Dorota Kiersk-Królikowska

Stochastyczny czas realizacji zamówienia a poziom zapasu zabezpieczającego

Wstęp

Środowisko funkcjonowania współczesnych firm charakteryzuje się zmiennym popytem, krótszymi cyklami życia produktów oraz silną globalną konkurencją, a także spadkiem lojalności klientów. Aby przetrwać, przedsiębiorstwa potrzebują takiej struktury informacyjnej, która umożliwi im podejmowanie trafnych decyzji w czasie rzeczywistym oraz pozwoli nadać satysfakcji klienta najwyższy priorytet, a firmom pozostać konkurencyjnymi i zyskownymi. Wymagania stawiane przedsiębiorstwom są wysokie i wiążą się z dużym ryzykiem. Związane jest to z gwałtownymi zmianami popytu i podaży. Nietrafna prognoza może spowodować niekorzystną dla organizacji nadwyżkę zapasów. Niedotrzymywanie ustalonych terminów dostaw może prowadzić do utraty klientów. Presja, aby redukować inwestycje magazynowe w łańcuchach dostaw, rośnie wraz ze wzrostem konkurencji i różnorodności produktów. Menedżerowie szukają obszarów, w których mogą zwiększyć redukcję zapasów bez znacznego wpływu na poziom obsługi klienta. Głównym obszarem jest okres realizacji zamówienia związany z uzupełnianiem zapasów i jego zmienność. Okres realizacji zamówienia rozpoczyna się w momencie pojawienia się sygnału o potrzebie złożenia zamówienia, a kończy w momencie zakończenia wszystkich operacji fizycznych i dokumentacyjnych warunkujących prawo do dysponowania produktem[1].

Zapewnienie właściwego poziomu obsługi klienta jest podstawowym celem kształtowania i utrzymywania zapasu zabezpieczającego. Zdefiniowanie tego poziomu jest niezbędne do określenia wymaganej wielkości zapasu. Wielkość poziomu zapasu bezpieczeństwa zależy od średniego popytu i jego zmienności (odchylenia standardowego) w okresie realizacji zamówienia. Utrzymywanie

[1] S. Krawczyk, *Zarządzanie procesami logistycznymi*, PWE, Warszawa 2001.

zbyt wysokiego zapasu bezpieczeństwa pociąga za sobą nadmierne koszty zapasów, a zapas niewystarczający powoduje utratę sprzedaży. Znając poziom zapasu zabezpieczającego w pewnym okresie oraz zmienność popytu w przyjętym cyklu uzupełniania zapasu, możemy wyliczyć rzeczywisty poziom obsługi, czyli – na przykład – prawdopodobieństwo, że do chwili nadejścia dostawy zapas nie ulegnie wyczerpaniu, ale również dla wymaganego poziomu obsługi, przy znanym rozkładzie popytu w cyklu uzupełniania zapasu, możemy wyliczyć zapas zabezpieczający zapewniający przyjęty poziom obsługi[2].

Jeśli w celu ilościowego scharakteryzowania popytu nie ograniczymy się do statystyk opisowych, którymi są średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe, lecz opracujemy ich prognozy, wówczas do wyznaczenia zapasu bezpieczeństwa będziemy wykorzystywali prognozę wartości średniej popytu i standardowego błędu prognozy[3]. Niezbędna jest zatem znajomość rozkładu popytu. W praktyce gospodarczej do najczęściej spotykanych rozkładów należy rozkład normalny, rozkład Piossona lub rozkład wykładniczy. W literaturze krajowej i zagranicznej możemy znaleźć liczne przykłady na zastosowanie wyżej wymienionych rozkładów. Możliwe jest także stosowanie bardziej wysublimowanych rozkładów. Na szczególną uwagę zasługuje rozkład Gamma, który można wykorzystać do modelowania popytu. Celem opracowania jest ukazanie możliwości jego zastosowania w systemach logistycznych.

1. Modelowanie popytu ze stochastycznym czasem realizacji zamówienia

Jeżeli popyt i długość cyklu są stałe i znane z góry, to obliczenie punktu ponownego składania zamówienia jest łatwe. Natomiast kiedy dopuszczamy zmienność popytu, jak i długości cyklu, to znajomość rozkładu popytu obserwowanego w jednostce czasu pozwala przewidzieć prawdopodobieństwo określonych zdarzeń związanych z zapasem, a przede wszystkim ryzyko wystąpienia braku lub oczekiwaną liczbę braków w tym okresie. Dla właściwych decyzji odnośnie do odnawiania zapasów jest ważne nie to, jak zachowuje się popyt w dowolnie przyjętej jednostce czasu (dzień, tydzień, miesiąc), ale jak wyglądają jego zmiany w czasie upływającym od chwili wystąpienia potrzeby uzupełnienia zapasu do momentu jego udostępnienia do zużycia lub sprzedaży. O ile bowiem znajomość parametrów rozkładu popytu tygodniowego pozwala jedynie na sza-

[2] S. Krzyżaniak, *Podstawy zarządzania zapasami w przykładach*, ILiM, Poznań 2002.
[3] Z. Sarjusz-Wolski, *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2000.

cowanie ryzyka i ewentualne decyzje o podjęciu zakupów awaryjnych, to umiejętność określania rozkładu popytu w cyklu uzupełniania zapasu pozwala na skuteczne realizowanie przyjętych modeli odnawiania zapasu, gwarantujące pożądany poziom obsługi[4].

Gdy czas realizacji zamówienia na jednostkę i popyt na jednostkę czasu są stochastyczne, rzeczywisty popyt podczas czasu realizacji zamówienia jest splotem losowej liczby okresów czasowych, każdy z losowym popytem. Gdy ten złożony popyt przebiega według rozkładu normalnego, łatwo można określić punkt ponownego zamawiania, aby zapewnić wymagany poziom obsługi klienta.

Wyznaczając wartości dla średniej i odchylenia standardowego popytu w czasie realizacji zamówienia, możemy określić prawdopodobieństwo wyczerpania zapasu dla poszczególnych punktów ponownego składania zamówienia. Wyznaczenie tego punktu na poziomie $\mu + 1\sigma$ oznacza, że z prawdopodobieństwem 84,13% popyt w cyklu realizacji zamawiania nie przekroczy dysponowanej przez firmę wielkości zapasu. Jeśli punkt ponownego składania zamówienia ustalimy na poziomie $\mu + 2\sigma$, prawdopodobieństwo, że nie wystąpi brak zapasów, wyniesie 97,72%; złożenie zamówienia na poziomie $\mu + 3\sigma$ zwiększa to prawdopodobieństwo do 99,87%. W przypadku nieokreśloności popytu znalezienie punktu ponownego składania zamówienia ma taką samą wymowę, jak podniesienie poziomu zapasu bezpieczeństwa[5].

Istnieje jednak małe prawdopodobieństwo, że popyt z losowym czasem realizacji będzie miał rozkład normalny. Należy znaleźć elastyczny rozkład statystyczny do modelowania złożonego popytu, który będzie uniwersalny w zastosowaniu. Rozkład normalny jest uzasadnionym przybliżeniem dla szybko rotujących jednostek, często da się nim opisać sprzedaż wyrobów gotowych przez producenta i masowych towarów w przedsiębiorstwach handlowych. Dla wolno rotujących jednostek można zastosować rozkład Poissona. Opisuje on kształtowanie się popytu na towary „rzadkie", głównie w punktach sprzedaży detalicznej, np. nietypowych części zamiennych. W obu wspomnianych wyżej przypadkach można również zastosować rozkład Gamma.

Rozkład Gamma jest idealny do modelowania w przypadku wolno rotujących jednostek i z odpowiednim skalowaniem jednostek miary może być łatwo zaadaptowany w przypadku szybko rotujących jednostek. Rozkład Gamma jest elastyczny, zatem może przybierać prawie każdy kształt dziennego popytu. Parametry rozkładu Gamma mogą być łatwo obliczone, zatem można ten rozkład wykorzystać do modelowania popytu.

Możemy obliczyć średnią i odchylenie standardowe popytu w czasie realizacji zamówienia, wykorzystując następujące wzory:

---

[4] S. Krzyżaniak, *Podstawy zarządzania zapasami w przykładach*, ILiM, Poznań 2002.

[5] J. Cole, E.J. Bardi, C.J. Langley Jr., *Zarządzanie logistyczne*, PWE, Warszawa 2002.

(1) $$\mu = \mu_d \cdot \mu_t ,$$

(2) $$\sigma = \sqrt{\mu_t \sigma_d^2 + \mu_d^2 \sigma_t^2} ,$$

gdzie:
μ – średni popyt w czasie realizacji zamówienia,
σ – odchylenie standardowe popytu w czasie realizacji zamówienia,
μ_d – średni popyt dzienny,
σ_d – odchylenie standardowe popytu dziennego,
μ_t – średnia długość cyklu realizacji zamówienia,
σ_t – odchylenie standardowe długości cyklu realizacji zamówienia[6].

Przykład
Załóżmy, że średnia i odchylenie standardowe popytu dziennego wynoszą odpowiednio $\mu_d = 20$ i $\sigma_d = 4$ jednostki, a średnia i odchylenie standardowe długości cyklu realizacji – odpowiednio $\mu_t = 8$ i $\sigma_t = 2$ dni. Zatem średnią i odchylenie standardowe popytu w cyklu realizacji obliczamy następująco:

$$\mu = \mu_d \cdot \mu_t = 20 \cdot 8 = 160 ,$$
$$\sigma = \sqrt{\mu_t \sigma_d^2 + \mu_d^2 \sigma_t^2} = \sqrt{8 \cdot 4^2 + 20^2 \cdot 2^2} = \sqrt{1728} = 41{,}57 \approx 42 .$$

Do określenia odpowiedniego punktu składania zamówienia potrzebny jest rozkład popytu w czasie realizacji zamówienia. Są dwa podejścia w wyznaczaniu tego rozkładu.

W pierwszym z nich określamy funkcję popytu na jednostkę czasu i funkcję trwania czasu realizacji zamówienia, a następnie określamy rozkład złożony mając dane rozkłady składowe.

W drugim podejściu szukamy elastycznej funkcji dla opisu złożonego rozkładu bez modelowania rozkładów składowych.

Do otrzymania funkcji dziennego popytu możemy wykorzystać dane magazynowe, natomiast do określenia rozkładu czasu realizacji zamówienia można wykorzystać dane dotyczące momentu składania zamówienia i przybycia załadunku.

Każdy cykl zamówienia dostarcza tylko jedną obserwację czasu realizacji, zatem konieczne będzie wykorzystanie danych z lat poprzednich, aby uzyskać odpowiednią statystycznie liczbę obserwacji. Niemniej jednak ważność danych historycznych zanika z czasem, ponieważ zmieniają się możliwości przewozowe, ludzie z obsługi; zaistnieje więc potrzeba ich uzupełnienia na podstawie: danych dla podobnych jednostek bądź specjalnie przeprowadzonych badań.

[6] J.J. Cole, E.J. Bardi, C.J. Langley Jr., *Zarządzanie logistyczne*, PWE, Warszawa 2002.

Rozważmy następującą sytuację: wymagany stopień ilościowej realizacji zamówień jest określony (np.: 98%), a zadaniem jest określenie punktu ponownego zamawiania, aby ten poziom utrzymać. Czas realizacji zmienia się według rozkładu dyskretnego o dowolnym kształcie. Odstępy czasowe mierzone są tygodniami, dniami, godzinami lub innymi jednostkami. Załóżmy, że są to dni. Rozkład popytu dziennego może być rozkładem dyskretnym lub ciągłym. Rozważmy przypadek ciągły. Możemy określić oczekiwaną liczbę niedoborów wynikających z doboru punktu ponownego zamawiania R. Oczekiwana liczba niedoborów w losowym czasie realizacji jest średnią ważoną liczby niedoborów dla każdego warunkowego rozkładu, gdzie wagi są prawdopodobieństwami, że czas realizacji przyjmie każdą możliwą długość. Wartość tę porównujemy z poziomem docelowym, który zapewni oczekiwany stopień ilościowej realizacji zamówień. Jeżeli oczekiwana liczba niedoborów jest zbyt wysoka, to zwiększamy poziom punktu ponownego zamawiania, jeśli jest zbyt niska, poziom punktu ponownego zamawiania jest zmniejszany. Przez systematyczne dostosowywanie punktu ponownego zamawiania zbliżamy się do wymaganego stopnia ilościowej realizacji zamówień[7].

Należy więc znaleźć narzędzie do wielokrotnego przekalkulowania niedoborów dla każdego rozkładu warunkowego. Dyskretny rozkład czasu realizacji używający „empirycznych" prawdopodobieństw może przyjmować dowolny kształt (choć wyszczególnienie dużej liczby prawdopodobieństw może być czasochłonne).

Jedynym elementem limitującym elastyczność jest wybór rozkładu dziennego popytu. Można używać rozkładu normalnego dla szybko rotujących jednostek. Można też używać rozkładu Poissona dla wolno rotujących jednostek, ale ma on tylko jeden parametr i wyznacza ograniczony zakres kształtów. Natomiast rozkład Gamma jest elastyczny i łatwy do zastosowania oraz może być wykorzystany zarówno w przypadku wolno, jak i szybko rotujących jednostek. Zastosowanie tego rozkładu będzie zatem bardziej praktyczne.

2. Rozkład Gamma

Standardowy rozkład Gamma jest dwuparametrowym ciągłym rozkładem i dopuszczalne są tylko dodatnie wartości popytu (lub też innej zmiennej będącej przedmiotem rozważań).

[7] U. Bagchi, J.C. Hayya, C.H. Chu, *The effect of lead time variability: The case of independent demand*, „Journal of Operations Management" 6, no. 2, 1986.

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Gamma o parametrach $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, jeśli jej gęstość prawdopodobieństwa określona jest wzorem:

$$(3) \qquad f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}$$

przy czym β jest parametrem skali tego rozkładu, zaś α nazywamy parametrem kształtu[8]. Natomiast $\Gamma(\alpha)$ jest funkcją Gamma definiowaną jako:

$$(4) \qquad \Gamma(\alpha)=\int_{o}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt\,.$$

Jeśli α jest liczbą naturalną, to $\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$.

Średnią rozkładu jest $EX=\alpha\beta$ i wariancją $D^2X=\alpha\beta^2$. Dla $\alpha>1$ rozkład jest jednomodalny, przy czym moda $m_0=\beta(\alpha-1)$.

W przypadku $\beta=1$, mamy $EX=D^2X=\alpha$.

Identyczną własność dla zmiennej losowej typu skokowego ma rozkład Poissona o funkcji prawdopodobieństwa postaci $P(k,\alpha)=e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}$, $k\in N\cup\{0\}$.

Gdy $\alpha=1$, mamy wówczas do czynienia z rozkładem wykładniczym o funkcji gęstości $f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$ i średniej $EX=\beta$.

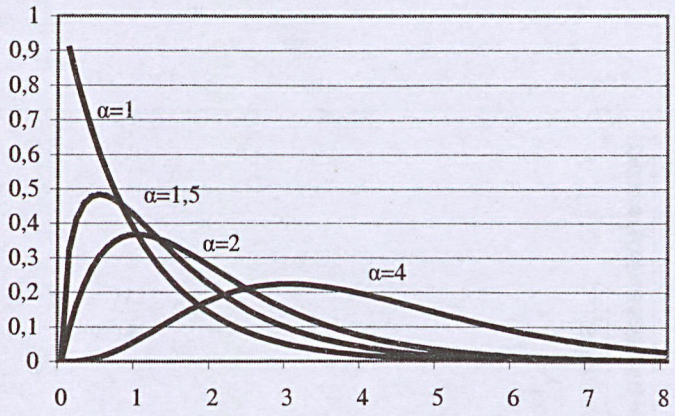
Wykres funkcja gęstości rozkładu Gamma zależna od parametru skali β i parametru kształtu α ma zróżnicowany kształt (rys. 1A i 1B).

Wraz ze wzrostem α rozkład Gamma staje się coraz bardziej symetryczny. Zmniejszając β, „ścieśniamy" wykres rozkładu w kierunku osi *OY*.

„Przesunięty" wykres rozkładu Gamma ma dodatkowy parametr $\gamma>0$, który przesuwa wykres rozkładu dwuparametrowego do punktu γ wzdłuż osi *OX*. Funkcja gęstości tego rozkładu określona jest wzorem[9]:

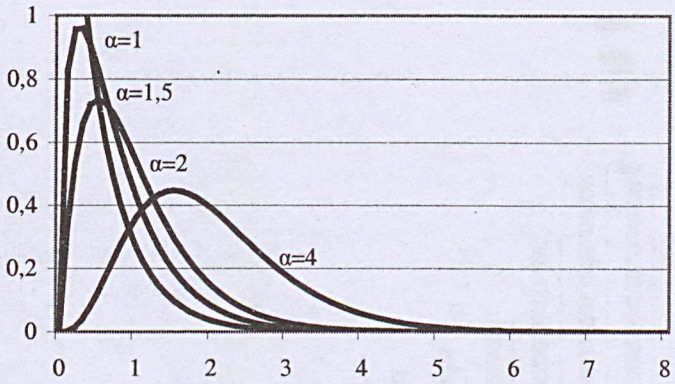
[8] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1993.

[9] Ibidem.



Rys. 1A. Funkcja gęstości rozkładu Gamma; $\beta = 1$

Źródło: Opracowanie własne



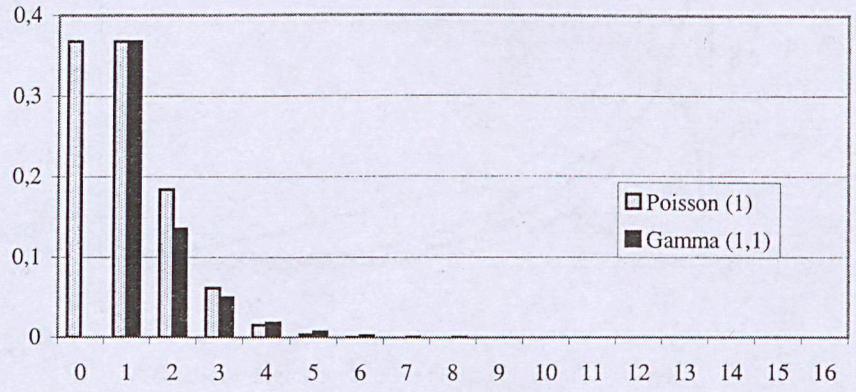
Rys. 1B. Funkcja gęstości rozkładu Gamma; $\beta = \frac{1}{2}$

Źródło: Opracowanie własne

$$f(x,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\frac{\alpha}{\gamma}}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x^{\gamma}}{\beta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

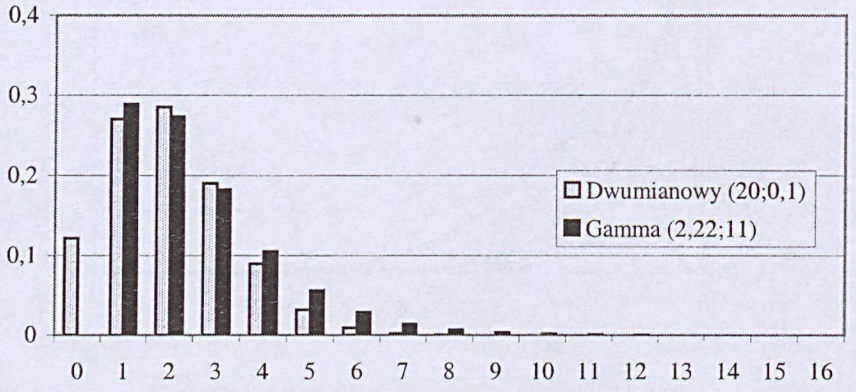
Z powyższego wynika, że rozkład Gamma może przyjmować każdy jednomodalny kształt, jaki prawdopodobnie wykazuje popyt dzienny.

Rozkład ten jest bardziej elastyczny niż rozkład Poissona i dwumianowy (rys. 2A i 2B).



Rys. 2A. Rozkład Poissona a rozkład Gamma

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 2B. Rozkład dwumianowy a rozkład Gamma

Źródło: Opracowanie własne

Jeżeli dzienny popyt zmienia się według rozkładu Gamma (α, β), to warunkowy rozkład popytu w czasie realizacji t dni zmienia się według rozkładu Gamma z parametrami $t\alpha$ i β. Nie można dokładnie obliczyć wartości całki $\Gamma(\alpha)$ i do obliczeń tych wartości zwykle używane są metody aproksymacyjne. Kiedy α jest liczbą naturalną, to $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$. Zatem $\Gamma(\alpha)$ rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem α i wartości powyżej 160 są już rachunkowo niepraktyczne. Wyjściowe dane mogą być jednak tak przeskalowane, aby α uległo zmniejszeniu.

3. Obliczanie miar poziomu obsługi

Aby móc wykorzystać jakikolwiek rozkład do modelowania popytu, musimy mieć możliwość wyznaczania miar poziomu obsługi typu 1 i typu 2.

Rozważmy najpierw miarę typu 1, prawdopodobieństwo niewystępowania niedoborów. Dla dowolnego punktu ponownego zamawiania R jest to prawdopodobieństwo, że popyt D jest mniejszy lub równy R; wiedząc, że popyt D zmienia się według rozkładu Gamma(α,β). Oznaczając to prawdopodobieństwo przez $P(D<R|\alpha,\beta)$, możemy je obliczać jako:

$$P(D<R|\alpha,\beta)=\int_0^R f(x,\alpha,\beta)\,dx, \tag{5}$$

gdzie $f(x,\alpha,\beta)$ jest funkcją gęstości rozkładu Gamma z (3).
Ponieważ nie można dokładnie wyznaczyć tej wartości, niezbędna jest numeryczna aproksymacja. Użyteczną własnością rozkładu Gamma jest, że:

$$\int_0^R f(x,\alpha,\beta)\,dx=\int_0^{\beta R} f(x,\alpha,1)\,dx, \tag{6}$$

co oznacza, że możemy znaleźć prawdopodobieństwo dla ogólnego rozkładu Gamma, używając βR jako górne granicy całkowania z funkcji gęstości Gamma$(\alpha,1)$. Upraszcza to w znacznym stopniu obliczenia.
Oznaczamy całkę (6) przez $P(\beta R|\alpha)$. Kiedy popyt zmienia się według rozkładu Gamma(α,β), wtedy prawdopodobieństwo niewystępowania niedoborów (typ 1 poziomu obsługi) dla punktu ponownego zamawiania R wynosi $P(\beta R|\alpha)$.

Aby obliczyć stopień ilościowej realizacji zamówień – miarę typu 2 poziomu obsługi – musimy najpierw określić oczekiwaną liczbę niedoborów jako funkcję punktu ponownego zamawiania R. Kiedy popyt zmienia się według rozkładu Gamma(α,β) oczekiwana liczba niedoborów oznaczana jako $E(R|\alpha,\beta)$ jest obliczana z:

$$E(R|\alpha,\beta)=\int_R^{\infty}(x-R)f(x,\alpha,\beta)\,dx. \tag{7}$$

Wykorzystujemy tę wielkość do określania stopnia ilościowej realizacji zamówień.

Całka we wzorze (7) może być obliczona jako[10]:

$$E(R|\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\beta}\left[1-P(\beta R|\alpha-1)\right]-R\cdot\left[1-P(\beta R|\alpha)\right]. \tag{8}$$

4. Określanie parametrów rozkładu Gamma

Aby rozkład mógł być użyteczny, szacowanie jego parametrów nie powinno przysparzać zbyt wielu problemów obliczeniowych. Parametry rozkładu Gamma można łatwo obliczyć, wykorzystując przykładową średnią i wariancję, chociaż ta metoda może nie prowadzić do najlepszych oszacowań. Znane są bardziej rachunkowo intensywne techniki. Jedną z nich jest metoda momentów. Przy użyciu tej metody szacujemy parametry rozkładu dziennego popytu, co pozwala na oszacowanie parametrów warunkowego rozkładu.

Przyjmijmy, że dysponujemy próbką wartości dziennego popytu dla pewnej liczby kolejnych dni. Aby wykorzystać metodę momentów, najpierw obliczamy wstępną średnią $\bar{x}$ i wariancję s^2, wykorzystując standardowe wzory.

Parametry „standardowego" rozkładu Gamma mogą być wyznaczone jako[11]:

$$\hat{\alpha}=\frac{\bar{x}^2}{s^2}, \tag{9}$$

$$\hat{\beta}=\frac{\bar{x}}{s^2}. \tag{10}$$

Ta metoda jest prosta, ale w ogólnym przypadku wartości $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ nie dają najlepszego dopasowania do próbki danych.

Rezultaty zastosowania metody momentów do obserwacji generowanych przez dwa inne rozkłady ukazano na rys. 2A i 2B. Celem tych porównań jest zilustrowanie elastyczności rozkładu Gamma, a nie formalne ocenianie „dobrego" dopasowania. Dlatego też nie wykonano testów chi-kwadrat do określania stopnia przybliżenia jakiego dostarcza rozkład Gamma. Wystarczą porównania graficzne.

[10] T.A. Burgin, *The Gamma Distribution and Inventory Control*, „Operational Research Quaterly" 26, no. 3, 1975.

[11] T.A. Burgin, *The Gamma Distribution and Inventory Control*, „Operational Research Quaterly" 26, no. 3, 1975.

Ponieważ Gamma jest rozkładem ciągłym, porównujemy zatem wielkość obszaru w przerwach między każdą wartością całkowitą popytu z dyskretnym rozkładem Poissona dla tej wartości popytu.

Porównujemy więc pole pod wykresem rozkładu Gamma pomiędzy 0 i 0,5 z rozkładem Poissona $P(0)$, pole pod wykresem rozkładu Gamma pomiędzy 0,5 i 1,5 z rozkładem Poissona $P(1)$ itd.

Ponieważ średnia i wariancja rozkładu Poissona (1) są równe 1, otrzymujemy $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 1{,}0$ z (9) i (10) jako parametry rozkładu Gamma. Można uznać, iż rozkład Gamma (1,1) jest dobrym przybliżeniem Poisson (1), szczególnie kiedy rozważamy porównanie wycinków rozkładu ciągłego z rozkładem dyskretnym (rys. 2A).

Na rys. 2B ukazano efekty porównania rozkładu dwumiannowego z rozkładem Gamma w oparciu o teoretyczne prawdopodobieństwa dla rozkładu dwumianowego (dla $n = 20$ i $p = 0{,}1$) z przybliżeniem Gamma. Ponieważ średnia i wariancja rozkładu dwumianowego (20;0,1) wynoszą odpowiednio 2 i 1,8, otrzymujemy $\hat{\alpha} = 2{,}22$ i $\hat{\beta} = 1{,}11$ jako parametry rozkładu Gamma z (9) i (10). Na rys. 2A i 2B ukazano przykłady dla wolno rotujących jednostek.

W tym przypadku metoda momentów nie daje szczególnie dobrego przybliżenia; może uda się znaleźć alternatywne wartości $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$, które dadzą lepsze dopasowanie. Wymaga to zapoznania się z różnymi technikami estymacji dla rozkładów Gamma.

Wnioskując, rozkład Gamma nie daje idealnego przybliżenia dla każdego innego rozkładu, ale jest wysoce elastyczny i szacowane parametry mogą być łatwo obliczane. Co więcej, rozkład Gamma może być łatwo wykorzystany do określania punktu ponownego zamawiania kiedy czas realizacji jest stochastyczny.

5. Określanie punktu ponownego zamawiania kiedy czas realizacji jest stochastyczny

Załóżmy, że określiliśmy $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ dla rozkładu dziennego popytu i prawdopodobieństwa dla każdej zmiany czasu realizacji.

Oznaczmy prawdopodobieństwo, że czas realizacji jest t-dniowy jako $P(t)$; $t = m,\ldots,n$.

Rozkład warunkowy popytu, kiedy czas realizacji jest t dni będzie rozkładem Gamma ($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$). Stopień ilościowej realizacji zamówień jest miarą obsługi. Obliczamy docelowy poziom niedoborów (*DPN*), który zapewni wymagany stopień ilościowej realizacji zamówień:

$$DPN = Q(1 - FR), \tag{11}$$

gdzie Q jest wielkością zamówienia, a FR wymaganym stopniem ilościowej realizacji zamówień w postaci ułamka. Oczekiwana liczba niedoborów w losowym czasie realizacji (oznaczona jako $EPN(R)$) jest średnią ważoną niedoborów dla każdego warunkowego rozkładu i jest funkcją punktu ponownego zamawiania R.
Możemy obliczyć oczekiwaną liczbę niedoborów $E(R\,t\hat{\alpha},|\hat{\beta})$ dla każdego warunkowego rozkładu, wykorzystując (10) i potem obliczamy $EPN(R)$ jako:

$$EPN(R) = \sum_{t=n}^{m} P(t) \cdot E(R|t\ \hat{\alpha}, \hat{\beta}). \tag{12}$$

Oczekiwana liczba niedoborów dla każdego rozkładu warunkowego rozkładu zmniejsza się ciągle i monotonicznie wraz ze wzrostem od zerowego punktu ponownego zamawiania. Ponieważ $EPN(R)$ jest średnią ważoną rozkładu warunkowego, to również zmniejsza się ciągle i monotonicznie od średniego popytu w czasie realizacji do zera, wraz ze wzrostem punktu ponownego zamawiania. W konsekwencji istnieje jakiś punkt ponownego zamawiania, który daje docelowy poziom niedoborów. Przez iteracyjne dostosowywanie R, aż $EPN(R)$ zbliży się do DPN, możemy otrzymać pożądany stopień ilościowej realizacji zamówień.
Problemem jest więc, aby:

$$\underset{R}{minimum} |EPN(R) - DPN|, \tag{13}$$

gdzie minimalizacja jest dobra, jeżeli wartość bezwzględna jest mniejsza niż pierwotnie zdefiniowany czynnik zbieżności.
Po pierwsze, musimy sprawdzić, czy zerowy punkt ponownego zamawiania daje zadowalający poziom obsługi. Jeżeli pożądany stopień ilościowej realizacji zamówień jest raczej niski albo jeżeli istnieje prawdopodobieństwo zerowego popytu w czasie realizacji, jest możliwe, że oczekiwane niedobory dla $R = 0$ mogą przekroczyć obrany cel. Jeżeli nie; zaczynamy dopasowywać R, dążąc do wyznaczenia minimalnej wartości R. Zwykle, aby znaleźć minimum nieliniowej funkcji, określa się iteracyjnie:

a) w którym kierunku zmienić zmienne,
b) jak obrać krok iteracji.

Jako startową wartość dla R wykorzystujemy przeciętny popyt podczas czasu realizacji i określamy startowe minimum (MIN) i maksimum (MAX) wartości R. W trakcie analizy MIN będzie rosło, a MAX malało.

Rozpoczynamy od MIN = 0 i ustalamy MAX tak duże, aby optymalne R nie było większe, ale nie tak duże, aby wymagało dużej liczby iteracji. Jako startowe MAX obierzmy dziesięciokrotność średniego popytu dla najdłuższego czasu realizacji.

Kierunek i krok iteracji są określone jako:

Przypadek I: Jeżeli $EPN(R_i) > DPN$; R_{i+1} musi być zwiększone, aby zmniejszyć liczbę niedoborów. Wiemy, że obecne R_i jest dolną granicą przedziału dla optymalnego punktu ponownego zamawiania. Podstawiamy więc:

$$R_{i+1} \leftarrow \frac{(R_i + MAX)}{2}; \tag{14}$$

i ponownie obliczamy $EPN(R_{i+1})$.

Przypadek II: Jeżeli $EPN(R_i) < DPN$; musi być zmniejszone, ponieważ mamy zbyt mało niedoborów. Nie chcemy redukować R_{i+1} do poprzedniej wartości, ponieważ wiemy, że R_{i+1} nie był optymalny. Wiemy także, że obecne R_i jest górną granicą przedziału dla optymalnego punktu ponownego zamawiania. Podstawiamy wiec:

$$R_{i+1} \leftarrow \frac{(R_i + MIN)}{2}; \; MAX \leftarrow R_i \tag{15}$$

i ponownie obliczamy. Kontynuujemy poprawianie punktu ponownego zamawiania tak długo, aż wartość bezwzględna różnicy $EPN(R)$ i DPN będzie mniejsza od parametru zbieżności. Ponieważ $EPN(R)$ zmniejsza się ciągle i monotonicznie wraz ze wzrostem R procedura ta będzie zmierzać do docelowego poziomu braku zapasów[12].

Zakończenie

Elastyczność rozkładu Gamma sprawia, że jest to idealne narzędzie do modelowania dziennego popytu ze stochastycznym czasem realizacji zamówienia. Nigdy nie osiągniemy całkowitej pewności i przewidywalności popytu i czasu realizacji zamówienia w łańcuchach dostaw, ale możemy mieć nad nimi kontrolę.

[12] J.E. Tyworth, *Modeling transportation-inventory tradeoffs in stochastic setting*, „Journal of Business Logistics" 13, no. 2, 1992.

Kluczem jest minimalizowanie ogólnego poziomu niepewności, wszędzie tam gdzie to możliwe w łańcuchu dostaw.

Bibliografia

Z. Sarjusz-Wolski, *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2000

J.J. Cole, E.J. Bardi, C.J. Langley Jr., *Zarządzanie logistyczne*, PWE, Warszawa 2002

S. Krzyżaniak, *Podstawy zarządzania zapasami w przykładach*, ILiM, Poznań 2002

M. Christopher, *Logistyka i zarządzanie łańcuchem podaży*, Wydawnictwo Profesjonalnej Szkoły Biznesu, Kraków, 1998

T.A. Burgin, *The Gamma Distribution and Inventory Control*, „Operational Research Quaterly" 26, no. 3; 1975

U. Bagchi, J.C. Hayya, C.H. Chu, *The effect of lead time variability: The case of independent demand*, „Journal of Operations Management" 6, no. 2, 1986

J.E. Tyworth, *Modeling transportation-inventory tradeoffs in stochastic setting*, „Journal of Business Logistics" 13, no. 2, 1992

W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1993

Dorota Kiersk-Królikowska

Stochastic time of realizing orders and the level of secure stock

Summary

Stock management in companies operating in today's economic environment is a real challenge connected with the choice of a given strategy from the whole range of possible solutions. As the process of making decisions about stocks is becoming more and more complex, firms exert a bigger and bigger pressure on such shaping of their logistic systems which will enable the firms to effectively manage their stocks and reduce costs with a simultaneous improvement of customer service. Ensuring the proper level of customer service is the main objective of determining and maintaining of secure stock. The level of secure stock depends on average demand and its fluctuations in the period when an order is realized. When we accept changeability of demand and changeability in duration of realizing an order, the knowledge of distribution of demand observed in the unit of time makes it possible to anticipate the probability of defined events related to the stock, above all the risk of shortages or the anticipated size of shortages in this period. In the economic practice the most frequent distributions comprise a normal distribution, Piosson' s distribution or exponential distribution. This paper shows the possibility of using Gamma distribution to model the demand in the changeable period of order realization.