Monika KACZMAREK
Controlmatica ZAP-PNEFAL Sp. z o.o.
Ostrów Wielkopolski
Krzysztof PIASECKI
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ZASTOSOWANIE WSPÓŁCZYNNIKA GINIEGO DO OCENY SYSTEMU PODATKOWEGO

1. Problem badawczy

W doktrynie podatkowej nie znaleziono jednoznacznej i zadowalającej odpowiedzi na pytanie o sprawiedliwość opodatkowania. Była ona i pozostaje nadal zrelatywizowana czasowo i przestrzennie. Pojawiały się konwencje sprawiedliwości podatkowej, charakterystyczne dla danego okresu historycznego. Zmiany dotyczące koncepcji państwa, jego roli i znaczenia, dominujące poglądy na tematy społeczne i gospodarcze sprawiały, że zmianom podlegały także koncepcje pojęcia sprawiedliwości podatkowej. Punktem odniesienia do głoszonych poglądów mogą być tu elementarne ujęcia sprawiedliwości podatkowej:

- pozioma sprawiedliwość podatkowa,
- pionowa sprawiedliwość podatkowa.

Odmienności w podejściu do problemu sprawiedliwości podatkowej polegają na położeniu zróżnicowanego nacisku na poszczególne elementarne ujęcia sprawiedliwości. Konsekwencją tych odmienności jest różnicowanie się metod pomiaru sprawiedliwości podatkowej. Przegląd rozmaitych koncepcji sprawiedliwości podatkowej i metod ich pomiaru możemy znaleźć w pracach: [1], [8], [3], [16], [4], [5], [6], [11], [13], [12], [10] i [9]. Ilościowy opis sprawiedliwości podatkowej bazuje na ogół na analizie

przebiegu zmienności krzywej Lorenza, charakteryzowanego przez współczynnik Giniego [17] i współczynnik koncentracji [18].

W niniejszym artykule przedstawiono uogólnienie definicji krzywej Lorenza jako funkcji górnej granicy całkowania całki Lebesque'a, względem miary będącej uogólnieniem pojęcia rankingu. Motywacja takiego kierunku poszerzenia modelu zostanie podana równolegle z prezentacją uogólnienia. Dalszą konsekwencją była konieczność dostosowania pojęć współczynników: Giniego i koncentracji Yitzakiego. Dalej zostały pokazane możliwości zastosowania tych pojęć do analizy systemu podatkowego.

2. Krzywa Lorenza

Przedmiotem naszych badań będą pewne charakterystyki dochodów osiąganych przez wyróżnioną populację osób fizycznych z tytułu prowadzenia działalności gospodarczej, świadczenia pracy oraz korzystania z praw majątkowych i autorskich. Każda z tych osób jest płatnikiem podatku dochodowego, umniejszającego dochód brutto do dochodu netto o wydatki, powstające z tytułu zobowiązań podatkowych. W tej sytuacji, dla zachowania komplementarności analizy, utworzymy wspólny termin „przypis", obejmujący zarówno przypisane dochody brutto i dochody netto, jak i przypisane zobowiązania podatkowe.

W naszym modelu wyróżnioną populację podatników będziemy identyfikować ze zbiorem $\Omega=\{\omega\}$, na którym określono funkcję przypisu $X:\Omega\to R^+\cup\{0\}$. W budowanym modelu interesować nas będą nierównomierności rozkładu przypisu. Dla ułatwienia dalszej dyskusji wyróżnimy pewne specyficzne rodzaje rozkładu przypisu.

Przypis X jest rozłożony równomiernie na Ω, jeśli jest opisany za pomocą funkcji stałej $X_a:\Omega\to\{a\}$ $(a\neq 0)$.

Przypis X jest rozłożony absolutnie nierównomiernie, jeśli jest opisany za pomocą funkcji Diraca

$$X(\cdot)=D(\cdot\,|\omega_0):\Omega\to\{a,\,0\}\qquad(a\neq 0,\ \omega_0\in\Omega)$$

danej tożsamością

$$X(\omega)=D(\omega\,|\,\omega_0)=\begin{cases}a, & \omega=\omega_0,\\ 0, & \omega\neq\omega_0.\end{cases}\tag{1}$$

W każdej populacji osób fizycznych, osiągających dochód, są ustalone pewne hierarchie społeczne. W naszym modelu rozpatrywaną hierarchię społeczną opiszemy za pomocą rankingu rozumianego jako funkcja $r: \Omega \to [0, 1]$. Mając na uwadze dobro dalszej analizy matematycznej o dowolnym rankingu, będziemy zakładać, że jest półciągłą z dołu funkcją o wartościach osiągających między innymi wartości 0 i 1. Każdy ranking ze swej natury jest funkcją użyteczności pewnej liniowej relacji porządkującej identyfikowanej dalej z hierarchią społeczną. Pozwala to nam na określenie hierarchii $\rho \subset \Omega^2$ za pomocą równoważności

$$\forall(\tilde{\omega}, \omega) \in \Omega^2 : \tilde{\omega} \rho \omega \Leftrightarrow r(\tilde{\omega}) \leqslant r(\omega). \tag{2}$$

Jeśli ranking jest funkcją różnowartościową, to uzyskana powyżej hierarchia jest liniowym częściowym porządkiem, a w pozostałych wypadkach hierarchia jest jedynie liniowym preporządkiem, gdyż zbiór wartości rankingu jest zbiorem co najmniej dwuelementowym (porównaj [15]).

Z drugiej strony każdy ranking $r: \Omega \to [0, 1]$ jest wyposażony we wszystkie niezbędne własności, pozwalające na traktowanie go jako dystrybuanty pewnej miary określonej na pewnych podzbiorach mierzalnych zawartych w Ω. Zmierzając do możliwie szerokiego określenia wprowadzanej miary, tworzymy rodzinę zbiorów indeksowanych

$$\mathcal{A} = \{A(\omega, \rho) = \{\tilde{\omega} \in \Omega : \tilde{\omega} \rho \omega\} : \omega \in \Omega\}. \tag{3}$$

Na rodzinie tej predefiniujemy miarę $\mu_r : \mathcal{A} \to [0, 1]$ daną dla każdego $\omega \in \Omega$ tożsamością

$$\mu_r(A(\omega, \rho)) = r(\omega). \tag{4}$$

Ostatnia definicja oznacza, że wartość rankingu $r(\omega)$ interpretujemy jako wielkość frakcji podatników zdominowanych w hierarchii ρ przez podatnika ω. Oznacza to, że podatnik ω dominuje nad $r(\omega) \cdot 100\%$ podatnikami. Korzystając teraz z twierdzenia Caratheodory'ego o rozszerzaniu miary skończonej (por. [19], s. 40) miarę μ_r rozszerzamy w sposób jednoznaczny do ciała zdarzeń mierzalnych σ_r, będącego najmniejszym σ-ciałem zawierającym rodzinę $\mathcal{A}$.

Należy zakładać, że wraz z awansem poszczególnych podatników w hierarchii społecznej powinien wzrastać ich przypis. Jako narzędzie badania tego związku wykorzystamy definiowaną poniżej funkcję Lorenza. Niezbędne dla jej wyznaczenia jest określenie rodziny zbiorów indeksowanych

$$\mathcal{B} = \{B(y, r) = \{\omega \in \Omega, r(\omega) < y\};\ y \in [0, 1]\} \tag{5}$$

wykorzystanej do określenia funkcji Lorenza

$$L(\cdot \mid X, r): (R^+ \cup \{0\})^{\Omega} \to [0, 1]^{[0,1]}$$

danej dla każdego $y \in [0, 1]$ za pomocą tożsamości

$$L(y \mid X, r) = \int_{B(y,r)} X \, d\mu_r \left(\int_{\Omega} X \, d\mu_r \right)^{-1}. \tag{6}$$

Zbiór wszystkich par $(y, L(y \mid X, r)) \in [0, 1]^2$ nazywamy krzywą Lorenza. Krzywa ta ocenia rozkład przypisu $X: \Omega \to R$ przy uwzględnieniu rankingu $r: \Omega \to [0, 1]$. Parę uporządkowaną $(y, L(y \mid X, r))$ traktujemy jako informację, że $y \cdot 100\%$ najniżej usadowionych w hierarchii społecznej podatników uzyskuje $L(y \mid X, r) \cdot 100\%$ łącznego przypisu. W tej sytuacji spełnienie dla pewnych $y \in [0, 1]$ warunku

$$y < L(y \mid X, r) \tag{7}$$

oznacza, że mniejsza część najniżej osadzonych w hierarchii społecznej podatników otrzymała większą część przypisu łącznego. Taki podział łącznego przypisu kłóci się z poczuciem sprawiedliwości, ocenianym z punktu widzenia hierarchii społecznej ρ.

3. Współczynnik koncentracji Yitzakiego

Dana w poprzednim punkcie interpretacja krzywej Lorenza stanowi przesłankę do wyróżnienia następującej charakterystyki rozkładu przypisu:

Jeśli jest spełniony warunek (7), to z punktu widzenia rankingu r przypis X jest rozłożony niesprawiedliwie.

Dla ocenienia niesprawiedliwości tego rodzaju wykorzystamy współczynnik koncentracji Yitzakiego (uogólniony współczynnik Gini). Punktem odniesienia do konstrukcji tego współczynnika są przebiegi zmienności funkcji Lorenza, wyznaczanej dla pewnych rodzajów rozkładu przypisu X.

W przypadku dowolnego równomiernie rozłożonego przypisu $X_a: \Omega \to \{a\}$ $(a \neq 0)$ dla każdego $y \in [0, 1]$ mamy

$$L(y \mid X_a, r) = y. \tag{8}$$

Dla dowolnego absolutnie nierównomiernie rozłożonego przypisu $X(\cdot) = D(\cdot, \omega_0)$ opisanego tożsamością (1) funkcja Lorenza jest dla każdego $y \in [0, 1]$ dana za pomocą tożsamości

$$L(y \mid D(\cdot \mid \omega_0), r) = \begin{cases} 0, & y < r(\omega_0), \\ 1, & y \geqslant r(\omega_0). \end{cases} \tag{9}$$

Wobec liniowości relacji hierarchii społecznej ρ w zbiorze podatników Ω istnieją podatnicy $\omega_{\min}$ najniżej stojący w hierarchii (elementy minimalne zbioru Ω) jednoznacznie określone za pomocą warunku

$$\forall \omega \in \Omega : \omega_{\min} \rho \omega. \tag{10}$$

Wobec (9), absolutnie nierównomiernie rozłożony przypis $X(\cdot) = D(\cdot, \omega_{\min})$ możemy uznać za skrajnie niesprawiedliwy, gdyż wtedy przypis X jest w całości związany z pewnym podatnikiem, stojącym najniżej w hierarchii społecznej. Mamy wtedy $r(\omega_{\min}) = 0$ i w konsekwencji otrzymujemy

$$L(y \mid D(\cdot, \omega_{\min}), r) = 1. \tag{11}$$

Wobec liniowości preporządku hierarchii społecznej ρ w zbiorze podatników Ω istnieją podatnicy $\omega_{\max}$ najwyżej stojący w hierarchii (elementy maksymalne zbioru Ω) jednoznacznie określone za pomocą warunku

$$\forall \omega \in \Omega : \omega \rho \omega_{\max}. \tag{12}$$

Mamy wtedy $r(\omega_{\max}) = 1$ i w konsekwencji otrzymujemy

$$L(y \mid D(\cdot \mid \omega_{\max}), r) = \begin{cases} 0, & y \in [0, 1], \\ 1, & y = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Sytuację, w której absolutnie nierównomiernie rozłożony przypis $X(\cdot) = D(\cdot, \omega_{\max})$ jest w całości związany z pewnym podatnikiem najwyżej stojącym w hierarchii społecznej nie jest tak rażąco niesprawiedliwa jak przypadek $X(\cdot) = D(\cdot, \omega_{\min})$, ale i tutaj obserwowany rozkład przypisu można oceniać jako przejaw dyskryminacji, prowadzący do innego rodzaju niesprawiedliwości.

Współczynnik koncentracji Yitzakiego $C(X, r)$ definiujemy dla dowolnego przypisu $X : \Omega \to R^+ \cup \{0\}$ i dla dowolnego rankingu $r : \Omega \to [0, 1]$ jako przeciętne unormowane przesunięcie krzywej Lorenza $L(\cdot \mid X, r)$ w odniesieniu do krzywej Lorenza $L(\cdot \mid X_a, r)$ dowolnego równomiernie rozłożonego przypisu X_a. Oznacza to, że współczynnik koncentracji opisany jest za pomocą zależności

$$C(X, r) = 2 \cdot \int_0^1 L(y \mid X_a, r) - L(y \mid X, r) dy =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 y - L(y \mid X, r) dy = 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(y \mid X, r) dy. \tag{14}$$

Dla dowolnego $\omega_0 \in \Omega$ mamy wtedy

$$C(D(\cdot \mid \omega_0), r) = 2 \cdot r(\omega_0) - 1. \tag{15}$$

Tożsamości (11), (13) i (15) prowadzą do stwierdzenia, że dla dowolnego przypisu $X: \Omega \to R^+ \cup \{0\}$ i dla dowolnego rankingu $r: \Omega \to [0, 1]$ mamy

$$-1 = C(D(\cdot \mid \omega_{\min}), r) \leqslant C(X, r) \leqslant C(D(\cdot \mid \omega_{\max}), r) = 1. \tag{16}$$

Wartości współczynnika koncentracji są zatem ograniczone z góry i dołu przez wartości tego współczynnika, wyznaczone dla dwóch opisanych powyżej „skrajnie" niesprawiedliwych rozkładów przypisu X.

Zdefiniujemy w nieostry sposób kolejne własności rozkładu przypisu X.

Rozkład przypisu X jest w takim samym stopniu γ_L lewoskośny, w jakim stopniu większość całkowitego przypisu obciąża podatników, stojących niżej w hierarchii społecznej.

Rozkład przypisu X jest w takim samym stopniu γ_P prawoskośny, w jakim stopniu większość całkowitego przypisu obciąża podatników stojących najwyżej w hierarchii społecznej.

Rozkłady lewoskośne przypisu uważa się za mniej sprawiedliwe. Rozkłady prawoskośne przypisu uważa się za bardziej sprawiedliwe, to znaczy że charakteryzują rozkłady o mniej rażącej niesprawiedliwości. Wobec (7) jako ocenę stopnia lewoskośności możemy przyjąć wartość

$$\gamma_L(x) = \int_0^1 L(y \mid X, r)\, dy. \tag{17}$$

Przyjmując założenie – badany rozkład przypisu jest prawoskośny – negujemy to, że oceniany przypis ma rozkład lewoskośny. W tej sytuacji jako ocenę stopnia prawoskośności możemy przyjąć wartość

$$\gamma_P(X, r) = 1 - \gamma_L(X, r). \tag{18}$$

Porównując powyższe powtórnie z (7), otrzymujemy

$$C(X, r) = 1 - 2\gamma_L(X, r) = 2 \cdot \gamma_P(X, r) - 1. \tag{19}$$

Oznacza to, że wraz ze wzrostem stopnia prawostronności lub równaźnie wraz ze spadkiem stopnia lewostronności wzrasta wartość współczynnika koncentracji Yitzakiego $C(X, r)$. Wzrost wartości współczynnika $C(X, r)$ możemy zatem interpretować jako wzrost tego rodzaju sprawiedliwości, który wynika z asymetrii rozkładu przypisu. Wadą współczynnika koncen-

tracji jest to, że nie zawsze rozróżnia sprawiedliwe rozkłady od rozkładów niesprawiedliwych. Fakt ten ilustruje poniższy przykład.

Przykład 1

Jeśli istnieje taki podatnik $\omega_* \in \Omega$, że $r(\omega^*)=0{,}5$, to – dzięki zależności (15) – otrzymujemy $C(D(\cdot\,|\,\omega_*), r)=0$. Każdy rozkład przypisu $D(\cdot\,|\,\omega_*)$ możemy ocenić jako pewien rodzaj dyskryminacji podatnika, gdyż to jemu w całości przypisuje się przypis. Zawsze jest to sprzeczne z zasadą powszechności opodatkowania. Z drugiej strony uważany za sprawiedliwy każdy równomiernie rozłożony przypis X_a jest charakteryzowany poprzez wartość współczynnika koncentracji $C(X_a, r)=0$.

Przypadek opisany powyżej skłania nas do dalszych poszukiwań ilościowych charakterystyk sprawiedliwości rozkładu przypisu.

4. Rankingi wyznaczane przez częściowe uporządkowanie zbioru przypisanych wartości

Rozważamy zbiór podatników Ω z określonymi na nim przypisami $X: \Omega \to R^+ \cup \{0\}$ i $Z: \Omega \to R^+ \cup \{0\}$. Zbiór wartości każdego z tych przypisów jest w sposób naturalny częściowo linowo uporządkowany za pomocą relacji „ $\leqslant$”. Wtedy przypis X wyznacza ranking $r[X]: \Omega \to [0, 1]$ rozumiany jako ranking określony we wstępie do punktu 2 artykułu i spełniający dodatkowo warunek

$$\forall(\tilde{\omega}, \omega) \in \Omega : X(\tilde{\omega}) \leqslant X(\omega) \Leftrightarrow r[X](\tilde{\omega}) \leqslant r[X](\omega). \tag{20}$$

Przykład 2

Jeśli zbiór podatników Ω jest zbiorem skończenie elementowym, to dla dowolnego $\omega \in \Omega$ mamy

$$r[X](\omega)=\frac{\operatorname{card}(\{\tilde{\omega} \in \Omega : X(\tilde{\omega}) \leqslant X(\omega) : \omega \in \Omega\})}{\operatorname{card}(\Omega)}. \tag{21}$$

Przykład 3

Jeśli zbiór podatników Ω jest identyfikowany z przedziałem $[x_{\min}, x_{\max}]$ wartości dopuszczalnych przypisu X, to ranking $r[X]$ można wyznaczyć za pomocą zależności

$$r[X](x)=F(x), \tag{22}$$

gdzie funkcja $F: [x_{\min}, x_{\max}] \to [0, 1]$ jest dystrybuantą pewnej miary.

Weźmy pod uwagę uporządkowaną parę przypisów (X, Z). Para ta wyznacza ranking $r[X, Z]: \Omega \to [0, 1]$ rozumiany jako ranking określony we wstępie do punktu 2 artykułu i spełniający dodatkowo warunek

$$\forall(\tilde{\omega}, \omega) \in \Omega: r[X, Z](\tilde{\omega}) \leqslant r[X, Z](\omega) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X(\tilde{\omega}) < X(\omega)) \vee ((X(\tilde{\omega}) = X(\omega)) \wedge (Z(\tilde{\omega}) \leqslant Z(\omega))). \tag{23}$$

Przykład 4

Jeśli zbiór podatników Ω jest skończony, to dla dowolnego $\omega \in \Omega$ mamy

$$r[X, Z](\omega) =$$
$$= \frac{\operatorname{card}(\{\tilde{\omega} \in \Omega: X(\tilde{\omega}) < X(\omega) \vee (X(\tilde{\omega}) = X(\omega) \wedge Z(\tilde{\omega}) \leqslant Z(\omega)): \omega \in \Omega\})}{\operatorname{card}\{\Omega\}}. \tag{24}$$

Przykład 5

Podobnie jak w przykładzie 3, zbiór podatników Ω jest identyfikowany z kostką $[x_{\min}, x_{\max}] \times [z_{\min}, z_{\max}]$ wartości dopuszczalnych przypisów X i Z, wtedy ranking $r[X, Z]$ można wyznaczyć za pomocą zależności

$$r[X, Z](x, z) = F(x) \cdot G(z \mid X = x), \tag{25}$$

gdzie funkcja $F: [x_{\min}, x_{\max}] \to [0, 1]$ jest dystrybuantą w przykładzie 3, a funkcja $G(\cdot \mid X = x): [z_{\min}, z_{\max}] \to [0, 1]$ jest dystrybuantą warunkową pewnej miary.

Wszystkie opisane powyżej szczególne wartości rankingów $r(\omega)$ zostały zdefiniowane przy założeniu sugerowanego w punkcie 2 rozumienia rankingu jako frakcji tych podatników, którzy w rozpatrywanej hierarchii społecznej nie stoją niżej niż podatnik ω. Hierarchię społeczną zawsze wyznaczały tutaj wartości przypisów.

5. Współczynnik Giniego

Dla dowolnego rozkładu przypisu $X: \Omega \to R^+ \cup \{0\}$ i wyznaczonego przez niego rankingu $r[X]: \Omega \to [0, 1]$ współczynnik Giniego $G(X)$ definiujemy jako współczynnik koncentracji, określony przez obie funkcje, opisujące ten rozkład. Mamy zatem

$$G(X) = C(X, r[X]). \tag{26}$$

Stosowanie rankingu $r[X]$ oznacza między innymi, że każdy absolutnie nierównomiernie rozłożony przypis jest opisany za pomocą funkcji Diraca

$$X(\cdot) = D(\cdot \mid \omega_{\max}) \tag{27}$$

określonej zależnościami (12) i (13). Dodatkowo – dla dowolnego przypisu X – funkcja Lorenza $L(\cdot \mid X, r[X])$ spełnia tożsamościowo nierówność

$$0 \leqslant L(y \mid X, r[X]) \leqslant y. \tag{28}$$

Oznacza to między innymi, że w przypadku hierarchii społecznej wyznaczonej przez wartości badanego przypisu X nie występuje niesprawiedliwość typu (7). Dla każdego przypisu X, z warunków (14), (15) i (28) otrzymujemy

$$0 = G(X_a) \leqslant G(X) \leqslant G(D(\cdot \mid \omega_{\max})) = 1. \tag{29}$$

Reasumując, każda wartość współczynnika Giniego jest szacowana z dołu przez wartość współczynnika Giniego wyznaczoną dla dowolnego równomiernie rozłożonego przypisu i szacowana z góry przez wartość współczynnika Giniego wyznaczoną dla absolutnie nierównomiernie rozłożonego przypisu. Dodatkowo, dla dowolnego przypisu X współczynnik Giniego jest metryką z przestrzeni $L^1([0, 1])$ (por. [14], s. 45) mierzącą odległość krzywej Lorenza $L(\cdot \mid X, r[X])$ od krzywej Lorenza $L(\cdot \mid X_a, r[X])$, opisującej dowolny przypis z równomiernym rozkładem.

Powyższe spostrzeżenia stanowią przesłankę do stosowania współczynnika Giniego jako charakterystyki nierównomierności przypisu.

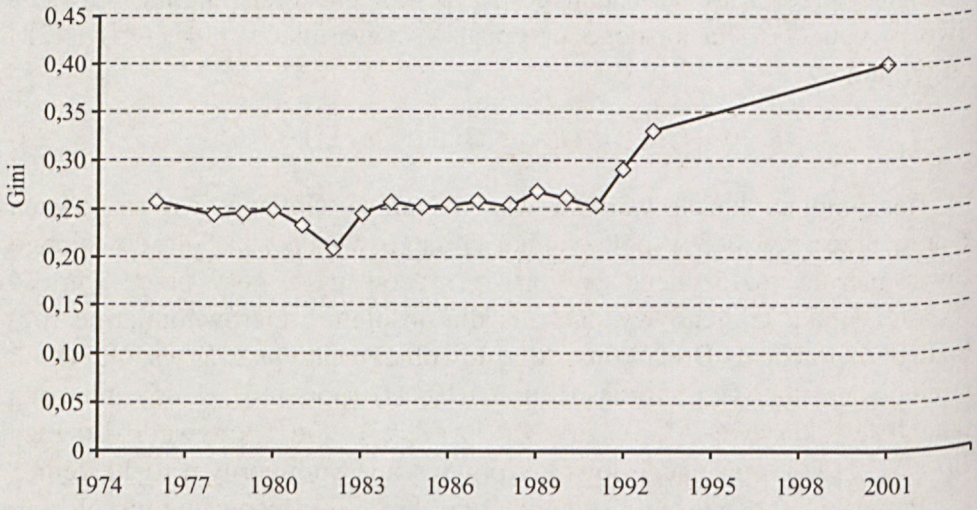
W czterech ostatnich punktach omawiano narzędzia analizy nierównomierności rozkładu przypisu. Na ogół nie podejmowano powyżej problematyki sprawiedliwości podatkowej, gdyż dla jej określenia nie wystarcza zazwyczaj sama ocena rozkładu przypisu, ale potrzebna jest też bardziej szczegółowa identyfikacja rodzaju przypisu i rodzaju stosowanego rankingu. Dlatego do tej pory podejmowaliśmy próby oceny sprawiedliwości jedynie w tych wypadkach, w których ta ocena mogła zależeć tylko od ogólnych właściwości rozkładu przypisu.

Opisane powyżej pojęcia krzywej Lorenza, współczynnika koncentracji Yitzakiego i współczynnika Giniego są uogólnieniem analogicznych pojęć, opisanych na stronach internetowych ([20], [21], [7]). Zaproponowane uogólnienie polega na stworzeniu możliwości określenia rankingu za

pomocą dowolnej miary skończonej. Ta modyfikacja narzędzi analizy równomierności rozkładu przypisu pozwala na bardziej swobodne modelowanie hierarchii społecznej, co rozszerza obszar badań.

6. Przykład zastosowania współczynnika Giniego do zarządzania systemem podatkowym

W listopadzie 2001 roku Bank Kadr TEST przedstawił swój raport [22] na temat płac w Polsce.



Zmiany współczynnika Giniego w Polsce w latach 1974-2001

Źródło: [22]

Do przedstawienia dynamiki zróżnicowania płac brutto wykorzystano wartości współczynnika Giniego G_B, wyznaczone dla rozkładów płac brutto. Graficzne zestawienie tych wartości przedstawiono na rysunku. Interpretacji wartości G_B służyć będzie ich porównanie z zebranymi w tabeli wartościami tego współczynnika w wybranych krajach.

Porównanie tych wartości nie nastraja optymistycznie. Można co prawda zauważyć, że zróżnicowanie naszych płac brutto ewoluuje w stronę rozkładu płac obserwowanych w Stanach Zjednoczonych. Wartość współczynnika Giniego jest jednak jedynym podobieństwem. Wzrost wartości współczyn-

Wartości współczynnika Giniego G_B w wybranych krajach

Kraj	Wartość współczynnika Giniego	Kraj	Wartość współczynnika Giniego
Boliwia	0,42	Kenia	0,44
Dania	0,25	Meksyk	0,54
Egipt	0,32	Rosja	0,48
Indie	0,30	Szwecja	0,25
Indonezja	0,37	USA	0,40

Źródło: [23].

nika G_B oznacza zawsze, że wzrasta liczba pracowników, opłacanych na poziomie minimalnym, charakterystycznym dla danego kraju. W Polsce spotykamy się ze zdecydowanie niższą niż w Stanach Zjednoczonych wartością realną płacy. Obserwowany trend wartości współczynnika Giniego G_B oznacza w tym wypadku rozszerzanie się sfery ubóstwa. Spostrzeżenie to powoduje, że bardziej zasadne wydaje się podobieństwo polskiego systemu płac do systemów płac obserwowanych w Boliwii czy też Kenii. Oba wymienione powyżej państwa charakteryzują się dominującym obszarem ubóstwa społecznego. Z drugiej strony dostrzegamy, że w Danii i Szwecji wartości G_B są zdecydowanie niższe i – co jest swoistym paradoksem – równe wartości G_B osiąganego w Polsce w czasach niskoefektywnej gospodarki zarządzanej centralnie. Rodzi to postulat szukania możliwości zmniejszenia obszaru ubóstwa poprzez tworzenie takich systemów podziału łącznego, które minimalizują wartość współczynnika Giniego indywidualnego dochodu. Jednym z narzędzi możliwym do wykorzystania jest polityka podatkowa państwa. W istniejącej sytuacji pożądany jest taki rozkład obciążeń podatkowych, jaki będzie prowadził do większego egalitaryzmu dochodów netto. Oznacza to, że należy szukać rozwiązań podatkowych, dla których wartość współczynnika Giniego G_N, opisującego rozkład dochodów netto, będzie niższa od wartości G_B. Różnicę $G_B - G_N$ interpretujemy wtedy jako ocenę efektu redystrybucyjnego podatków.

7. Oceny systemu podatkowego

Niech będzie oceniana populacja podatników Ω. Każdemu podatnikowi $\omega \in \Omega$ przypisujemy następujące wartości:

- $B(\omega)$ dochód brutto (deklarowany),
- $N(\omega)$ dochód netto,
- $T(\omega)$ podatek,
- $t(\omega)$ stopa podatkowa.

Wzajemne powiązania pomiędzy tymi przypisami opisuje następująca tożsamość:

$$B(\omega)=N(\omega)+T(\omega)=N(\omega)+t(\omega)\cdot B(\omega). \tag{30}$$

Pod pojęciami pionowej niesprawiedliwości i pionowej sprawiedliwości podatkowej kryją się pewne relacje, zachodzące pomiędzy podatnikami, osiągającymi różne dochody brutto. Dla uporządkowanej pary podatników (ω_1, ω_2) wyróżniamy (za Kakwanim [10]) dwie podstawowe oceny efektów niesprawiedliwości pionowej:

- efekt przeszeregowania stopy procentowej *TR* (*tax reranking*) opisany implikacją

$$B(\omega_2)>B(\omega_1)\Rightarrow T(\omega_2)<T(\omega_1), \tag{31}$$

- efekt względnych strat *RR* (*relative deprivation reranking*) opisany implikacją

$$B(\omega_2)>B(\omega_1)\Rightarrow N(\omega_2)<N(\omega_1), \tag{32}$$

oraz dwie podstawowe oceny efektów sprawiedliwości pionowej:

- efekt wzrostu dochodów netto *RP* (*residual progression*) opisany implikacją

$$B(\omega_2)>B(\omega_1)\Rightarrow N(\omega_2)>N(\omega_1), \tag{33}$$

- efekt wzrostu odpowiedzialności *LP* (*liability progresion*) opisany implikacją

$$B(\omega_2)>B(\omega_1)\Rightarrow T(\omega_2)>T(\omega_1). \tag{34}$$

Wszystkie powyższe efekty opiszemy za pomocą wartości współczynników Giniego i współczynników koncentracji Yitzakiego, wyznaczanych dla krzywych Lorenza, opisujących rozkłady przypisów wymienionych na początku tego punktu. Korzystając z doświadczeń Kakwaniego [10], możemy napisać

$$TR=\frac{1}{2}(G(T)-C(T\,|\,r[B])), \tag{35}$$

$$RR=\frac{1}{2}(G(N)-C(N|r[B])), \tag{36}$$

$$RP=\frac{1}{2}(C(N|r[B])-G(B)), \tag{37}$$

$$LP=\frac{1}{2}(C(T|r[B])-G(B)). \tag{38}$$

Efekt wzrostu odpowiedzialności LP powiększony o efekt wzrostu dochodu netto RP daje efekt netto sprawiedliwości pionowej (nVE). Mamy zatem

$$nVE=LP+RP, \tag{39}$$

co razem z (37) i (38) daje

$$nVE=\frac{1}{2}\cdot(C(T|r[B])+(C(N|r[B])-G(B). \tag{40}$$

Efekt względnych strat RR i efekt przeszeregowania stóp podatkowych TR dają w sumie efekt niesprawiedliwości pionowej (VI). Mamy zatem

$$VI=RR+TR, \tag{41}$$

co razem z (35) i (36) daje

$$VI=\frac{1}{2}\cdot(G(N)-C(N|r[B])+G(T)-C(T|r[B])). \tag{42}$$

Efekt brutto sprawiedliwości pionowej jest sumą efektu netto sprawiedliwości pionowej i efektu niesprawiedliwości pionowej, co oznacza, że

$$VE=nVE+VI \tag{43}$$

i dalej konsekwentnie

$$VE=\frac{1}{2}\cdot(G(N)+G(T))-G(B). \tag{44}$$

Efekt redystrybucji podatkowej RE polega na takim rozłożeniu obciążeń podatkowych, że uzyskany w wyniku prowadzenia polityki podatkowej

rozkład dochodu netto jest bardziej równomierny niż rozkład dochodów brutto. Efekt ten możemy zatem scharakteryzować poprzez współczynnik

$$RE = G(B) - G(N). \tag{45}$$

Porównując tę propozycję z zależnościami (36) i (37), otrzymujemy tożsamość

$$RE = 2 \cdot (RP - RR). \tag{46}$$

Dodatkowo warto zauważyć, że współczynnik LP możemy interpretować jako efekt progresji podatkowej TP i zapisać

$$TP = LP. \tag{47}$$

Porównanie zależności (39), (41), (45) i (47) pozwala stwierdzić, że układ współczynników $\{nVE, VI, RE, TP\}$ jest układem współczynników, stanowiących liniowo niezależne kombinacje liniowe podstawowych ocen efektów podatkowej sprawiedliwości pionowej. Oznacza to, że dążąc do zakładanego efektu redystrybucji podatkowej, możemy zarządzać strukturą pionowej sprawiedliwości podatkowej. Narzędziem sterującym jest polityka kształtowania stopy podatkowej $t: \Omega \to [0, 1]$.

Stwierdzoną liniową niezależność układu $\{nVE, VI, RE, TP\}$ zawdzięczamy pojawieniu się efektu niesprawiedliwości poziomej HI opisanego implikacją

$$B(\omega_2) = B(\omega_1) \Rightarrow N(\omega_2) < N(\omega_1). \tag{48}$$

Korzystając z doświadczenia Kakwaniego [10] efekt opisujemy za pomocą współczynnika

$$HI = \frac{1}{2}(C(N \mid r[B]) - C(N \mid r[B, N])). \tag{49}$$

Niesprawiedliwość pozioma powodowana jest przez ulgi podatkowe, prawne luki w systemie podatkowym oraz oszustwa podatkowe, polegające na zatajeniu dochodu, podlegającego opodatkowaniu. Ulgi podatkowe są narzędziem wykorzystywanym przez państwo do stymulacji określonych kierunków działań podatników i jako takie zarządzane są drogą legislacyjną w świetle często innych niż sprawiedliwość podatkowa kryteriów. Niezbędne jest też skuteczne usuwanie luk w prawie podatkowym. W Polsce – od

czasu konstytucji *Nihil novi* – zadanie modernizacji prawa podatkowego w całości powierzone jest ustawodawcy. Opisane tutaj metody analizy formalnej mogą być – w obu powyższych wypadkach – jedynie pomocne do oceny fiskalnych skutków zmiany prawa podatkowego. Odmiennie rzeczy mają się w wypadku oszustw podatkowych. Aronson, Johnson i Lambert [2] dostrzegają oszustwa podatkowe jako główne źródło niesprawiedliwości poziomej. Z poziomą niesprawiedliwością podatkową implikowaną przez oszustwa podatkowe możemy walczyć na drodze audytu podatkowego. Stosując audyt podatkowy, należy pamiętać, że niweluje on nie tylko efekt poziomej niesprawiedliwości, ale i wpływa na strukturę pionowej sprawiedliwości podatkowej.

8. Ocena efektów audytu podatkowego

Przedstawimy tutaj narzędzia analizy wpływu audytu podatkowego na sprawiedliwość pionową i poziomą, zaczerpnięte z [7]. Formalna postać kryteriów została tak zmodyfikowana, aby uzyskać pełną unifikację z modelem oceny systemu podatkowego opisanym w poprzednim punkcie.

Po przeprowadzeniu audytu każdemu skontrolowanemu podatnikowi $\omega \in \Omega$ przypisujemy dodatkowo następujące wartości:

- $U(\omega)$ dodatkowy dochód brutto ujawniony,
- $N^*(\omega)$ dochód netto skorygowany po kontroli,
- $S(\omega)$ podatek przypisany ujawnionym dochodom brutto,
- $s(\omega)$ stopa podatku nałożonego na ujawniony dodatkowy dochód brutto.

Wzajemne powiązania pomiędzy tymi przypisami opisują tożsamości (30) oraz

$$N^*(\omega) = N(\omega) + U(\omega) - S(\omega), \tag{50}$$

$$\begin{aligned} B(\omega) + U(\omega) &= N^*(\omega) + T(\omega) + U(\omega) - S(\omega) = \\ &= N^*(\omega) + t(\omega) \cdot B(\omega) + U(\omega) - s(\omega) \cdot U(\omega). \end{aligned} \tag{51}$$

Dla uporządkowanej pary podatników (ω_1, ω_2) wyróżniamy (za Bishopem, Formbym i Lambertem [7]) cztery efekty wpływów kontroli na system podatkowy:

- pionowy wpływ brutto kontroli V_b (*pre-tax vertical impact of audit*) opisany implikacją

$$B(\omega_2) > B(\omega_1) \Rightarrow B(\omega_2) + U(\omega_2) < B(\omega_1) + U(\omega_1); \tag{52}$$

– pionowy wpływ netto kontroli V_a (*post-tax vertical impact of audit*) opisany implikacją

$$N(\omega_2) > N(\omega_1) \Rightarrow N^*(\omega_2) < N^*(\omega_1); \tag{53}$$

– poziomy wpływ brutto kontroli H_b (*pre-tax horizontal impact of audit*) opisany implikacją

$$B(\omega_2) + U(\omega_2) > B(\omega_1) + U(\omega_1) \Rightarrow B(\omega_2) < B(\omega_1); \tag{54}$$

– poziomy wpływ netto kontroli H_a (*post-tax vertical impact of audit*) opisany implikacją

$$N(\omega_2)^* > N^*(\omega_1) \Rightarrow N(\omega_2) < N(\omega_1). \tag{55}$$

Podobnie jak w punkcie 7, korzystając z doświadczeń Kakwaniego [10], wartości podstawowych ocen wpływów audytu podatkowego możemy zapisać w postaci:

$$V_b = \frac{1}{2} \cdot (G(B) - C(B + U \mid r[B])), \tag{56}$$

$$V_a = \frac{1}{2} \cdot (G(N) - C(N^* \mid r[N])), \tag{57}$$

$$H_b = \frac{1}{2} \cdot (G(B + U) - C(B + U \mid r[B])), \tag{58}$$

$$H_a = \frac{1}{2} \cdot (G(N^*) - C(N^* \mid r[N])). \tag{59}$$

Efekty pionowego wpływu kontroli rosną wraz ze wzrostem ujawnionej i zniwelowanej przez kontrolę pionowej niesprawiedliwości podatkowej. Efekty poziomego wpływu kontroli opisują pozytywny wpływ kontroli na podniesienie poziomej sprawiedliwości podatkowej. Efekt pionowego wpływu kontroli pomniejszony o efekt poziomego wpływu kontroli nazywamy efektem niesprawiedliwości ujawnionej przez kontrolę (*inequality effect of the audit*). Stanowi to przesłankę do wyznaczenia współczynników brutto IE_b i netto IE_a efektu niesprawiedliwości usuniętej przez audyt. Mamy

$$IE_b = V_b - H_b, \tag{60}$$

$$IE_a = V_a - H_a. \tag{61}$$

Porównując zależności (56)-(61) – otrzymujemy

$$IE_b = \frac{1}{2} \cdot (G(B+U) - G(B)), \tag{62}$$

$$IE_a = \frac{1}{2} \cdot (G(N^*) - G(N)). \tag{63}$$

Z drugiej strony, stosując analogię do zależności prezentowanych w punkcie 7, pokontrolne wartości podstawowych ocen efektów sprawiedliwości pionowej możemy zapisać w postaci

$$TR^* = \frac{1}{2}(G(T+S) - C(T+S \mid r[B+U])), \tag{64}$$

$$RR^* = \frac{1}{2}(G(N^*) - C(N^* \mid r[B+U])), \tag{65}$$

$$RP^* = \frac{1}{2}(G(B+U) - C(N^* \mid r[B+U])), \tag{66}$$

$$LP^* = \frac{1}{2}(C(T+S \mid r[B+U]) - G(B+U)). \tag{67}$$

Zmierzając dalej drogą wyznaczoną w punkcie 7, wyznaczamy teraz pokontrolne wartości współczynników, opisujących strukturę pionowej sprawiedliwości podatkowej. Mamy:

$$nVE^* = LP^* + RP^*, \tag{68}$$

$$VI^* = RR^* + TR^*, \tag{69}$$

$$RE^* = 2 \cdot (RP^* - RR^*), \tag{70}$$

$$TP^* = LP^*. \tag{71}$$

Na koniec, porównując zależności (45), (62), (63), (65), (66) i (70), otrzymujemy

$$RE^* - RE = 2 \cdot (IE_b - IE_a). \tag{72}$$

Pokontrolny przyrost efektu podatkowej redystrybucji zależy więc od różnicy współczynników brutto i netto niesprawiedliwości usuniętej przez audyt.

W przypadku kontroli podatkowej uzyskujemy nowe, dodatkowe instrumentarium zarządzania strukturą sprawiedliwości. Narzędziem bezpośrednio sterującym jest polityka kształtowania karnej stopy podatkowej $s : \Omega \to [0, 1]$. Zwiększając agresywność kontroli skarbowej i podnosząc skuteczność windykacji, wpływamy na wartość ujawnionych dochodów $U(\omega)$, przez co pośrednio wpływamy na kształtowanie się sprawiedliwości podatkowej.

Zakończenie

Powyżej przedstawiono ujednolicony opis zmodernizowanego instrumentarium analizy systemów podatkowych. Jest to pierwszy i najłatwiejszy krok, zmierzający do poznania mechanizmów wybranych systemów podatkowych. Przejście w tym wypadku od formalnej teorii do empirycznych badań, jak wykazują doświadczenia zebrane przez badaczy tego tematu, to daleka droga. W Stanach Zjednoczonych pierwsze wyniki badań oceniających reformę podatków z 1986 roku (*The Tax Reform Act of 1986*) ukazały się w 1993 roku [5].

Literatura

[1] Aronson J. R., Lampert P., *Decomposing the Gini Coefficient to Reveal the Vertical, Horizontal, and Rerankings effects if Income Taxation*, National Tax Journal vol. 47, 1994.

[2] AronsonJ. R., JohnsonP., Lampert P., *Redistributive Effect and Unequal Income Tax Treatment*, The Economic Journal vol. 104, 1994.

[3] Atkinson A. B., *Horizontal Equity and the Distribution of the Tax Burden*, w: *Economics of Taxation*, red. H. Aaron, M. Boskin, The Brookings Institution, Washington D.C. 1980.

[4] Berliant M. C., Strauss R. P., *The Horizontal and Vertical Equity Characteristics of the Federal Individual Income Tax, 1966-77*, w: *Studies in Income and Welth. National Bureau of Economic Research*, red. M. David, T. Smeeding, University of Chicago Press, 1985.

[5] Berliant M. C., Strauss R. P., *State and Federal Tax Equity: Estimates Before and After the Tax Reform Act of 1986*, Journal of Policy Analysis and Management vol. 12, 1993.

[6] Berliant M. C., Strauss R. P., *On Recent Expositions of Horizontal and Vertical Equity*, Public Economic Review (Inaugural Issue), 1996.

[7] Bishop J. A., Formby J. P., Lambert P., *Redistribution Through the Income Tax: The Vertical and Horizontal Effects of Noncompliance and Tax Evasion*, 1999.

[8] Feldstein M. S., *On the Theory of Tax Reform*, Journal of Public Economics vol. 6, 1976.
[9] Formby J. P., Kim H., Smith W. J., *Decomposing the Redistributive Effect of Taxes: New Measure of Vertical Equity and Inequity*, w: *Advances in Econometrics, Income Distribution and Scientific Methodology. Essays in Honor of Camilo Dagun*, ed. D. J. Slottje, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.
[10] Kakwani N. C., *On the Measurement of Tax Progressivity and Redistibutive Effect of Taxes With applications to Horizontal and Vertical Equity*, Advances in Econometrics vol. 3, 1984.
[11] Kaplow L., *Horizontal Equity: Measures in Search of a Principle*, National Tax Journal vol. 41, 1989.
[12] Lerman R., Yitzaki S., *Changing Ranks and the Inequality Impact of Taxes and Transfers*, National Tax Journal vol. 36, 1994.
[13] Musgrave R. A., *Horizontal Equity, Once More*, National Tax Journal vol. 43, 1990.
[14] Musielak J., *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
[15] Piasecki K., Świtalski Z., *Relacje*, w: *Matematyka wspomagająca zarządzanie*, red. K. Piasecki, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002.
[16] Plotnick R., *A Measure of Horizontal Inequity*, Reviev of Economics and Statistics vol. 63, 1981.
[17] Pyatt G., *The Interpretation and Disaggregation of Gini Coefficients*, Economic Journal vol. 8, 1976.
[18] Yitzaki S., *Relative Deprivation and the Gini Coefficient*, Quaterly Journal of Economics vol. 93.
[19] Zubrzycki S., *Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1970.
[20] www.statistics.com/content/glossary/g/gini.html.
[21] http://icg.harvard.edu.
[22] Zróżnicowanie wynagrodzeń w Polsce – najnowszy raport Banku Kadr TEST – listopad 2001. http://praca.onet.pl/poradnik/1072774,762,868,index.html.
[23] World Bank, 1999, http://www.worldbank.org/poverty/data/.

APPLICATION GINI COEFFICIENT FOR VALUATION A TAX SYSTEM

Summary

The Lorentz curve analysis is generalized here for the case of Lebesque measurable ranking space. Obtained results are applied for valuation a tax system and for valuation a tax audit effect.