Marian Matłoka

CAŁKA Z ODWZOROWANIA ROZMYTEGO

1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie całki z odwzorowania rozmytego. Główny nacisk położono w pracy na zagadnienie istnienia całki z odwzorowania rozmytego. Z uwagi na ograniczenia objętościowe pracy zrezygnowano z przedstawienia własności zdefiniowanej całki. Na uwagę zasługuje fakt, że przedstawiona w pracy definicja całki jest całkowicie różna od propozycji Sugeno [12], Dubois i Prade [1,2], Klementa [6], Ralescu [10], Yagera [14], Zhao Ru-huai [15], Song Renminga [11] i Wanga [13]. Przedstawiona w pracy definicja całki jest uogólnieniem całki Riemanna.

2. Pojęcia podstawowe

W pracy pod pojęciem interwału rozumieć będziemy domknięty, ograniczony zbiór liczb rzeczywistych

$$[a,b] = \{ x: a \leqslant x \leqslant b \} \quad .$$

Interwały oznaczać będziemy dużymi literami alfabetu..I tak, jeżeli A oznacza interwał, to jego końce oznaczać będziemy przez $\underline{A}$ i $\overline{A}$, tzn. $A = [\underline{A}, \overline{A}]$.

Dwa interwały nazywać będziemy równymi, jeżeli odpowiednie końce tych interwałów będą równe. Ponadto będziemy mówić, że interwał A jest mniejszy lub równy od interwału B, $A \leqslant B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{A} \leqslant \underline{B}$ i $\overline{A} \leqslant \overline{B}$.

Sumę dwóch interwałów A i B definiować będziemy jako interwał

$$A + B = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}] \ ,$$

natomiast iloczyn jako interwał $A \cdot B$ o następujących końcach

$$\underline{A \cdot B} = \min (\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}) ,$$

$$\overline{A \cdot B} = \max (\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}) .$$

Odległość między interwałami A i B definiować będziemy jako liczbę $d(A,B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$.

W literaturze dotyczącej zbiorów rozmytych pod pojęciem liczby rozmytej rozumie się wypukły i normalny podzbiór rozmyty zawarty w zbiorze liczb rzeczywistych R.

Niech L(R) oznacza zbiór wszystkich liczb rozmytych w R takich, że dla dowolnej liczby rozmytej $X \in L(R)$

- X jest półciągła z góry,
- supp X jest zwarty.

Z przyjętych założeń wynika, że jeżeli $X \in L(R)$, to dla dowolnego $\alpha \in [0,1]$, X^{α} jest interwałem, gdzie

$$X^{\alpha} = \begin{cases} t: X(t) \geqslant \alpha & \text{dla} \quad \alpha \in (0,1] , \\ t: X(t) > 0 & \text{dla} \quad \alpha = 0 . \end{cases}$$

Zdefiniujmy teraz $D: L(R) \times L(R) \longrightarrow R_{+} \cup \{0\}$ w następujący sposób

$$D(X,Y) = \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} d(X^{\alpha}, Y^{\alpha}) ,$$

Zauważmy, że D jest metryką w L(R), [9].

W zbiorze L(R) wprowadźmy relację $\leqslant$ w sposób następujący:

$X \leqslant Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\alpha \in [0,1]$

$$X^{\alpha} \leqslant Y^{\alpha} .$$

Niech X oraz Y oznaczają dwie liczby rozmyte z L(R). Wtedy

1° Sumą liczb rozmytych X i Y nazywamy liczbę rozmytą X+Y taką, że
$\forall \alpha \in [0,1]$, $(X+Y)^{\alpha} = X^{\alpha} + Y^{\alpha}$, [4] ,

2° Iloczynem liczb rozmytych X i Y nazywamy liczbę rozmytą X·Y taką, że
$\forall \alpha \in [0,1]$, $(X \cdot Y)^{\alpha} = X^{\alpha} \cdot Y^{\alpha}$, [4] .

Z powyższej definicji wynika, że dla dowolnej liczby rozmytej $X \in L(R)$ i dla dowolnej liczby rzeczywistej $k \in R$, $k \cdot X$ jest liczbą rozmytą taką, że

$$(k \cdot X)(t) = \begin{cases} X\left(\frac{t}{k}\right) & \text{dla} \quad k \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \neq 0 \end{cases} \qquad \text{dla} \quad k = 0$$

$t \in R$.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{D}$ liczb rozmytych z L(R) jest ograniczony z góry (z dołu) jeżeli istnieje liczba rozmyta C taka, że dla dowolnego $X \in \mathcal{D}$, $X \leqslant C$ ($C \leqslant X$). Liczba rozmyta C nazywać się będzie odpowiednio liczbą górną (dolną) względem zbioru $\mathcal{D}$.

Liczbę rozmytą C nazywamy kresem dolnym zbioru $\mathcal{D}$, ozn. inf. $\mathcal{D}$, (kre-

sem górnym zbioru $\mathcal{D}$, ozn. sup $\mathcal{D}$), jeżeli C jest liczbą dolną zbioru (liczbą górną) i nie istnieje liczba rozmyta C' będąca liczbą dolną (liczbą górną) taka, że $C \lessdot C'$ ($C' \lessdot C$).

Niech $T \subset R$. Odwzorowanie $F: T \to L(R)$ nazywać będziemy odwzorowaniem rozmytym.

Odwzorowanie rozmyte F nazywamy ograniczonym z góry (ograniczonym z dołu) w zbiorze T jeżeli zbiór $\{F(t): t \in T\}$ jest odpowiednio ograniczony z góry (ograniczony z dołu).

Odwzorowanie rozmyte ograniczone z dołu i z góry nazywać będziemy ograniczonym.

Stąd wynika, że jeżeli F jest odwzorowaniem ograniczonym, to istnieją liczby rozmyte L i U takie, że $L \lessdot F(t) \lessdot U$ dla dowolnych $t \in T$.

3. Całka z odwzorowania rozmytego

Pod pojęciem podziału przedziału $[a,b]$ rozumieć będziemy skończony zbiór liczb $t_0, t_1, \ldots, t_n$ taki, że $a=t_0 \lessdot t_1 \lessdot \ldots \lessdot t_n=b$. Podział przedziału $[a,b]$ oznaczać będziemy przez $P = \{t_i: i = 0,1,\ldots,n\}$.

Niech F oznacza ograniczone odwzorowanie rozmyte określone w $[a, b]$. Zdefiniujmy

$$U_i(F) = \sup \{F(t): t \in [t_{i-1}, t_i]\} ,$$

$$L_i(F) = \inf \{F(t): t \in [t_{i-1}, t_i]\} .$$

a następnie

$$L(F,P) = \sum_{i=1}^{n} L_i(F) \cdot (t_i - t_{i-1}) ,$$

$$U(F,P) = \sum_{i=1}^{n} U_i(F) \cdot (t_i - t_{i-1}) .$$

Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a,b]$. Wtedy

$$\overline{\int_a^b} F = \sup \{L(F,P): P \in \mathcal{P}\}$$

oraz

$$\underline{\int_a^b} F = \inf \{U(F,P): P \in \mathcal{P}\} .$$

nazywamy odpowiednio całką dolną i górną odwzorowania F.

Niech $P = \{t_i: i=0,\ldots,n\}$ i $P' = \{t_i: i=0,\ldots,n\}$ oznaczają dwa podziały przedziału $[a,b]$, natomiast $P \subset P'$ oznacza, że każdy punkt t_i podziału P należy do P' .

Lemat. Jeżeli $P \subset P'$ to $L(F,P) \leqslant L(F,P')$ i $U(F,P') \leqslant U(F,P)$.

Dowód. Gdy $P=P'$ to lemat jest prawdziwy. Załóżmy, że $P \neq P'$ i $P \subset P'$. Niech t_j' będzie pierwszym punktem z P', który nie należy do P. Wtedy, dla pewnego k, $t_{k-1} < t_j' < t_k$ oznaczmy przez

$$P_1 = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_j', t_k, \ldots, t_n\},$$

$$L^{*}(F) = \inf \{F(t) : t \in [t_{k-1}, t_j']\}$$

oraz

$$L^{**}(F) = \inf \{F(t) : t \in [t_j', t_k]\}.$$

Z definicji $L_k(F)$ wynika, że $L_k(F) \leqslant L^{*}(F)$ oraz $L_k(F) \leqslant L^{**}(F)$. Dlatego

$$L_k(F) \cdot (t_k - t_{k-1}) =$$

$$= L_k(F) \cdot (t_j' - t_{k-1}) + L_k(F) \cdot (t_k - t_j') \leqslant$$

$$\leqslant L^{*}(F) \cdot (t_j' - t_{k-1}) + L^{**}(F) \cdot (t_k - t_j'),$$

a stąd

$$L(F,P) = \sum_{i=1}^{n} L_i(F) \cdot (t_i - t_{i-1}) \leqslant L_1(F) \cdot (t_1 - t_0) +$$

$$+ L_2(F) \cdot (t_2 - t_1) + \ldots + L_{k-1}(F) \cdot (t_{k-1} - t_{k-2}) +$$

$$+ L^{*}(F) \cdot (t_j' - t_{k-1}) + L^{**}(F) \cdot (t_k - t_j') +$$

$$+ L_{k+1}(F) \cdot (t_{k+1} - t_k) + \ldots + L_n(F) \cdot (t_n - t_{n-1}) =$$

$$= L(F,P_1).$$

Powtarzając to postępowania skończoną ilość razy możemy dodać do P wszystkie punkty z P', które do P nie należą i otrzymamy, że $L(F,P) \leqslant L(F,P')$. W podobny sposób można pokazać, że $U(F,P) \geqslant U(F,P')$.

Definicja. Odwzorowanie rozmyte F określone na $[a,b]$ nazywamy całkowalnym jeżeli F jest ograniczone na $[a,b]$ oraz

$$\underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F.$$

Jeżeli F jest całkowalne na $[a,b]$ to całkę z F od a do b, ozn. $\int_a^b F$, definiujemy w sposób następujący

$$\int_a^b F = \underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F.$$

Twierdzenie 3.1. Ograniczone odwzorowanie rozmyte F jest całkowalne na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział taki, że $D(U(F,P), L(F,P)) < \varepsilon$.

Dowód. Załóżmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ takie P istnieje. Wtedy z faktu, że

$$D(\underline{\int_a^b} F, \overline{\int_a^b} F) \leqslant D(U(F,P), L(F,P)) < \varepsilon$$

wynika, że $\underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F$ i F jest całkowalna na $[a,b]$. Załóżmy teraz, że F jest całkowalna na $[a,b]$. Wtedy $\underline{\int_a^b} F = \overline{\int_a^b} F = \int_a^b F$. Dlatego $\int_a^b F$ jest kresem górnym zbioru $\{L(F,P)\}$ i kresem dolnym zbioru $\{U(F,P)\}$. Stąd, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje P_1 takie, że

$$D(\int_a^b F, L(F,P_1)) < \varepsilon/2$$

i P_2 takie, że

$$D(U(F,P_2), \int_a^b F) < \varepsilon/2 .$$

Zatem

$$D(U(F,P_2), L(F,P_1)) \leqslant D(U(F,P_2), \int_a^b F) +$$

$$+ D(L(F,P_1), \int_a^b F) < \varepsilon .$$

Niech $P = P_1 \cup P_2$. Ponieważ $P_1 \subset P$ i $P_2 \subset P$ zatem

$$D(U(F,P), L(F,P)) \leqslant D(U(F,P_2), L(F,P_1)) < \varepsilon .$$

Twierdzenie 3.2. Dowolne odwzorowanie rozmyte ciągłe w $[a,b]$ ze względu na metrykę D jest całkowalne w $[a,b]$.

Dowód. Ponieważ F jest ciągłe to jest ograniczone na $[a,b]$. Oznacza to, że dla dowolnego podziału P, dla dowolnego $\alpha \in [0,1]$ istnieją t_i', $t_i'^{*} \in [t_{i-1}, t_i]$ i t_i'', $t_i''^{*} \in [t_{i-1}, t_i]$ takie, że

$$\underline{F(t_i')^{\alpha}} = \underline{L_i(F)^{\alpha}} \quad \text{i} \quad \overline{F(t_i'^{\mathbb{R}})} = \overline{L_i(F)^{\alpha}}$$

oraz

$$\underline{F(t_i'')^{\alpha}} = \underline{U_i(F)^{\alpha}} \quad \text{i} \quad \overline{F(t_i''^{\mathbb{R}})^{\alpha}} = \overline{U_i(F)^{\alpha}} .$$

Ponadto

$$d(U(F,P)^{\alpha} , L(F,P)^{\alpha}) =$$

$$= \max \left(\left| \underline{U(F,P)^{\alpha}} - \underline{L(F,P)^{\alpha}} \right| , \left| \overline{U(F,P)^{\alpha}} - \overline{L(F,P)^{\alpha}} \right| \right) =$$

$$= \max \left(\left| \sum_{i=1}^{n} \underline{U_i(F)^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \underline{L_i(F)^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) \right| , \right.$$

$$\left. \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{U_i(F)^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{L_i(F)^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) \right| \right) =$$

$$= \max \left(\left| \sum_{i=1}^{n} \underline{F(t_i'')^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \underline{F(t_i')^{\alpha}} \cdot (t_i - t_{i-1}) \right| , \right.$$

$$\left. \left| \sum_{i=1}^{n} F(t_i''^{\mathbb{R}})^{\alpha} \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} F(t_i'^{\mathbb{R}})^{\alpha} \cdot (t_i - t_{i-1}) \right| \right) .$$

Z ciągłości F wynika, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że $r,s \in [a,b]$ i $|r-s| < \delta$ implikuje $D(F(r),F(s)) < \varepsilon/(b-a)$. Zatem dobierając P o średnicy podziału $|P| < \delta$ mamy

$$\left| \underline{F(t_i'')^{\alpha}} - \underline{F(t_i')^{\alpha}} \right| < \varepsilon' / (b-a)$$

i

$$\left| \overline{F(t_i''^{\mathbb{R}})^{\alpha}} - \overline{F(t_i'^{\mathbb{R}})^{\alpha}} \right| < \varepsilon'' / (b-a) .$$

Ponieważ $|P| < \delta$ zatem dla dowolnego $\alpha \in [0,1]$

$$d(U(F,P)^{\alpha} , L(F,P)^{\alpha}) < \sum_{i=1} \frac{\max(\varepsilon', \varepsilon'')}{b-a} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon$$

stąd wynika, że

$$D(U(F,P) , L(F,P)) < \varepsilon .$$

Tak więc na podstawie twierdzenia 3.1 jest całkowalne na $[a,b]$

Literatura

[1] D. Dubois and H. Prade, Towards fuzzy differential calculus, Part 1: Integration of fuzzy mapping, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 1-17.

[2] D. Dubois and H. Prade, Towarss fuzzy differential calculus, Part 2: Integration on fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982) 105--116.

[3] D. Dubois, H. Prade, Operations on fuzzy numbers, Internat. J. Systems Sci. 9 (1978) 613-626.

[4] M. Gupta and A. Kaufmann, Introduction to fuzzy arithmetic. Theory and Applications, New York 1985.

[5] O. Kaleva, A differential and integral calculus for fuzzy mappings and fuzzy differential equations, Report 48 of Tampere University of Technology, Tampere 1984.

[6] E.P. Klement, Some relations between integration on fuzzy sets and fuzzy measures, 5th European Meeting on Cybernetics and Systems Research, Vienna 1980.

[7] M. Matłoka, Sequences of fuzzy numbers, BUSEFAL 28 (1986) 28-37.

[8] R.E. Moore, Methods and Applications of Interval Analysis SIAM, Philadelphia, 1979.

[9] M.L. Puri and D.A. Ralescu, Differentials for fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. 91 (1983), 552-558.

[10] D.A. Ralescu, Integration on fuzzy sets, Indiana University, Bloomington 1979.

[11] Song Renming, On the (N) fuzzy integral, Fuzzy Mathematics 3 (1985) 91-106.

[12] M. Sugeno, Theory of fuzzy ingegral and its applications, Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[13] Wang Zi-Xiao, Fuzzy measures and measures of fuzziness, J. Math. Anal. Appl. 104 (1984), 589-601.

[14] R.R. Yager, A note on probabilities of fuzzy events, Inform. Sci. 18 (1979) 113-129.

[15] Zhao Ru-huai, The (N) fuzzy integral, J. Mathematical Research and Exposition 1 (1981) 37-44.

Część III

STATYSTYKA