Jerzy KOWALAK

PRZYCZYNEK DO INTERPRETACJI ZJAWISKA LOSOWOŚCI W EKONOMETRYCZNYCH MODELACH OPISOWYCH

1. Jednym z podstawowych elementów różniących ekonomię od nauk przyrodniczych czy technicznych jest charakter związków występujących między wielkościami będącymi przedmiotem badań tych nauk. O ile w naukach przyrodniczych lub technicznych mamy na ogół do czynienia z możliwością dokładnego (funkcyjnego) opisu kształtowania się jednych wielkości w zależności od wartości przyjmowanych przez inne zmienne, to w ekonomii – na co już na przełomie lat trzydziestych i czterdziestych zwrócili uwagę ekonomiści-ekonometrycy zajmujący się tą problematyką[1] – nie istnieją w zasadzie (poza związkami definicyjnymi, tożsamościowymi) tego rodzaju ścisłe zależności między wielkościami ekonomicznymi. Zmiany jednych wielkości ekonomicznych nie dają się na ogół ściśle określić poprzez zmiany innych wielkości. Bardzo przemawiającym przykładem może być tu np. różnica – pod tym względem – między zależnością, jaką fizycy ustalili między drogą, prędkością i czasem poruszającego się ruchem jednostajnym pojazdu:

$$s = v * t,$$

s – droga,
v – prędkość,
t – czas,

a funkcją – tzw. Cobba – Douglasa – wykorzystywaną przez ekonomistów dla opisu procesu produkcji (głównie w skali makro):

[1] Patrz np. [8].

$$P = \alpha * M^{\beta} * Z^{\gamma},$$

P – produkcja,
M – majątek,
Z – zatrudnienie,

Jeśli za pomocą pierwszej z tych zależności możliwe jest praktycznie idealne określenie przebytej przez pojazd drogi, jeśli tylko znane będą prędkość i czas ruchu tego pojazdu, to na podstawie drugiej zależności w zasadzie nigdy – co potwierdza praktyka – nie jest możliwe ścisłe (jednoznaczne) ustalenie poziomu produkcji przy znanym zaangażowaniu w procesie produkcji zasobów majątku i zatrudnienia (przy tych samych nakładach majątku i zatrudnienia – nawet w bardzo zbliżonych warunkach produkcyjnych – może być obserwowany różny poziom produkcji).

Przyczyny przedstawionej wyżej różnicy między zależnościami fizycznymi i ekonomicznymi ekonometrycy wyjaśniają wpływem, jaki na kształtowanie się jednej wielkości ekonomicznej ma kształtowanie się bardzo dużej liczby innych zmiennych. Dla przykładu – na kształtowanie się poziomu produkcji wpływ mają nie tylko wielkość majątku i zatrudnienia, ale również wiele innych wielkości, których praktycznie nie potrafimy nawet wszystkich wskazać. Poza tym na kształtowanie się poziomu produkcji – jak również innych wielkości ekonomicznych – wpływ mogą mieć różnego rodzaju wielkości pozaekonomiczne (np. pewne czynniki czysto społeczne), co do których nawet trudno określić możliwość ich pomiaru.

Czynnikiem powodującym niejednoznaczność opisu zmian jednych wielkości poprzez zmiany innych jest również niepewność co do postaci analitycznej związku, jaki między nimi zakładamy. To, że zależność np. poziomu produkcji od innych wielkości ekonomicznych ma charakter potęgowy – jest tylko założeniem przyjętym na gruncie określonej teorii produkcji.

Z wszystkiego, co dotychczas powiedziano, wynikać musi, że zależności między wielkościami ekonomicznymi – przy obecnym stanie wiedzy – nie mają charakteru czysto funkcyjnego. Jeżeli zaś zależności te nie mają charakteru funkcyjnego – to jedyne co pozostaje, to przyjęcie, że mają one charakter zależności stochastycznej (losowej).

2. Losowy charakter zależności ekonomicznych ekonometrycy starają się uwzględnić poprzez uzależnienie kształtowania się jednych wielkości ekonomicznych nie tylko od innych wielkości ekonomicznych, ale także od pewnej – wymagającej osobnej identyfikacji – wielkości losowej[2]. Zależność ekonomiczna przyjmuje w związku z tym ogólnie postać:

[2] Patrz np. [3], [4].

$$Y = f(X, \xi; \alpha)$$

Y – zmienna objaśniana
X – zmienne objaśniające (wektor)
α – parametry (wektor)
ξ – wielkość losowa

Wielkość ξ wyrażać ma wpływ, jaki na kształtowanie się wielkości Y wywierać mogą wszystkie wielkości (na ogół zdeterminowane, choć nie koniecznie)[3] nie uwzględnione jako zmienne objaśniające X, a także ewentualną nieścisłość co do przyjętej postaci analitycznej zależności f.

Jedną z najczęściej przyjmowanych postaci zależności między wielkościami ekonomicznymi jest zależność liniowa z addytywnie nakładającym się składnikiem losowym ξ, tzn. zależność:

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_k X_k + \xi$$

Związane jest to z faktem, że następnym krokiem – po przyjęciu (na ogół wstępnym) określonej postaci analitycznej zależności ekonomicznej – jest określenie liczbowych wartości parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tej zależności. W ekonomii – w odróżnieniu od nauk przyrodniczych – nie jest to oczywiście możliwe na drodze laboratoryjnego eksperymentu czy doświadczenia (trudno bowiem wyobrazić sobie prowadzenie eksperymentów na żywym organizmie gospodarki czy nawet przedsiębiorstwa). Z konieczności trzeba więc poprzestać na przyjęciu jako liczbowych wartości parametrów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – pewnych ocen (oszacowań) tych parametrów, których może dostarczyć statystyka w oparciu na odpowiednio (na ogół losowo) wybranych obserwacjach wielkości $Y, X_1, X_2, \ldots, X_k$ – występujących w rozpatrywanej zależności.

3. Statystyka – ściśle analiza regresji i korelacji – najpełniej ma wypracowane metody szacowania parametrów zależności liniowych, np. klasyczna metoda najmniejszych kwadratów – powszechnie wykorzystywana – zarówno teoretycznie, jak i praktycznie – zaproponowana została dla przypadku szacowania parametrów zależności liniowych[4]. Teoretycznie – gdyż statystycznie najlepsze wyniki daje ona przy założeniu, że składnik losowy ξ ma rozkład normalny, a samą zależność można traktować jako zależność regresji liniowej.

Założenie dotyczące normalności składnika losowego jest na ogół (co potwierdzają badania ekonometryczne) możliwe do przyjęcia w przypadku zależności ekonomicznych. Z obserwacji bowiem otaczającego nas życia – w tym również gospodarki – można wnioskować, że zdecydowana więk-

[3] Patrz np. [3], [2].
[4] Patrz np. [6], [3].

szość zjawisk traktowanych jako zjawiska losowe, powstaje w wyniku sumowania się efektów dużej liczby innych – niezależnych od siebie – zjawisk. Z tzw. twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że tego typu wielkości – będące sumą dużej liczby niezależnych od siebie wielkości losowych – mają rozkład normalny bądź bardzo zbliżony do rozkładu normalnego.

Warto jeszcze dodać, że również od strony czysto analitycznej realna możliwość uzyskania wzorów matematycznych dostarczających ocen parametrów w oparciu na obserwacjach empirycznych istnieje również tylko w przypadku zależności liniowych. W przypadku innej postaci zależności wzory te przyjmują bardzo skomplikowaną postać, która praktycznie uniemożliwia ich wykorzystanie – niezależnie od środków numerycznych (obliczeniowych), jakimi dzisiaj dysponujemy.

Wszystko co powyżej powiedziano nie oznacza, że nie dysponujemy możliwościami szacowania parametrów innych – niż liniowe – zależności. W bardzo wielu przypadkach możliwe jest to niejako pośrednio, poprzez wstępne przekształcenie – jedną z istniejących metod – interesującej nas zależności do postaci zależności liniowej i następnie oszacowanie parametrów zależności uliniowionej (przekształconej). Trzeba jednak zauważyć, że tak uzyskane oszacowania teoretycznie nie muszą być identyczne z oszacowaniami, jakich dostarczyłaby klasyczna metoda najmniejszych kwadratów bez uprzedniego przekształcenia szacowanej zależności do postaci liniowej.

4. Jak już powiedziano – składnik losowy ξ ma odzwierciedlać wpływ, jaki na wielkość Y wywierają wszystkie inne – nie uwzględnione w zależności – wielkości. Istnieją jednak postacie modeli ekonometrycznych, w których tylko taka interpretacja wielkości losowej wydaje się niewystarczająca albo przynajmniej bardzo trudna do przyjęcia. Jednym z takich modeli jest np. model przepływów międzygałęziowych w gospodarce zamkniętej, czyli tzw. model Leontiewa. W literaturze ekonometrycznej model ten można często spotkać w postaci[5]:

$$(I - A) * x(k) = B * [x(k+1) - x(k)] + c(k) + \xi(k)$$

gdzie:

A – macierz współczynników nakładów bieżących,

$x(k)$, $c(k)$ – odpowiednio wektory produkcji globalnej i konsumpcji poszczególnych sektorów w dyskretnych momentach czasu k,

$\xi(k)$ – składnik losowy,

$B * [x(k+1) - x(k)] = i(k)$ – wektor inwestycji,

[5] Patrz np. [7].

B – macierz przepływów inwestycyjnych,
k – dyskretne momenty czasu.

Jeżeli potraktuje się tę zależność tylko jako czystą równość bilansową, to trudno interpretować tutaj wprowadzony w niej składnik losowy $\zeta(k)$ jako zakłócenie losowe – w czystym bilansie nie może, a w każdym razie nie powinno być na to miejsca. Trudno też znaleźć dla niego inną interpretację.

Zupełnie inaczej – jak się wydaje – sytuacja wygląda w przypadku modelu bilansowego dotyczącego tzw. gospodarki otwartej, a więc uwzględniającego – jako jeden ze swoich składników – saldo handlu zagranicznego. Model ten ma postać[6]:

$$(I - A)* x(k) = B*[x(k+1) - x(k)] + c(k) + e(k)$$

gdzie:
$e(k) = e_{exp}(k) - e_{imp}(k)$ – saldo handlu zagranicznego w momencie k.

Saldo handlu zagranicznego można (a nawet trzeba) traktować – w odróżnieniu od innych wielkości występujących w modelu – jako wielkość, na której kształtowanie się nie mamy pełnego wpływu – jej zmiany w czasie mogą być w pewnym zakresie zależne nie tylko od naszych decyzji. Oznacza to, że jeżeli w określonych momentach czasu k przewidywalibyśmy np. kształtowanie się salda handlu zagranicznego na poziomie $e^p(k)$, to powinniśmy się liczyć z ewentualnym odchyleniem rzeczywistej jego wielkości e(k) od przewidywanej $e^p(k)$ o wielkość losową np. $\xi(k)$. Zatem rzeczywiste saldo handlu zagranicznego będzie miało postać[7]:

$$e(k) = e^p(k) + \xi(k).$$

Oczywiście, odchylenie rzeczywistego od przewidywanego salda handlu zagranicznego wywoła również – pośrednio – odchylenie rzeczywistej wielkości produkcji $x(k)$ i konsumpcji $c(k)$ od wielkości przewidywanych $x^p(k)$ oraz $c^p(k)$. Zapiszemy je w postaci:

$$x(k) = x^p(k) + y(k), \qquad c(k) = c^p(k) + u(k)$$

gdzie:
$y(k)$, $u(k)$ – odchylenia produkcji oraz konsumpcji rzeczywistej od zakładanej.

Uwzględniając powyższe oznaczenia i dokonując odpowiednich przekształceń, możemy teraz model przepływów międzygałęziowych w gospodarce otwartej przepisać w postaci:

[6] Patrz np. [2].
[7] Patrz np. [5].

$$y(k+1) = F*y(k) + G*u(k) + G*\xi(k)$$

gdzie:

$$F = B^{-1}*\left[(I-A)+B\right], \qquad G = -B^{-1}.$$

W tak skonstruowanej zależności składnik losowy $\xi(k)$ ma – jak to już wcześniej powiedziano – interpretację nie tylko jako bliżej nieokreślone zakłócenie losowe, ale jako odchylenie losowe rzeczywistego salda handlu zagranicznego od salda zakładanego (przewidywanego), z którym realnie należy się liczyć i uwzględniać w konstruowanym modelu przepływów międzygałęziowych. Osobnym problemem są oczywiście probabilistyczne własności tego odchylenia.

5. Następny problem pojawia się wówczas, gdy w przypadku wielkości ekonomicznych rozwijających się w czasie – chcemy określić ich wartość w przyszłych momentach czasu. W przypadku nauk przyrodniczych istnieje możliwość dokładnego przewidywania rozwoju wielkości w czasie na drodze ekstrapolacji funkcji opisującej jej rozwój, to w przypadku wielkości ekonomicznych – co potwierdza niemal każda obserwacja – określenie ich przyszłych wartości wiąże się z dużym stopniem niepewności.

Dlatego też również w przypadku opisu rozwoju wielkości ekonomicznych w czasie wykorzystywana jest ogólnie zależność postaci:

$$Y_t = f(t, \xi_t; \alpha)$$

gdzie:

t – czas,
ξ_t – wielkość losowa,
α –parametry zależności.

Określenie przyszłej wartości wielkości ekonomicznej na podstawie powyższej zależności z konieczności możliwe jest tylko w postaci oszacowania (prognozy) tej wielkości, która może się realizować tylko z określonym – na ogół z góry założonym – prawdopodobieństwem. Nie jest natomiast możliwe – jak to ma miejsce w zależnościach występujących np. w fizyce – określenie przyszłej wielkości na drodze prostej ekstrapolacji. I chociaż takich zabiegów prostej ekstrapolacji w odniesieniu do wielkości ekonomicznych również się dokonuje – to należy sobie wyraźnie uświadomić, że w przypadku ciągłego rozkładu prawdopodobieństwa tej wielkości (a z takimi na ogół mamy do czynienia) nie można się spodziewać dokładnej realizacji takiej prognozy – jest to teoretycznie niemożliwe.

Warto jeszcze dodać, że dla celów określenia przyszłej wartości wielkości ekonomicznej coraz częściej wykorzystywane są metody oparte na

założeniu, że przebieg tej wielkości w czasie jest realizacją procesu losowego[8]. Przyjmuje się przy tym, że między realizacjami tego procesu dla kolejnych momentów czasu występuje określona zależność – od najprostszej sytuacji, w której kolejna realizacja zależna jest tylko od bezpośrednio ją poprzedzającej – do sytuacji w której na realizację wielkości w określonym momencie czasu wpływ mają jej realizacje w wielu momentach wcześniejszych.

Tego rodzaju założenie jest, np. wykorzystywane dla prognozowania wielkości interpretowanych jako stany wewnętrzne określonego systemu dynamicznego, których rozwój w czasie opisać można zależnością podobną do tej, jaka występuje w przypadku modelu przepływów międzygałęziowych. W odniesieniu do takich zależności istnieją procedury umożliwiające tzw. prognozowanie krokowe, opierające ocenę przyszłej wartości stanu wewnętrznego tylko na aktualnie obserwowanej wartości na wyjściu systemu[9], a nie każdorazowo na wszystkich obserwacjach poprzednich – co jest charakterystyczne dla prognozowania za pomocą prostej funkcji czasu z nałożonym elementem losowym. Daje to, oczywiście, znaczne uproszczenia procedur numerycznych związanych z problemem prognozowania.

6. Podsumowując należy wyraźnie zaznaczyć, że celem prezentowanej publikacji było możliwie szerokie naświetlenie zjawiska losowości, które powinno być uwzględnione w toku budowy modeli współzależności występujących między wielkościami ekonomicznymi. Nie wchodzono więc tutaj świadomie w szczegóły związane z problematyką szacowania parametrów zależności ekonomicznych i prognozowaniem, gdyż z konieczności musiałoby to stanowić treść obszernej monografii.

Dodajmy jeszcze, że – niezależnie od tego, co powiedziane zostało na początku – zjawisko losowości coraz częściej pojawia się również w badaniach przyrodniczych, a zwłaszcza technicznych (np. w badaniach związanych ze starzeniem się materiałów). Uświadomiono sobie już wyraźnie, że każdy matematyczny opis badanych związków i zależności jest tylko pewnym ich modelem – a nie idealną ich postacią.

Różnica między modelami, dzisiaj już klasycznymi, przyjętymi w technice czy fizyce oraz modelami wypracowanymi w ekonomii leży w tym, że w fizyce dało się wypracować – między innymi dzięki możliwościom prowadzenia doświadczeń laboratoryjnych – modele opisujące rzeczywistość bardzo dokładnie (lub wiarygodnie), a w ekonomii mamy – jak dotąd – do czynienia z modelami opisującymi rzeczywistość ekonomiczną mniej dokładnie (lub mniej wiarygodnie).

[8] Patrz np. [3], [9], [1].
[9] Patrz np. [5].

Literatura

[1] G. E. P. Box, G. M. Jenkins: *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa, 1983
[2] Z. Czerwiński Z: *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, Warszawa 1972
[3] A. S. Goldberger: *Teoria ekonometrii*, PWE, Warszawa 1972
[4] B. Guzik, W. Jurek: *Ekonometria z zadaniami*, AE Poznań, 1993
[5] J. Kowalak.: *Sterowanie statystycznie optymalne w ekonometrycznych modelach wzrostu*, AE Poznań 1993
[6] C. R. Rao: *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982
[7] O. Starzeński: *Ekonometryczne modele nakładów i wyników*, SGPiS, Warszawa, 1976
[8] J. Tinbergen: *An Econometric Approach to Business Cycle Problems*, Paryż 1937
[9] Z. Zieliński, L. Talaga: *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa 1986