznacza, jaką wagę przywiązujemy do użyteczności konsumenta i. Zadanie (7)-(9) ma wówczas postać:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{T} e^{-\rho t} a_i u_i(c_i(t))\, dt,$$

pod warunkiem że

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \sum_{i=1}^{n} c_i(t) - \delta k(t),$$

$$\forall t \in [0, T] : 0 \leqslant c_i(t) \text{ dla } i = 1, \ldots, n,$$

$$\forall t \in [0, T] : \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \leqslant f(k(t)),$$

przy czym $c_i(t)$ oznacza konsumpcję konsumenta i w chwili t.

Przykład 2. Załóżmy, że użyteczność z konsumpcji zależy od pewnych cech konsumenta, przy czym cechy te można opisać liczbami rzeczywistymi, a zatem opisem cech jest pewien wektor $\mathbf{x} \in R^n$. Mogą to być takie cechy jak wzrost, waga, inteligencja, a także cechy jakościowe, na przykład

[6] To jest miara μ zbioru, w którym ta własność nie zachodzi, jest równa 0.

wskaźnik ekstrawertyzmu czy poglądy społeczne. Nie rozważamy tutaj kwestii pomiaru tych cech i ich interpretacji, traktując je jako dane. Powiedzmy, że rozkład tych cech w społeczeństwie jest opisany pewną funkcją gęstości $g(\mathbf{x})$ – może to być funkcja wyznaczona empirycznie lub pewien rozkład teoretyczny (np. rozkład normalny). Niech funkcja $h(\mathbf{x})$ opisuje relatywną wagę użyteczności konsumenta o cechach $\mathbf{x}$. Jeżeli nie jest to funkcja stała, oznacza to, że planista społeczny zwraca większą uwagę na dobrobyt pewnych jednostek o określonych cechach; mogą to być po prostu decyzje planisty, co oznacza, że faworyzuje on osoby podobne do siebie. Zadanie (7)-(9) ma w takim przypadku postać:

$$\max \int_{R^n} \int_0^T e^{-\rho t} u(\mathbf{x}, c(\mathbf{x}, t))\, h(\mathbf{x})\, dt d\mathbf{x},$$

pod warunkiem że

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - \int_{R^n} c(\mathbf{x}, t)\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \delta k(t),$$

$$\forall t \in [0, T] : 0 \leqslant c_i(\mathbf{x}, t),$$

$$\forall t \in [0, T] : \int_{R^n} c(\mathbf{x}, t)\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant f(k(t)),$$

W artykule pokażemy, że zadanie (7)-(9) można sprowadzić do klasycznego zadania optymalizacji inwestycji z punktu 1, a to zadanie można już rozwiązać standardowymi metodami teorii sterowania optymalnego.

Twierdzenie 1. *Niech $U : R_+ \to R$ będzie społeczną funkcją użyteczności zdefiniowaną następująco:*

$$U^A(y) = \sup \left\{ \int_\Theta u(\theta, c(\theta))\, dv(\theta) : c \in L \wedge \int_\Theta c(\theta)\, d\mu(\theta) = y \wedge \|c\|_p \leqslant A \right\}. \quad (10)$$

Zadanie (7)-(9) *jest wówczas równoważne z zadaniem* (2)-(4) *z funkcją użyteczności U^A. Równoważność tych zadań należy rozumieć w ten sposób, że jedno z nich ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy ma je drugie z nich i optymalne trajektorie kapitału są w rozwiązaniach obu zadań takie same.*

Dowód. Zwróćmy najpierw uwagę, że funkcja U^A, określona równaniem (10), jest wypukła i rosnąca, a zatem jest ciągła tam, gdzie $U^A < \infty$ oraz jest prawie wszędzie różniczkowalna. Spełnia zatem warunki funkcji użyteczności w zadaniu (2)-(4).

Dla dowolnego $c \in L$ niech $C(c) = \int_{\Theta} c(\theta)\, d\mu(\theta)$; C jest więc ciągłym funkcjonałem liniowym $C: L \to R$, a zbiór wszystkich $c \in L$, spełniający warunek

$$\int_{\Theta} c(\theta)\, d\mu(\theta) = y \wedge \|c\|_p \leqslant A$$

jest przeciwobrazem zbioru $\{y\}$ względem przekształcenia C. Jest więc zbiorem domkniętym. Jest to także zbiór ograniczony, ponieważ należą do niego tylko funkcje spełniające warunek $\|c\|_p \leqslant A$. Przestrzeń L_p jest refleksywna, a w takich przestrzeniach, na podstawie twierdzenia Alaoglu (zob. [5, rozdz. 5 i 12], [9, rozdz. IV]), zbiory domknięte i ograniczone są zwarte w słabej topologii. Zatem zbiór

$$B = \left\{ c : c \in L \wedge \int_{\Theta} c(\theta)\, d\mu(\theta) = y \wedge \|c\|_p \leqslant A \right\}$$

jest zbiorem słabo zwartym. Rozważmy funkcjonał $U: L \to L$, określony wzorem

$$U(c) = \int_{\Theta} u(\theta, c(\theta))\, dv(\theta).$$

Łatwo sprawdzić, że jest to funkcjonał wklęsły, a zatem (zob. [3, wniosek 1.8.3]) jest półciągły z góry w słabej topologii. Oznacza to, że na zbiorze zwartym osiąga on wartość największą (zob. [1, tw. 2.40]), a więc istnieje taka funkcja c, dla której osiągane jest supremum we wzorze(10).

Załóżmy, że funkcja $c(\theta, t)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym w zadaniu (7)-(9). Wówczas funkcja $c(t) = \int_{\Theta} c(\theta, t)\, d\mu(\theta)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (2)-(4). Z drugiej strony, jeśli $c(t)$ jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (2)-(4), to dla każdego momentu t istnieje funkcja $c_t(\theta)$, dla której osiągane jest supremum po prawej stronie w (10). Z teorii procesów stochastycznych z czasem ciągłym wiadomo, że istnieje taka funkcja $c(\theta, t)$, że dla prawie każdego θ, $c(\theta, t)$ jest procesem *cadlag* oraz μ-prawie wszędzie[7] $c_t(\theta) = c(\theta, t)$. Istnieje zatem bijekcja między

[7] W twierdzeniach dotyczących procesów stochastycznych miara całej przestrzeni wynosi 1, jednak ważne jest to, że jest to miara skończona. Proces c jest semimartyngałem, a zatem na podstawie twierdzenia Dooba ma modyfikację, która jest *cadlag* (np. [15, rozdz. II, s. 61-67]). W tej pozycji funkcje cadlag są nazywane, w zależności od wydania, R-funkcjami lub funkcjami Skorokhoda.

rozwiązaniami dopuszczalnymi zadania (2)-(4) a rozwiązaniami dopuszczalnymi zadania (7)-(9). Co więcej, funkcje celu są w obu zadaniach takie same – na podstawie twierdzenia Fubiniego. Rozwiązania optymalne są więc takie same. □

Łatwo zauważyć, że założenie $\|c\|_p \leqslant A$ jest potrzebne tylko po to, aby zbiór rozwiązań dopuszczalnych w (10) był ograniczony, albowiem warunek $\int_\Theta c(\theta)\, d\mu(\theta) = y$ w ogólnym przypadku nie zapewnia ograniczoności c w przestrzeni L_p dla $p > 1$. Jednak jeżeli $L_1 = L_\infty$ (co jest spełnione na przykład dla zadania w przykładzie 2), to przestrzeń L_1 jest refleksywna, a zbiór funkcji c spełniających warunek $\int_\Theta c(\theta)\, d\mu(\theta) = y$ jest ograniczony (gdyż dla elementów tego zbioru $\|c\|_1 = y$). Wynika stąd natychmiast następujący wniosek.

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $L_1 = L_\infty$, *to zadanie* (7)-(9) *z* $A = \infty$ *jest równoważne z zadaniem* (2)-(4) *z funkcją użyteczności* U^∞. *W szczególności zachodzi to, gdy zbiór* Θ *jest skończony.*

Można także zauważyć, że jeśli funkcja użyteczności $u(\theta, \cdot)$ jest silnie wklęsła i użyteczność krańcowa maleje odpowiednio szybko dla każdego $\theta \in \Theta$, to z równości $\|c\|_1 = y$ wynika, że $\|c\|_p$ jest ograniczone, a zatem twierdzenie jest prawdziwe także dla $A = +\infty$.

Powyższe twierdzeniamają następującą interpretację ekonomiczną: w gospodarce z wieloma konsumentami można oddzielić decyzje dotyczące procesu inwestycyjnego od decyzji dotyczących podziału konsumpcji. Podejmując decyzje inwestycyjne, należy kierować się funkcją użyteczności społecznej U, a zatem można potraktować całe społeczeństwo jako jednego „reprezentatywnego konsumenta" z funkcją użyteczności U. Podział konsumpcji w dowolnym momencie jest odrębnym problemem. Należy podzielić ją tak, aby zmaksymalizować ważoną sumę chwilowych użyteczności wszystkich grup społecznych (całka (7)). Decyzja o podziale konsumpcji jest niezależna od decyzji o wyborze stopy inwestycyjnej w danym momencie i na odwrót – wybór optymalnej stopy inwestycji nie zależy od podziału konsumpcji.

3. Optymalizacja inwestycji w gospodarce z wieloma producentami

Zakładamy, że w gospodarce istnieje jeden konsument z funkcją użyteczności u, przy czym może to być społeczna funkcja użyteczności, taka jak w poprzednim punkcie. Istnieje natomiast wiele klas przed-

siębiorstw różnego rodzaju. Klasy przedsiębiorstw oznaczamy symbolami ω, przez Ω zaś oznaczamy zbiór wszystkich klas przedsiębiorstw. Przedsiębiorstwo z klasy ω ma rosnącą i wklęsłą funkcję produkcji $f(\omega, k)$. Rozkład liczebności przedsiębiorstw z różnych klas opisuje skończona miara λ. Zatem dla zbioru $X \subseteq \Omega$ wielkość $\lambda(X)$ oznacza, ile przedsiębiorstw należy do klas zawartych w zbiorze X. Łatwo podać przykłady (analogiczne do przykładu 2 z poprzedniego punktu) modeli gospodarki, które można sprowadzić do przedstawionego tutaj opisu, odpowiednio dobierając miarę λ.

Przez L oznaczmy przestrzeń funkcji $\Omega \to R_+$ całkowalnych z potęgą p dla pewnego $p > 1$ (lub $p = 1$ jeśli $L_1 = L_\infty$). Zadanie optymalizacji inwestycji ma teraz następującą postać:

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t))\, dt, \tag{11}$$

pod warunkiem że

$$\dot{k}(t) = \int_\Omega f(\omega, k(\omega, t))\, d\lambda(\omega) - c(t) - \delta k(t), \tag{12}$$

$$\forall t \in [0, T] : \int_\Omega k(\omega, t)\, d\lambda(\omega) = k(t), \tag{13}$$

$$\forall t \in [0, T] : c(t) \leqslant \int_\Omega f(\omega, k(\omega, t))\, d\lambda(\omega), \tag{14}$$

przy czym zakładamy, że $k(\cdot, t) \in L$ i $\|k(\cdot, t)\|_p \leqslant A$ dla każdego $t \in [0, T]$ oraz że $k(\omega, \cdot)$ jest funkcją *cadlag* dla każdego ω. Prawdziwy jest następujący odpowiednik twierdzeń 1 i 2.

Twierdzenie 3. *Zdefiniujmy*

$$F^A(k) = \sup \left\{ \int_\Omega f(k(\omega))\, d\lambda(\omega) : \int_\Omega k(\omega)\, d\lambda(\omega) = k \wedge \|k\|_p \leqslant A \right\}. \tag{15}$$

Zadanie (11)-(14) *jest wówczas równoważne z zadaniem* (2)-(4) *z funkcją produkcji* F^A. *Dodatkowo, jeżeli* $L = L_1 = L_\infty$, *to zadanie* (11)-(14) *z* $A = +\infty$ *jest równoważne z zadaniem* (2)-(4) *z funkcją produkcji* F^∞.

Dowód tego twierdzenia przebiega podobnie jak dowody twierdzeń 1 i 2, a zatem możemy go pominąć. O wiele bardziej istotna jest ekonomiczna interpretacja tego twierdzenia. Zgodnie z nim, w gospodarce z różnymi

klasami przedsiębiorstw możliwe jest oddzielenie od siebie decyzji inwestycyjnych od decyzji o alokacji czynników wytwórczych między przedsiębiorstwa. Innymi słowy, wybór optymalnej stopy inwestycji w długim okresie można podzielić następująco: najpierw należy wybrać optymalną stopę inwestycji dla całej gospodarki, a następnie ustalić, jak należy zrealizować zaplanowaną produkcję, dzieląc ją miedzy różne przedsiębiorstwa w gospodarce.

4. Wnioski

Twierdzenia 1, 2 i 3 pokazują, że możliwe jest oddzielenie decyzji inwestycyjnych od decyzji dotyczących podziału produkcji między konsumentów i alokacji zasobów pomiędzy przedsiębiorstwa. Jednak gospodarka spełniająca wszystkie założenia, na których oparliśmy dowody twierdzeń, jest faktycznie gospodarką centralnie planowaną. Zarówno w zadaniu (7)-(9), jak i w zadaniu (11)-(14) zakładamy, że istnieje planista, który wyznacza stopę inwestycji w całej gospodarce oraz dokonuje podziału zasobów produkcyjnych między przedsiębiorstwa, a następnie podziału produkcji między poszczególnych konsumentów. Założenie to nie jest realistyczne, choć jest typowe dla modeli optymalizacji inwestycji, wykorzystujących teorię sterowania. Modele takie są bowiem przede wszystkim modelami teleologicznymi, a nie opisowymi. Mają zatem dać odpowiedź na pytanie, jak być powinno, a nie jak jest[8].

Przyjmując opisowy punkt widzenia, należy zauważyć, że przedsiębiorstwa w gospodarce należą do konsumentów i każdy konsument podejmuje decyzje inwestycyjne, dotyczące jego własnego majątku. Oznaczmy zatem konsumenta symbolem θ, gdzie $\theta \in \Theta$, a przedsiębiorstwo symbolem ω, gdzie $\omega \in \Omega$. Niech $a(\theta, \omega)$ oznacza udział konsumenta θ w prawach do produkcji przedsiębiorstwa ω. Oczywiście

[8] Oczywiście można krytykować te modele z pozycji etycznych, argumentując, że cele, które zakładają, nie są pożądane lub że realizacja tych celów byłaby niepożądana w praktyce („cel nie uświęca środków"). W przedstawionych modelach przyjęliśmy utylitarystyczny punkt widzenia, zgodnie z którym zasadna i pożądana jest maksymalizacja sumy użyteczności wszystkich jednostek. Jednak wielu autorów utrzymuje, że ważniejsze od tego jest utrzymywanie pewnych zasad i praw, takich jak prawo własności (które w myśl zasady utylitarystycznej może być łamane). Najbardziej rozpowszechnione obecnie argumenty na korzyść pierwszego i drugiego podejścia można znaleźć w książkach [10] i [13].

$$\int_{\Theta} a(\theta, \omega)\, d\mu(\theta) = 1,$$

dla każdego $\omega \in \Omega$. Każdy konsument stara się zmaksymalizować sumę zdyskontowanej użyteczności swojej konsumpcji, a zatem rozwiązuje zadanie

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} u(\theta, c(\theta, t))\, dt, \tag{16}$$

pod warunkiem że

$$\dot{k}(\theta, t) = \int_{\Omega} a(\theta, \omega) f(\omega, k(\theta, \omega, t))\, d\lambda(\omega) - c(\theta, t) - \delta k(\theta, t) \tag{17}$$

$$\forall t \in [0, T] : \int_{\Omega} k(\theta, \omega, t)\, d\lambda(\omega) = k(\theta, t), \tag{18}$$

$$\forall t \in [0, T] : c(\theta, t) \leqslant \int_{\Omega} a(\theta, \omega) f(\omega, k(\theta, \omega, t))\, d\lambda(\omega), \tag{19}$$

przy czym:

- $c(\theta, t)$ oznacza konsumpcję konsumenta θ w chwili t,
- $k(\theta, \omega, t)$ to zasób majątku, który w chwili t alokuje w przedsiębiorstwie ω,
- $k(\theta, t)$ to łączny majątek konsumenta θ w chwili t.

Każdy konsument $\theta \in \Theta$ rozwiązuje to zadanie, wyznaczając optymalną dla niego trajektorię konsumpcji $c(\theta, t)$. Całkowitą produkcję i konsumpcję w gospodarce można otrzymać, całkując te trajektorie po zmiennej θ. Oczywiście nie można liczyć na to, że suma rozwiązań optymalnych wszystkich konsumentów będzie rozwiązaniem optymalnym dla całej gospodarki. Można jednak zadać pytanie, czy otrzymane rozwiązanie będzie optymalne ze społecznego punktu widzenia dla pewnej miary ν, reprezentującej „wagi" przypisane różnym konsumentom. Innymi słowy, powstaje następujące pytanie:

Czy dla dowolnego rozdziału praw własności $a(\theta, \omega)$ istnieje miara ν, określona na Θ, przy której rozwiązanie optymalne zadania maksymalizacji użyteczności społecznej (2)-(4) z funkcją użyteczności U określoną wzorem (10) jest takie samo jak rozwiązanie zadania (16)-(19)?

Niestety, nie znamy odpowiedzi na to pytanie. Wydaje się, że odpowiedź powinna być pozytywna – ten problem przypomina bowiem zagadnienie, na które odpowiada drugie twierdzenie ekonomii dobrobytu, a mianowicie, czy

dla dowolnej alokacji Pareto-optymalnej $\mathbf{x}$ istnieje alokacja początkowa w modelu równowagi ogólnej, dla której $\mathbf{x}$ jest alokacją równowagi. Jednak na razie jest to problem otwarty.

Literatura

[1] Aliprantis C.D., Border K.C., *Infinite Dimensional Analysis*, Springer, New York 1999.

[2] Athans M., Falb P., *Sterowanie optymalne: wstęp do teorii i jej zastosowania*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1969.

[3] Balakrishnan A.V., *Analiza funkcjonalna stosowana*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.

[4] Barro R.J., Sala-i Martin X., *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York 1995.

[5] Charalambos D.A., Border K.C., *Infinite Dimensional Analysis*, Springer-Verlag, Nowy Jork 1999.

[6] Fleming W.H., Rishel R.W., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, Nowy Jork 1975.

[7] Kliber P., *Sterowanie inwestycjami w zagregowanych modelach wzrostu endogenicznego typu Solowa*, Zeszyty Studiów Doktoranckich AE w Poznaniu, Poznań 2002.

[8] Leonard D., Long N. van, *Optimal Control Theory and Static Opimization*. Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[9] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.

[10] Nozick R., *Anarchia, państwo, utopia*, Aletheia, Warszawa 1999.

[11] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.

[12] Ramsey F.P., *A mathematical theory of saving*, Economic Journal, 38, 1928.

[13] Rawls J., *Teoria sprawiedliwości*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.

[14] Rockafellar R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[15] Rogers L.C.G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. 1, Cambrige University Press, Cambridge 2000.

[16] Romer D., *Makroekonomia dla zaawansowanych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[17] Rudin W., *Analiza funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

[18] Takayama A., *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

OPTIMAL INVESTMENTS IN A MODEL WITH HETEROGENOUS AGENTS

Summary

In the article we consider problem of optimal investments in the setting with many heterogenous agents. First we assume, that there are many consuments with different utylity functions. We state out model so, that it covers the case of finietly many different agents as well as the case in which agents are described by their characteristic (i.e. by some continuous distribution). The main resut of the paper is Theorem 1, when we state, that the problem of investments optimising in heterogenous model can be formulated as a classical problem of investment optimising with proper social utility function. Then we formulate similar model for the case in which there are many heterogenous producers. At the end we state an open question, namely, if there always exist such a ''weight'' measure, that optimal trajectories of capital and consumption in decentralized case equals the solutions with coresponding social utilyty function. This question resembles Second Theorem of Walfare Economics in this way that it should indicate if all ''market'' solutions are socially acceptable. However we do not yet know the answer to this question.