Krzysztof PIASECKI
Zbigniew ŚWITALSKI

ROZMYTE RELACJE PREFERENCJI W SYSTEMACH WSPOMAGANIA DECYZJI WRAZ Z ANALIZĄ STATYSTYCZNĄ

Wstęp

W klasycznej „podręcznikowej" teorii ekonomii zakłada się, że preferencje konsumenta dadzą się przedstawić za pomocą binarnej, przechodniej i spójnej relacji preferencji. Jest to założenie modelowe, umożliwiające eleganckie rozwinięcie teorii zachowania się konsumenta na bazie funkcji użyteczności i krzywych (map) objętości. Często jednak zauważa się, że w rzeczywistej sytuacji decyzyjnej przy ocenie preferencji lub dokonywaniu wyboru przez konsumenta (decydenta) preferencje nie są jasno i precyzyjnie określone, a co więcej, mogą być niestabilne i podlegać fluktuacjom [17]. Może to wynikać między innymi ze złożoności rozpatrywanych wariantów decyzyjnych (jeśli na przykład konsument chciałby określić swoje preferencje w stosunku do dwóch wiązek dóbr, z których każda składa się z kilkunastu lub kilkudziesięciu dóbr) lub też z niepewności co do konsekwencji dokonania, takiego czy innego wyboru. Wiadomo też, na podstawie badań eksperymentalnych, że preferencje określane w „laboratorium" przez rzeczywistych decydentów mogą być nieprzechodnie [4].

W latach pięćdziesiątych pojawiły się próby tworzenia teorii preferencji na bazie tzw. relacji probabilistycznych (zob. [8], [14]). Za pomocą tego rodzaju relacji można modelować niepewność zawartą w procesie decyzyjnym. Jednakże oszacowanie odpowiednich prawdopodobieństw jest dosyć trudne [4].

Innym sposobem bardziej realistycznego niż w klasycznej teorii konsumenta opisu preferencji jest wykorzystanie tzw. relacji rozmytych.

Relacje rozmyte wprowadzone na bazie tzw. zbiorów rozmytych przez L. A. Zadeha [19] miały w założeniu modelować sytuacje, w których trudno jednoznacznie przypisać niektórym parom (A, B) (z danego uniwersum par) stwierdzenia postaci „A jest w relacji R z B" („A jest większe od B", „A jest lepsze od B",

„A jest podobne do B" itd.), można natomiast przypisywać im pewne liczby (wagi), $R(A, B)$, $0 \leq R(A, B) \leq 1$, charakteryzujące stopień, w jakim A jest w relacji R z B (stopień prawdziwości zdania „A jest w relacji R z B").

Od końca lat siedemdziesiątych intensywnie badano rozmyte relacje preferencji (zob. [6]), przy czym na ogół były to analizy teoretyczne, w których skupiano się na studiowaniu różnych własności takich relacji i ich konsekwencji. Jednym z często podejmowanych problemów był problem znalezienia najlepszych wariantów (lub uporządkowania zbioru wariantów) w sytuacji, gdy preferencje w tym zbiorze opisane są za pomocą relacji rozmytych (zob. [2], [13], [12]). Badano też konsekwencje przyjęcia różnych założeń dotyczących przechodniości relacji rozmytych. Często przyjmowanym założeniem jest założenie o tzw. max-min przechodniości relacji rozmytej (zob. [6]). Wiele innych rodzajów przechodniości ma swe źródło w teorii relacji probabilistycznych (zob. [9]).

W wielu konstruowanych ostatnio systemach wspomagania decyzji wykorzystuje się relacje rozmyte do opisu preferencji decydenta (decydentów) uczestniczącego (uczestniczących) w danym procesie decyzyjnym (np. systemy ELECTRE III, PROMETHEEE, BIPOLAR, zob. [16], [3], [7].

W referacie przedstawiono wyniki badań ankietowych, w których zbadano zgodność różnych uporządkowań wariantów decyzyjnych otrzymanych na podstawie macierzy rozmytych preferencji z uporządkowaniem przedstawionym przez respondentów na subiektywnej skali wartości, a także zbadano, w jakim stopniu preferencje te spełniają różne własności przechodniości.

1. Relacje rozmyte

Niech $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ będzie skończonym zbiorem wariantów możliwych do wyboru w pewnej sytuacji decyzyjnej. Rozmytą relacją preferencji będziemy nazywali funkcję $R(A_i, A_j)$, która każdej parze różnych wariantów (A_i, A_j) przyporządkowuje liczbę $R(A_i, A_j)$ spełniającą warunek $0 \leq R(A_i, A_j) \leq 1$ i interpretowaną jako stopień przewagi wariantu A_i nad A_j. Zakładamy, że warunek $R(A_i, A_j) = 1$ oznacza dla decydenta zdecydowaną przewagę A_i nad A_j, natomiast warunek $R(A_i, A_j) = 0{,}5$ równoważność wariantów A_i i A_j (z punktu widzenia preferencji decydenta). Zakładamy, że relacja R jest „ipsodualna" (zob. [15]), tzn.

$$R(A_i, A_j) + R(A_j, A_i) = 1 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Oznacza to, że warunek $R(A_i, A_j) = 0$ jest równoważny stwierdzeniu, że A_j zdecydowanie przeważa nad A_i. Liczba $R(A_i, A_j)$ mierzy „intensywność" prefe-

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu

rencji, tzn. liczby $R(A_i, A_j)$ nieco większe od 0,5 oznaczają, że A_i jest „nieco lepsze" od A_j, a liczby $R(A_i, A_j)$ bliskie 1 oznaczają „dużą przewagę A_i nad A_j. Liczby $R(A_i, A_j)$ są subiektywnymi ocenami decydenta, za pomocą których może on przedstawiać na skali liczbowej [0, 1] swoje preferencje (ze względu na warianty A_i i A_j).

Dla danej rozmytej relacji preferencji możemy konstruować różne nierozmyte uporządkowania zbioru X, które mogą pomóc decydentowi w podjęciu ostatecznej decyzji (wskazują na wariant najlepszy z punktu widzenia jego preferencji, drugi w kolejności itd.). Będziemy rozważać trzy sposoby takiego uporządkowania:

1) Uporządkowanie za pomocą funkcji Orłowskiego [13] – w przypadku relacji ipsodualnych można je przedstawić następująco:

$$\text{(M)} \quad A_i \geq A_j \Leftrightarrow \min_{k \neq i} R(A_i, A_k) \geq \min_{k \neq j} R(A_i, A_k).$$

2) Uporządkowanie za pomocą sumowania stopni preferencji:

$$\text{(S)} \quad A_i \geq A_j \Leftrightarrow \sum_{k \neq i} R(A_i, A_k) \geq \sum_{k \neq j} R(A_j, A_k).$$

3) Uporządkowanie według reguły Blina i Whinstona [2]. Poszukujemy takiego liniowego porządku L (relacji przechodniej, asymetrycznej i spójnej) w zbiorze X, aby wartość

$$\sum_{(A_i, A_j) \in L} R(A_i, A_j)$$

była maksymalna.

Będziemy rozważać również następujące własności przechodniości dla relacji R (A_i, A_j, A_k są dowolnymi elementami zbioru X, warunek $W(A_i, A_j, A_k)$ oznacza, że $R(A_i, A_j) \geq 0{,}5$ i $R(A_j, A_k) \geq 0{,}5$):

(1) Słaba przechodniość:

$$W(A_i, A_j, A_k) \Rightarrow R(A_i, A_k) \geq R(A_i, A_j) + R(A_j, A_k) - 1.$$

(2) Przechodniość (słaba F-przechodniość u Nakamury [10], słaba stochastyczna przechodniość u Luce'a i Suppesa [9]:

$$W(A_i, A_j, A_k) \Rightarrow R(A_i, A_k) \geq 0{,}5,$$

(3) Min-przechodniość (umiarkowana F-przechodniość u Nakamury [10], umiarkowana stochastyczna przechodniość u Luce'a i Suppesa [9]:

$$W(A_i, A_j, A_k) \Rightarrow R(A_i, A_k) \geq \min\{R(A_i, A_j), R(A_j, A_k)\},$$

(4) α-przechodniość ($\alpha \in [0, 1]$, zob. [1]):

$$W(A_i, A_j, A_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(A_i, A_k) \geq \alpha \max\{R(A_i, A_j), R(A_j, A_k)\} + (1 - \alpha) \min\{R(A_i, A_j), R(A_j, A_k)\},$$

(5) Max-przechodniość (silna stochastyczna przechodniość u Luce'a i Suppesa [9]:

$$W(A_i, A_j, A_k) \Rightarrow R(A_i, A_k) \geq \max\{R(A_i, A_j), R(A_j, A_k)\}.$$

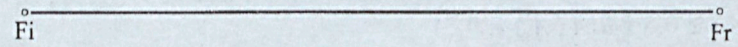
Łatwo można sprawdzić, że prawdziwe są implikacje:

$$(5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2), \quad (3) \Rightarrow (1).$$

Natomiast własności (l) i (2) nie są związane żadną implikacją.

2. Opis eksperymentu

Eksperyment przeprowadzono w dwóch grupach studenckich (35 studentów pierwszego roku i 9 studentów drugiego roku Wydziału Zarządzania AE w Poznaniu). Studenci zostali poproszeni o porównanie 5 wariantów, a mianowicie potencjalnych możliwości wyjazdu na wakacje do jednego z następujących krajów: Finlandia, Francja, Niemcy, Szkocja, Włochy (oznaczanych dalej symbolami: Fi, Fr, N, Sz, W). Porównywanie dla każdej pary wariantów było dokonywane (podobnie jak w eksperymentach Noworola [11]) za pomocą odcinka o długości 10 cm, na którym respondent zaznaczał, za pomocą krzyżyka, punkt najbardziej odpowiadający jego preferencjom. Przykładowy odcinek służący do porównań miał postać jak na rysunku l.

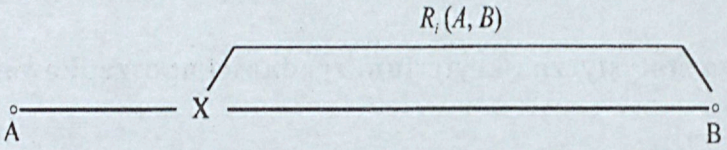


Rys. l. Przykładowy odcinek służący do oceny preferencji rozmytych

Im bliżej końca Fi znajdowałby się zaznaczony punkt, tym większa przewaga Finlandii nad Francją (krzyżyk w punkcie Fi oznacza „zdecydowaną przewagę"), a im bliżej końca Fr, tym większa przewaga Francji nad Finlandią. Studentów poproszono też (po zakończeniu porównań) o umieszczenie poszczególnych krajów (tzn. zaznaczenie punktów odpowiadających poszczególnym krajom) na jednej wspólnej skali (umieszczonej na osobnej kartce), przy czym położenie danego kraju powinno odpowiadać jego atrakcyjności dla danego respondenta (im bliżej górnego końca skali – zob. rysunek 2 – tym bardziej dany kraj jest atrakcyjny, im bliżej dolnego końca, tym mniej atrakcyjny z punktu widzenia preferencji wyjazdowych danego studenta). Przykładowa odpowiedź mogła wyglądać jak na rysunku 2.



Rys. 2. Skala atrakcyjności



Rys. 3. Sposób pomiaru preferencji dla krajów A i B

Pomiary przeprowadzono w następujący sposób. Dla każdej pary krajów (A, B) i dla respondenta o numerze i zmierzono odległość (w milimetrach, z dokładnością do 1 mm) zaznaczonego na odcinku $\overline{AB}$ punktu od końca B i przyjęto tę liczbę (oznaczoną symbolem $R_i(A, B)$) za stopień przewagi kraju A nad krajem B (zob. rys. 3). Przewagi te były więc mierzone na skali [0, 100], a nie [0, 1], co zresztą – z punktu widzenia dalszych wywodów – nie ma żadnego znaczenia. Na skali atrakcyjności (na rys. 2) zmierzono odległość każdego kraju (np. kraju A) od końca skali i otrzymano liczby $U_i(A)$ („użyteczność" kraju A).

Na podstawie wartości $R_i(A, B)$ dla każdego respondenta obliczono wartość funkcji

$$M_i(A) = \min_{B \neq A} R_i(A, B)$$

oraz

$$S_i(A) = \sum_{B \neq A} R_i(A, B).$$

Funkcje M_i i S_i określają pewne uporządkowanie wariantów (oznaczane również przez M_i i S_i) w zbiorze $X = \{\text{Fi, Fr, N, Sz, W}\}$ dla i-tego respondenta, zgodnie z wzorami (M) i (S). Symbolem B_i będziemy oznaczać uporządkowanie w zbio-

rze X zgodne z regułą Blina i Whinstona (takich uporządkowań może być więcej niż jedno).

Dla każdego respondenta otrzymaliśmy więc na podstawie jego macierzy preferencji (wyznaczanej przez relację R_i) trzy różne uporządkowania wyjściowego zbioru wariantów.

Aby któreś z tych uporządkowań mogło być podstawą do podejmowania decyzji (aby na przykład odpowiednia reguła mogła być wbudowana w system wspomagania decyzji), powinno być ono możliwe do zaakceptowania przez decydenta, tzn. powinno być, przynajmniej „z grubsza", zgodne z wyobrażanym sobie przez decydenta ostatecznym uporządkowaniem wariantów. To wyobrażenie możemy utożsamić z uporządkowaniem U_i. Istotne jest więc zbadanie (za pomocą jakiejś charakterystyki liczbowej) zgodności uporządkowania U_i z uporządkowaniami M_i, S_i (tzn. uporządkowaniami wyznaczonymi przez odpowiednie funkcje) oraz B_i. W następnym punkcie zostały przedstawione wyniki analizy statystycznej zgodności uporządkowań M_i, S_i i B_i z uporządkowaniem U_i.

3. Analiza statystyczna kryterium zgodności uporządkowań

W pierwszym kroku badano – odrębnie dla każdego z respondentów – zgodność wyznaczonych przez niego uporządkowań. W tym celu – dla każdej z par porządków (M_i, U_i), (S_i, U_i) i (B_i, U_i) wyznaczono – mający rozkład beta – współczynnik W korelacji rangowej Kendala (zobacz Kendal [5]). Następnie współczynniki te wykorzystano do zweryfikowania – w przypadku każdej z powyższych par oddzielnie – hipotezy zerowej głoszącej brak zgodności uporządkowań i przeciwstawionej hipotezie alternatywnej stwierdzającej zgodność tych uporządkowań.

Pierwotnie weryfikacji tej dokonano na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$. Stwierdzono wtedy, że:

– porządki M_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 56,8 % respondentów;
– porządki S_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 2,3 % respondentów;
– porządki B_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 18,2 % respondentów.

Identyczne wnioskowanie powtórzono dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}10$. Stwierdzono wtedy, że:

– porządki M_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 84,1 % respondentów;
– porządki S_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 25,0 % respondentów;
– porządki B_i są zgodne z porządkami U_i w przypadku 72,7 % respondentów.

W świetle powyższego zestawienia można stwierdzić, że najbardziej godną rekomendacji do dalszego stosowania okazała się metoda Orłowskiego (porządek M_i). Zdecydowanie gorszą od dwóch pozostałych – z punktu widzenia kryterium

zgodności z porządkiem U_i - okazała się metoda addytywna (porządek S_i). Opisane testy statystyczne przeprowadzono przy wartościach parametrów $p = q = 0{,}75$ zastanego rozkładu beta współczynników korelacji rangowej. Dlatego nie można wykluczyć tego, że w omawianym wnioskowaniu statystycznym wielokroć popełniliśmy błąd drugiego rodzaju. Za takim przypuszczeniem przemawia to, że przy niewielkim zwiększeniu błędu pierwszego rodzaju i zmniejszeniu tym samym błędu drugiego rodzaju uzyskaliśmy radykalnie lepszą ocenę zgodności porządków B_i z adekwatnymi porządkami U_i.

Dążąc do polepszenia jakości wnioskowania statystycznego wyznaczono ponownie współczynniki W korelacji rangowej dla każdego z ciągów par

$$\{(M_i, U_i): i = 1, 2, \ldots, 44\},$$
$$\{(S_i, U_i): i = 1, 2, \ldots, 44\},$$
$$\{(B_i, U_i): i = 1, 2, \ldots, 44\}$$

w ten sposób, że każda z wymienionych par (X_i, U_i) (gdzie $X_i \in \{M_i, S_i, B_i\}$) została potraktowana jako powtórzenie obserwacji zgodności porządków X i U. Uzyskano tą drogą statystyki z rozkładem beta o wartości parametrów $p = q = 54{,}50$. Gwarantuje to, przez zmniejszenie błędu drugiego rodzaju przy zachowaniu wartości błędu pierwszego rodzaju, poprawę jakości wnioskowania statystycznego. Otrzymano następujące wartości współczynników korelacji rangowej:

dla metody Orłowskiego (porządek M) – 0,881;
dla metody addytywnej (porządek S) – 0,606;
dla metody Blina-Whinstona (porządek B) – 0,803.

Wszystkie trzy wymienione wartości statystyk dają podstawę do stwierdzenia, że badane metody wyznaczają uporządkowania zgodne z porządkiem wzorcowym. Z punktu widzenia tego kryterium wszystkie trzy metody okazują się godne rekomendacji do dalszego stosowania. Wyniki uzyskane w pierwszym etapie analizy statystycznej pozwalają jednak snuć obawy, że stosowanie metody addytywnej w przypadku małej liczby obiektów może prowadzić do uporządkowań niezgodnych z ogólnymi zapatrywaniami respondentów.

4. Przechodniość

Przedmiotem naszych zainteresowań były też czynniki wpływające na stopień spełniania przechodniości. Rozważano tutaj wpływ trzech czynników:

- respondent (czynnik A);
- para porównywanych obiektów (czynnik B);
- rodzaj przechodniości (czynnik C).

Dla każdej kombinacji poziomów czynników A, B, C wyznaczono wartość

$$y = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \sqrt{p},$$

gdzie

$$p = \frac{n(X, Y, Z)}{N(X, Y, Z)},$$

para (X, Y) – para porównywanych obiektów właściwa dla danego poziomu czynnika B;

$n(X, Y, Z)$ – liczba takich trójek obiektów, które są uporządkowane przez respondenta odpowiadającego poziomowi czynnika A i spełniają warunek przechodniości właściwy dla rozpatrywanego poziomu czynnika C;

$N(X, Y, Z)$ – liczba trójek obiektów ogółem.

Do zbadania wzajemnych zależności pomiędzy tak wyznaczonymi liczbami zastosowano trójczynnikową analizę wariancji (zob. [18]) dla modelu klasyfikacji krzyżowej bez replikacji. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Trójczynnikowa analiza wariancji

Czynnik	Średnia suma kwadratów	Stopnie swobody	Statystyka F	Poziom istotności
A	0,182	43	4,272	1,000
B	0,0246	9	0,576	0,000
C	34,2	4	804,021	1,000
$A \times B$	0,0218	387	0,513	0,000
$A \times C$	0,349	172	8,197	1,000
$B \times C$	0,225	36	5,297	1,000
Błąd	0,0425	1548		

Wyniki te pozwalają stwierdzić, że zmienność wywołana zmianami czynnika B (porównywane pary obiektów) jest mniejsza od zmienności losowej. W takich sytuacjach – zgodnie z założeniami analizy wariancji – zmienność pomiędzy poziomami czynnika B należy potraktować jako część zmienności losowej i włączyć do oceny błędu losowego. Prowadzi to w przypadku naszych badań statystycznych do prowadzenia dwuczynnikowej analizy wariancji dla modelu klasyfikacji krzyżowej. Replikacjami są tutaj poziomy pomijanego czynnika B (pary porównywanych obiektów). Uzyskane tą drogą wyniki zostały przedstawione w tabeli 2.

Zebrane w tabelach 1 i 2 wyniki pozwalają stwierdzić, że przy badaniu przechodniości rozpatrywanych w tej pracy empirycznych relacji można pominąć wpływ rodzaju porównywanych obiektów. Wpływ pozostałych czynników (zindywidualizowany opis relacji przez respondenta i rodzaj przechodniości) jest istot-

Tabela 2

Dwuczynnikowa analiza wariancji

Czynnik	Średnia suma kwadratów	Stopnie swobody	Statystyka F	Poziom istotności
A	0,182	43	4,355	1,000
C	34,2	4	819,489	1,000
$A \times C$	0,349	172	8,355	1,000
Błąd	0,0417	1980		

ny i współzależny. Z tej przyczyny nie może być pomijany w dalszych studiach nad własnościami empirycznych relacji.

Aby ustalić, które z własności przechodniości (1)-(5) są w największym stopniu spełniane przez analizowane preferencje, badano różne trójki wariantów postaci $\{X, Y, Z\}$ (razem jest ich dla danego zbioru 10). Mówimy, że trójka ta spełnia dany warunek przechodniości, jeśli relacja R ograniczona do zbioru $\{X, Y, Z\}$ spełnia ten warunek. Natomiast relacja R spełnia dla danego respondenta dany warunek przechodniości, jeśli wszystkie trójki spełniają ten warunek dla tego respondenta. Liczba trójek i liczba respondentów spełniających dany warunek przechodniości są przedstawione w tabeli 3 (uwzględniono tam α-przechodniość tylko dla $\alpha = 0,5$).

Tabela 3

Rozkład różnych rodzajów przechodniości w zbiorze trójek i w zbiorze respondentów

Rodzaj przechodniości	Liczba trójek	%	Liczba respondentów	%
Max-przechodniość	309	70,2	4	9,1
0,5-przechodniość	381	86,6	17	38,6
Min-przechodniość	412	93,6	25	56,8
Przechodniość	430	97,7	35	79,5
Słaba przechodniość	438	99,1	42	95,5

Z przedstawionych danych wynika, że jedynie słaba przechodniość jest własnością, którą spełniają praktycznie wszystkie trójki i praktycznie wszyscy respondenci (z wyjątkiem dwóch). Jeśli chodzi o przechodniość, to na ogół wszystkie trójki są przechodnie, ale aż co piąty respondent przedstawił preferencje nie przechodnie. Można też zauważyć, że własność max-przechodniości jest spełniona przez większość trójek, ale jednocześnie przez zdecydowaną mniejszość (około 9%) respondentów. Można powiedzieć, że na ogół trójki są max-przechodnie, ale jednocześnie na ogół każdy respondent przynajmniej dla jednej trójki wykazał preferencje, które nie są max-przechodnie.

Wnioski końcowe

Uporządkowania wyznaczane przez metody Orłowskiego, addytywną i Blina-Whinstona są – statystycznie rzecz ujmując – zgodne z porządkami wzorcowymi i z tego względu polecane do stosowania w przypadkach wyznaczania uporządkowań liniowych na podstawie macierzy relacji empirycznych.

Jeśli chodzi o przechodniość analizowanych relacji rozmytych, to na podstawie przeprowadzonego eksperymentu można wyciągnąć wniosek, że jedynie założenie o słabej przechodniości może być uprawnione jako dobrze opisujące preferencje rzeczywistych decydentów. Nie wyklucza to możliwości, że również na przykład przechodniości lub min-przechodniości mogą się okazać, między innymi na podstawie innych badań, założeniami możliwymi do przyjęcia. Natomiast wydaje się, że max-przechodniość jest własnością zbyt często nie spełnioną, aby mogła być przyjęta jako podstawa jakiegokolwiek modelu opisującego rzeczywiste preferencje decydentów.

Przy modelowaniu relacji preferencji nie należy też pomijać wpływu osoby decydenta na rodzaj spełnianej relacji.

Literatura

[1] **Basu K.**, Fuzzy Revealed Preference Theory, J. Econ. Theory 1984, 32.

[2] **Blin J. M., Whinston A. B.**, Fuzzy Sets and Social Choice, J. of Cybern. 1973, 3.

[3] **Brans J. P., Vincke Ph., Mareschal B.**, How to Select and How to Rank Projects: The PROMETHEE Method, Europ. J. of Oper. Res. 1986, 24.

[4] **Coombs C. H., Dawes R. M., Twersky A.**, Wprowadzenie do psychologii matematycznej, PWN, Warszawa 1977.

[5] **Kendal M. G.**, Rank Correlation Method, Charles Griffin, London 1955.

[6] **Kołodziejczyk W.**, Przechodnie relacje rozmyte i ich zastosowania, Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej 1990, nr 59.

[7] **Konarzewska-Gubała E.**, Wspomaganie decyzji wielokryterialnych, System BIPOLAR, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu1991, nr 551.

[8] **Luce R. D., Raiffa H.**, Gry i decyzje, PWN, Warszawa 1964.

[9] **Luce R. D., Suppes P.**, Preference, Utility and Subjective Probability, in: Handbook of Math. Psychology, vol. 3, Wiley, New York 1965.

[10] **Nakamura K.**, Preference Relations on a Set of Fuzzy Utilities as a Basis for Decision Making, Fuzzy Sets Syst. 1986, 20.

[11] **Noworol Cz.**, Analiza skupień w badaniach empirycznych, PWN, Warszawa 1989.

[12] **Nurmi H.**, Approaches to Collective Decision Making With Fuzzy Preference Relations, Fuzzy Sets Syst. 1981, 6.

[13] **Orlovsky S. A.**, Decision Making With a Fuzzy Preference Relation, Fuzzy Sets Syst. 1978, 1.
[14] **Quandt R. E.**, A Probabilistic Theory of Consumer Choice, Quart. J. of Econ. 1956, 70.
[15] **Roubens M.**, Some Properties of Choice Functions Based on Valued Binary Relations, Europ. J. of Oper. Res. 1989, 40.
[16] **Roy B.**, ELECTRE III, Un Algoritme de Classements..., Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationelle 1978, 20 (1).
[17] **Roy B.**, Wielokryterialne wspomaganie decyzji, WNT, Warszawa 1990.
[18] **Scheffe H.**, The Analysis of Variance, Wiley, New York 1959.
[19] **Zadeh L. A.**, Fuzzy Sets, Information and Control 1965, 8.