Piotr Dworniczak

OPTYMALNE DECYZJE W WARUNKACH ROZMYTOŚCI W TERMINACH T-, S- I N-NORM

1. Wprowadzenie

Człowiek w swoim racjonalnym działaniu dąży do osiągnięcia możliwie maksymalnej korzyści z tego działania wynikającej. Słowo „możliwie" przypomina nam o zawsze istniejących ograniczeniach, którym działający musi się podporządkować. „Maksymalna korzyść" podkreśla kierunek działania oraz założenie, że działający potrafi, na podstawie pewnej oceny stopnia spełnienia określonego wcześniej celu, wskazać, którą z decyzji uznaje za lepszą. Powyższe krótkie sformułowanie problemu nie świadczy wcale o jego prostocie. Dzieje się tak również dlatego, że najczęściej decyzja oceniana jest z wielu punktów widzenia. Mamy wtedy do czynienia z tzw. problemem wielokryterialnego optymalnego wyboru. W tego typu przypadkach wybór decyzji dającej maksymalne korzyści spełniającej przy tym wszystkie zadane ograniczenia jest najczęściej bardzo trudny, gdyż decyzja optymalna z jednego punktu widzenia nie musi być taką z innego. Stopień trudności pojawiający się przy wskazywaniu optymalnej z decyzji zależy oczywiście od tego, jak określone są i jakie mają własności: zbiór decyzji dopuszczalnych, funkcje przypisujące decyzjom oceny według poszczególnych kryteriów oraz umożliwiające optymalny wybór relacje preferencji.

Wielokryterialne wspomaganie decyzji przeżywa w ostatnich latach istotny rozwój. Zjawisko to można zaobserwować choćby na podstawie wzrastającej liczby publikacji na ten temat. Na pewno niemały wpływ na to ma rozwój techniki komputerowej.

Szczególnym zainteresowaniem cieszy się część analizy wielokryterialnej łącząca standardowe podejście do problemów wspomagania decyzji z teorią zbiorów rozmytych. Podwaliny pod dzisiejszą wiedzę na ten temat stworzył w 1965 roku Lofti

Zadeh, wprowadzając w artykule *Fuzzy sets* w czasopiśmie „Information and Control" pojęcie zbioru rozmytego.

Wykorzystanie zbiorów rozmytych w przypadku optymalizacji podejmowania decyzji polega na tym, że zarówno cele i ograniczenia nakładane na decyzje, jak i ich oceny, mogą być zbiorami (w szczególności liczbami) rozmytymi. Również relacje pozwalające na dokonanie optymalnego wyboru w wielu problemach decyzyjnych mogą mieć charakter rozmyty. Dzieje się tak, gdy niemożliwe lub niekorzystne jest jednoznaczne wskazanie lepszej z decyzji. Sytuacja taka zachodzi często, gdy mamy do czynienia z wyborem na podstawie wielu kryteriów lub na podstawie ocen wielu ekspertów. Generalnie dla rozważań dotyczących optymalnego wyboru wystarczy brać pod uwagę relacje w zbiorach ocen decyzji dopuszczalnych, które to oceny winny uwzględniać informacje o spełnieniu określonego celu czy ograniczenia. Podstawowym problemem pojawiającym się przy wyznaczaniu decyzji optymalnych na podstawie wielu kryteriów jest racjonalny sposób przedstawienia w postaci funkcji działań odpowiadających koniunkcji zdań (przekrojowi zbiorów), alternatywie zdań (sumie zbiorów) oraz negacji zdania (dopełnieniu zbiorów). Najogólniej działaniami tymi są tzw. *t*-, *s*- i *n*-normy (odpowiednio).

W tej pracy zaprezentowana została procedura wyznaczania najlepszej możliwości na podstawie rozmytych relacji preferencji i własności opisanych za pomocą zbiorów rozmytych. W optymalizacji wielokryterialnej uwzględniona została możliwość zróżnicowania względnej ważności poszczególnych kryteriów. Przedstawiona została też propozycja zastosowania omówionej procedury do wieloczynnikowego problemu lokalizacji inwestycji.

2. *Podstawowe definicje i oznaczenia*

Niech $X=\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ będzie skończonym zbiorem decyzji (wyborów, postępowań, obiektów) dopuszczalnych.

Dwuargumentową rozmytą relacją R w nierozmytym zbiorze X nazywamy dowolny rozmyty podzbiór $R \subseteq X \times X$. Szczególnym typem relacji rozmytej jest rozmyta relacja słabej preferencji. Rozmytą relację nazywamy $R \subseteq X \times X$ relacją słabej preferencji, jeżeli jest relacją zwrotną, tzn. gdy $\forall x \in X : \mu_R(x, x) = 1$. W literaturze spotyka się jednakże różne definicje takiej relacji.

Funkcja $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ nazywana jest *n*-normą lub negacją, gdy spełnia warunki:

1) $N(0) = 1$,
2) $N(N(a)) = a$,
3) $a \leq b \Rightarrow N(a) \geq N(b)$.

Niech $F : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ będzie funkcją, która jest:

1) niemalejąca względem obu argumentów, tzn.

$$a \le b \text{ i } c \le d \Rightarrow F(a,c) \le F(b,d);$$

2) przemienna, tzn.

$$F(a,b) = F(b,a);$$

3) łączna, tzn.

$$F(F(a,b),c) = F(a,F(b,c)).$$

Gdy ponadto spełnia ona warunek

4) $F(a,1) = a$,

to nazywamy ją *t*-normą i oznaczamy przez T, natomiast gdy spełnia warunek

5) $F(a,0) = a$,

to nazywamy ją *s*-normą i oznaczamy przez S.

Określona w powyższy sposób funkcja T odpowiada logicznej operacji koniunkcji, natomiast funkcja S odpowiada logicznej operacji alternatywy.

Dowolną *t*-normę oraz *s*-normę można indukcyjnie uogólnić na funkcję $n>2$ argumentów.

Wtedy $T(a_1, a_2, ..., a_n) = T(T(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$, a $S(a_1, a_2, ..., a_n) = S(S(a_1, a_2, ..., a_{n-1}), a_n)$.

Na oznaczenie $T(a_1, a_2, ..., a_n)$ stosuje się też zapis $\overset{n}{\underset{i=1}{T}}$, a na $S(a_1, a_2, ..., a_n)$ zapis $\overset{n}{\underset{i=1}{S}}$.

Najczęściej używane *t*-normy i *s*-normy to

1) $T(a,b) = \min\{a,b\}$,
2) $T(a,b) = a \bullet b$,
3) $T(a,b) = \max\{a+b-1, 0\}$,

1) $S(a,b) = \max\{a,b\}$,
2) $S(a,b) = a+b-a \bullet b$,
3) $S(a,b) = \min\{a+b, 1\}$.

Dla dowolnej *t*-normy T i negacji N istnieje *s*-norma S określona następująco

$$S(a,b) = N\big(T(N(a), N(b))\big).$$

T normę i S normę związane powyższą zależnością nazywamy normami dualnymi.

3. Decyzje optymalne w terminach t-, s- i n-norm

Rozważania dotyczące wyznaczania alternatywy optymalnej poprzedzić należy wprowadzeniem potrzebnych pojęć. Niech $R \subsetneq X \times X$ będzie rozmytą relacją słabej preferencji. Relacją odwrotną do relacji rozmytej R nazywamy relację $R^{-1} \subsetneq X \times X$ o funkcji przynależności

$$\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x) \qquad \forall x, y \in X,$$

Dopełnieniem relacji rozmytej $R \subsetneq X \times X$ nazywamy relację $R' \subsetneq X \times X$ o funkcji przynależności

$$\mu_{R'}(x,y) = N(\mu_R(x,y)) \qquad \forall x, y \in X,$$

gdzie N jest dowolną negacją.

Zaostrzeniem relacji rozmytej $R \subsetneq X \times X$ nazywamy $R^s \subsetneq X \times X$ relację taką, że

$$R^s = R \cap (R')^{-1}.$$

Jest to zatem relacja rozmyta o funkcji przynależności postaci

$$\mu_{R^s}(x,y) = T\big(\mu_R(x,y),\ N(\mu_R(y,x))\big) \qquad \forall\, x,y \in X,$$

gdzie T i N są odpowiednio t-normą i negacją.

Istotne w teorii optymalizacji jest pojęcie zbioru elementów niezdominowanych w danej relacji rozmytej. Jest to bezpośrednie uogólnienie klasycznego zbioru Pareto. Zbiór elementów niezdominowanych $X^{nd} \subsetneq X$ w relacji rozmytej R określony jest przez funkcję przynależności

$$\mu_R^{nd}(x) = N\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{S}} \mu_{R^s}(y_i, x)\Big) \qquad \forall\, x \in X.$$

Liczbę $\mu_R^{nd}(x)$ nazywamy stopniem niezdominowania (lub „maksymalności") elementu x.

Element x jest co najmniej w stopniu $\mu_R^{nd}(x)$ nie gorszy niż dowolny element ze zbioru X.

Optymalną jest alternatywa dla której stopień niezdominowania jest największy, tzn. taka alternatywa $x^* \in X$, że $\mu_R^{nd}(x^*) = \sup\limits_{x \in X} \mu_R^{nd}(x)$.

Biorąc pod uwagę powyższe definicje zapisane w terminach t-normy, s-normy i negacji, otrzymujemy ostatecznie uogólnienie wyznaczenia optymalnej alternatywy na podstawie rozmytej relacji preferencji.

$x^* \in X$ nazywamy możliwością optymalną określoną na podstawie rozmytej relacji słabej preferencji R, gdy

$$\mu_R^{nd}(x^*) = \max_j N\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{S}} T\big(\mu_R(y_i, x_j),\ N(\mu_R(x_j, y_i))\big)\Big).$$

4. *Porównywanie alternatyw na podstawie ich własności i rozmytych relacji preferencji*

Niech w zbiorze alternatyw X dana będzie rozmyta relacja słabej preferencji R określona przez funkcję przynależności μ_R: $X \times X \to [0, 1]$. Oznaczmy przez C rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych w X.

Jakiej postaci będzie rozmyta relacja słabej preferencji Q indukowana przez R w zbiorze C?

Rozpatrzmy zależność między dwiema możliwościami $x, y \in X$. Wartość $\mu_R(x,y)$ jest stopniem, w jakim alternatywa x jest nie gorsza od y.

Możliwości mogą nie być wskazane w sposób konkretny (dokładny), ale mogą być opisane przez pewną własność nawet niepredykatywną. Na przykład, ktoś porównujący samochody może pytać, z jaką miarą (czy też w jakim stopniu) „elegancki" samochód jest „lepszy" od „zwyczajnego". Stwierdzenie „elegancki" jest podaniem pewnej własności niepredykatywnej wyznaczającej zbiór rozmyty w uniwersum samochodów. Podobnie „zwyczajny". Relacja „bycia lepszym" może być uznana za relację predykatywną lub niepredykatywną (zależy to od kryteriów określenia „lepszości").

Problemem jest odpowiedź na pytanie: „W jakim stopniu decyzja (obiekt) wykazująca własność a jest nie gorsza od decyzji wykazującej własność b" lub „w jakim stopniu b jest obrazem a w relacji słabej preferencji R".

Decyzje mogą być tu opisane funkcjami przynależności μ_a, $\mu_b: X \to [0,1]$ dotyczącymi odpowiednich własności.

Porównania między decyzjami dokonuje się na podstawie relacji słabej preferencji R.

Konieczne jest przedtem wprowadzenie pojęcia obrazu zbioru rozmytego w tej relacji. Obrazem zbioru rozmytego $A \subsetneq X$ w relacji rozmytej $R \subsetneq X \times Y$ nazywamy zbiór ran $R \subsetneq Y$ o funkcji przynależności

$$\mu_{\mathrm{ran}R}(y) = \sup_{x \in X} T(\mu_A(x),\ \mu_R(x,y)) \qquad \forall y \in Y.$$

Gdy przez μ_a oznaczymy funkcję przynależności zbioru rozmytego a, to na podstawie powyższej definicji przez

$$\mu_b(y) = \sup_{x \in X} T(\mu_a(x),\ \mu_R(x,y)) \tag{4.1}$$

można opisać obraz zbioru rozmytego a określony przez relację R.

Taka równość zachodzi dla określonego $a \in C$, ale ponieważ a może być widziane jako zmienna przebiegająca zbiór C stąd μ_b można przedstawić w postaci

$$\mu_b(y) = \mu_P(y,\ \mu_a) \qquad \forall\ y \in Y.$$

gdzie $P: X \to C$ jest relacją rozmytą w produkcie $X \times C$ o funkcji przynależności $\mu_P: X \times C \to [0,1]$. Mamy zatem z (4.1)

$$\mu_P(y, \mu_a) = \sup_{x \in X} T(\mu_a(x),\ \mu_R(x,y)) \tag{4.2}$$

która to wartość jest rozumiana jako stopień, z którym zbiór rozmyty $a \in C$ (lub innymi słowy – decyzja wykazująca własność a) jest nie gorszy od decyzji y.

Kontynuując rozumowanie, zauważmy, że można mówić o obrazie zbioru rozmytego b danego przez funkcję przynależności $\mu_b(y)$, $y \in X$ w relacji $P: X \to C$.
Dla ustalonego $a \in C$ danego przez $\mu_a: X \to [0,1]$ możemy określić funkcję przynależności pewnej relacji Q między własnościami a i b w iloczynie kartezjańskim $C \times C$

$$\mu_Q(\mu_b)_{[\mu_a]} = \sup_{y \in X} T(\mu_b(y),\ \mu_P(y, \mu_a))$$

Zapisując powyższy wzór nieco inaczej, mamy

$$\mu_Q(\mu_a, \mu_b) = \sup_{y \in X} T(\mu_b(y),\ \mu_P(y, \mu_a)). \tag{4.3}$$

Przekształcając ten wzór, uwzględniając (4.2), mamy

$$\mu_Q(\mu_a, \mu_b) = \sup_{y \in X} T(\mu_b(y),\ \sup_{x \in X} T(\mu_a(x),\ \mu_R(x,y))) =$$

$$= \sup_{y \in X} \{ \sup_{x \in X} T(\mu_b(y),\ T(\mu_a(x),\ \mu_R(x,y))) \} = \sup_{x,y \in X} T(\mu_a(x),\ \mu_b(y),\ \mu_R(x,y)).$$

Wartość $\mu_Q(\mu_a, \mu_b)$ rozumiana jest jako stopień, w jakim decyzja wykazująca własność a jest nie gorsza od decyzji wykazującej własność b.

Ostatecznie więc dla dowolnej rozmytej relacji słabej preferencji R określonej w zbiorze obiektów X można skonstruować rozmytą relację Q w zbiorze C wszystkich własności sensownych dla obiektów z X określającą preferencję, z jaką obiekt wykazujący własność a jest nie gorszy od obiektu wykazującego własność b, przy uwzględnieniu relacji R między obiektami o własnościach a i b.
Funkcja przynależności tej relacji ma postać

$$\mu_Q(\mu_a, \mu_b) = \sup_{x,y \in X} T(\mu_a(x),\ \mu_b(y),\ \mu_R(x,y)) \tag{4.4}$$

5. *Wielokryterialny wybór optymalnej decyzji na podstawie własności przy zróżnicowaniu stopni ważności kryteriów*

Niech X będzie danym, skończonym zbiorem decyzji natomiast $K = \{K_i; i = 1, ..., m\}$ zbiorem kryteriów, według których decyzje są oceniane. Zakładać będziemy, że zbiór kryteriów jest skończony. Każda decyzja (obiekt) x ze zbioru X charakteryzowana jest jednoznacznie przez pewną wartość $K_i(x)$, która jest miarą oceny decyzji x według kryterium K_i.
Załóżmy, że w każdym zbiorze ocen dana jest rozmyta relacja słabej preferencji R_i określona przez funkcję przynależność $\mu_{K_i}: X \times X \to [0, 1]$. Wartość $\mu_{K_i}(x, y)$ rozumieć

należy jako stopień, w jakim decyzja x jest nie gorsza od decyzji y według kryterium K_i.

Na podstawie jednoznaczności przypisania ocen wg poszczególnych kryteriów rodzina relacji $\{R_i\ ;\ i=1,\ldots,m\}$ może być utożsamiona z rodziną rozmytych relacji słabych preferencji w zbiorze X.

Ponieważ poszczególne kryteria nie muszą być jednakowej wagi, przyjmijmy, że w zbiorze kryteriów określona jest relacja względnej ważności kryteriów W dana przez funkcję przynależności $\mu_W : K\times K\to[0,1]$. Wartość $\mu_W(K_i,K_j)$ rozumieć należy jako stopień, w jakim kryterium K_i jest co najmniej tak ważne jak kryterium K_j.

Po wprowadzeniu takich oznaczeń zobaczmy jak wygląda porównywanie poszczególnych obiektów na podstawie słabych preferencji według poszczególnych kryteriów przy uwzględnianiu względnej ważności kryteriów.

Podstawą rozważań będzie pojęcie decyzji niezdominowanej wg pewnej relacji rozmytej. Określenie zbioru elementów niezdominowanych (decyzji niezdominowanych) i zaostrzenia relacji rozmytej podane zostały w akapicie 3.

W przypadku jedynego kryterium K_1 i danej w nim relacji słabej preferencji R najbardziej racjonalnym jest wybór decyzji o najwyższym stopniu niezdominowania $\mu_R^{nd}(x)$.

W przypadku wielu kryteriów uwzględnić należy ich względną ważność.

Dla określonej ustalonej decyzji $x\in X$ wartość $\mu_{K_i}^{nd}(x)$ jest funkcją zależną od zmiennej $K_i, i=1,\ldots,m$. Funkcja taka opisuje zbiór rozmyty określony na uniwersum K, uwzględnia przy tym stopień niezdominowania decyzji x.

Biorąc pod uwagę dwie decyzje $x, y\in X$, możemy określić $\mu_{K_i}^{nd}(x)$ i $\mu_{K_i}^{nd}(y)$ opisujące dwa zbiory rozmyte w K. Można je widzieć jako własności a i b określone jako „niezdominowanie" (lub „maksymalność" czy „najlepszość") elementów x i y w zbiorze kryteriów. Wartości funkcji przynależności dla danego K_i wygodniej oznaczyć $\mu^{nd}(x,K_i)$ i $\mu^{nd}(y,K_i)$.

Zgodnie z (4.4) możemy rozważać relację Q określającą stopień w jakim $\mu^{nd}(x)$ jest nie gorszy od $\mu^{nd}(y)$ (dokładniej zbiór rozmyty dany przez $\mu^{nd}(x)$ od zbioru rozmytego danego przez $\mu^{nd}(y)$). Mamy wtedy

$$\mu_Q(\mu^{nd}(x),\mu^{nd}(y)) = \sup_{K_i,K_j\in K} T(\mu^{nd}(x,K_i),\mu^{nd}(y,K_j),\mu_W(K_i,K_j)) \tag{5.1}$$

Liczba $\mu_Q(\mu^{nd}(x), \mu^{nd}(y))$ jest wartością określającą stopień, w jakim obiekt, któremu jednoznacznie przyporządkowana jest własność określaną przez $\mu^{nd}(x)$, jest nie gorszy od obiektu, któremu jednoznacznie przyporządkowana jest własność dana przez $\mu^{nd}(y)$. Ostatecznie dzięki tej jednoznaczności, zmieniając nieco notację, otrzymujemy relację Q dla obiektów ze zbioru X daną formułą

$$\mu_Q(x,y) = \sup_{K_i,K_j\in K} T(\mu^{nd}(x,K_i),\ \mu^{nd}(y,K_j),\ \mu_W(K_i,K_j)) \tag{5.2}$$

Stworzona w ten sposób relacja Q pozwala na przejście z problemu wielokryterialnego wyboru do jednokryterialnego. Dalsze postępowanie przebiega w sposób klasyczny dla wyborów w warunkach rozmytości – na podstawie relacji Q określane jest zaostrzenie Q^S i stopnie niezdominowania poszczególnych elementów $\mu_Q^{nd}(x)$.

Ponieważ jednak, w odróżnieniu od ściśle jednokryterialnego podejścia, relacja Q jest pewną agregacją powstającą w oparciu na danych stopniach niezdominowania poszczególnych elementów $x \in X$, przyjmować należy dodatkowo, że stopień niezdominowania elementu x w relacji Q nie może przewyższać największego ze stopni niezdominowania elementu x według poszczególnych kryteriów K_i; $i = 1, ..., m$. Po określeniu stopnia $\mu_Q^{nd}(x)$ należy zatem wyznaczyć tzw. „poprawione" stopnie niezdominowania zgodnie z formułą

$$\mu_Q^{ndp}(x) = \min\left\{\mu_Q^{nd}(x), \sup_{K_i \in K} \mu^{nd}(x, K_i)\right\} \tag{5.3}$$

Najlepszą decyzją jest decyzja x_0 o maksymalnym „poprawionym" stopniu niezdominowania, tzn. taka, że $\mu_Q^{ndp}(x_0) = \sup_{x \in X} \mu_Q^{ndp}(x)$.

6. *Wieloczynnikowy problem lokalizacyjny jako propozycja zastosowania powyżej przedstawionej procedury optymalizacji*

W rozważaniach dotyczących rozwoju gospodarczego kraju, regionu czy przedsiębiorstwa stajemy w pewnym momencie przed problemem wyboru sposobu i kierunków tego rozwoju. Jedną z form rozszerzenia działalności podmiotu gospodarczego jest inwestowanie poprzez tworzenie nowych zakładów (produkcyjnych, usługowych). Oczywiste jest, że podstawowym celem takiej działalności jest maksymalizacja zysku firmy. Zysk ten nie musi być jednak wyłącznie związany z wymiernymi korzyściami finansowymi. Może być to realizowanie pewnych zamierzeń dotyczących tzw. polityki lokalizacyjnej.

Do najważniejszych celów tej polityki należą (zob. [1]).

- cele ekonomiczne: zwiększenie efektywności ekonomicznej, obniżenie nakładów inwestycyjnych, kosztów produkcji i transportu, rozbudowa bazy surowcowej i energetycznej, aktywizacjia bądź kompleksowy rozwój pewnych regionów;
- cele polityczne, polegające na tworzeniu nowych ośrodków przemysłowych lub usługowych powodujących zmiany struktury zatrudnienia i zmiany różnic między środowiskowych (międzyregionalnych);
- cele socjalno-kulturalne polegające na dążeniu do zmniejszenia dysproporcji w dochodach ludności, jej życiu kulturalnym, wykształceniu, w dziedzinie usług socjalnych;
- cele obronne, które wynikają z warunków geopolitycznych danego regionu.

Cele te dotyczą zarówno wyboru lokalizacji danego zakładu, jak i rozmieszczenia (rozumianego jako kompleksowe kształtowanie struktury przemysłu w powiązaniu z szeroko rozumianą przestrzenią geograficzną, polityczną, społeczną i gospodarczą) gałęzi przemysłu.

Podczas gdy w problemach rozmieszczenia przemysłu bardzo istotną rolę grają cele polityczne, społeczno-kulturowe i obronne, to w przypadku decyzji lokalizacyjnych większą rolę odgrywają cele ekonomiczne.

Osiągnięcie tychże celów zależy od wielu okoliczności. Nie jest możliwe wyznaczenie wszystkich czynników mających wpływ na ostateczną decyzję. Określić jednak można wiele takich, których wzięcie pod uwagę jest w zasadzie absolutnie konieczne i podstawowe.

Przez czynniki lokalizacyjne rozumieć będziemy wszystkie zjawiska gospodarcze mające wpływ na wielkość nakładów inwestycyjnych, kosztów eksploatacji przedsiębiorstwa, kosztów produkcji w tym też kosztów pozyskiwania surowców i dystrybucji produktów.

Najważniejsze (zob. [2]) z nich to:

1) dogodność warunków geologicznych, geograficznych i klimatycznych;
2) sytuacja polityczna, kulturalna i ekonomiczna regionu;
3) dostępność surowców;
4) dostępność odpowiedniej siły roboczej;
5) dostępność sieci transportowej;
6) uzbrojenie terenu (zaopatrzenie w wodę, energię elektryczną, gaz, odprowadzanie odpadów i ścieków, sieć łączności);
7) dostęp do rynku zbytu;
8) infrastruktura socjalna (miasta, wieś, mieszkania, sklepy, usługi komunalne, łączność, komunikacja pasażerska, służby ochrony zdrowia, oświata);
9) koszt terenu;
10) miejsce na rozbudowę;
11) wymagania bezpieczeństwa;
12) przepisy ochrony środowiska;
13) przepisy lokalne (w tym dotacje specjalne, podatki);
14) powiązania z innymi zakładami podobnego typu.

Czynniki te wyznaczają jednocześnie kryteria wyboru odpowiedniego wariantu lokalizacji.

Wiele z nich jest ze sobą sprzecznych. Prowadzi to w efekcie do większych trudności. Istnieje wiele technik prowadzących do wyznaczenia optymalnej decyzji lokalizacji. Jedną z nich jest podanie oceny wg każdego z kryteriów, a następnie przemnożenie tych ocen przez pewne wagi kryteriów i zsumowanie tak otrzymanych wskaźników. Sumy te są uznawane za kompleksową miarę oceny i wyznaczają ranking decyzji. Inna metoda wykorzystuje programowanie matematyczne (np. zagadnienia transpor-

towe). Ponieważ jednak większość czynników branych pod uwagę ma charakter jakościowy, własności przypisane poszczególnym decyzjom nie są własnościami predykatywnymi. Dlatego sensowne wydaje się przyjęcie sposobu porządkowania przedstawionego wcześniej.

Zadaniem decydenta jest podanie relacji słabych preferencji wg każdego z kryteriów (na podstawie danych liczbowych lub ocen ekspertów) oraz podanie macierzy względnej ważności kryteriów, a następnie przetworzenia danych i uzyskania rozwiązania.

Przyjmijmy, że mamy zadecydować o lokalizacji zakładu na podstawie następujących kryteriów:

K_1 – bliskość bazy surowcowej
K_2 – bliskość rynku zbytu
K_3 – dostępność odpowiedniej siły roboczej
K_4 – dostępność uzbrojenia terenu
K_5 – stopień rozwoju sieci transportowej
K_6 – przepisy lokalne
K_7 – koszty parceli i możliwości rozbudowy

Niech rozważanymi decyzjami będą A, B i C.

Na podstawie wszechstronnej analizy poszczególnych czynników określamy macierze relacji R_1 ... R_7 słabych preferencji wg poszczególnych kryteriów oraz macierz W względnej ważności kryteriów.

Uwaga: Podany przykład jest fikcyjny, a macierze preferencji w nim podane nie powinny być uznawane za wzorcowe w problemach lokalizacyjnych. Macierze te określa decydent, który może wykorzystywać w tym celu opinie ekspertów, inwestorów, lokalnych władz itp.

Niech macierzami tymi będą

R_1	A	B	C
A	1	0,8	0,2
B	0,5	1	0,1
C	0,9	0,9	1

R_2	A	B	C
A	1	0,2	0,7
B	1	1	1
C	0,8	0,3	1

R_3	A	B	C
A	1	0,1	0,2
B	1	1	0,9
C	0,9	0,6	1

R_4	A	B	C
A	1	0,3	0,2
B	0,8	1	0,8
C	0,7	0,3	1

R_5	A	B	C
A	1	0,9	1
B	0,5	1	0,5
C	0,3	0,3	1

R_6	A	B	C
A	1	0,9	0,8
B	0,2	1	0,3
C	0,4	0,9	1

R_7	A	B	C
A	1	0,8	0,2
B	0,1	1	0,1
C	0,9	0,9	1

W	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
K_1	1	1	1	1	0,8	1	0,8
K_2	1	1	0,9	0,8	0,6	0,9	0,7
K_3	0,6	0,6	1	0,6	0,7	0,9	0,6
K_4	0,5	0,5	0,9	1	1	0,9	0,9
K_5	0,7	0,7	0,9	1	1	0,9	0,9
K_6	0,4	0,8	0,5	0,6	0,6	1	0,6
K_7	0,6	0,9	0,8	0,7	0,8	0,8	1

Przyjmijmy, że potrzebne do obliczeń praktycznych t-norma, s-norma i negacja to $T(a,b)=\min\{a,b\}$, $S(a,b)=\max\{a,b\}$ i $N(a)=1-a$.

Przy tak określonych normach i preferencjach stopnie niezdominowania decyzji A, B i C w zagregowanej relacji Q wynoszą $\mu_Q^{nd}(A)=0{,}9$, $\mu_Q^{nd}(B)=1$, $\mu_Q^{nd}(C)=1$, a poprawione stopnie niezdominowania $\mu_Q^{ndp}(A)=0{,}9$, $\mu_Q^{ndp}(B)=1$, $\mu_Q^{ndp}(C)=1$ skąd uporządkowanie preferencyjne lokalizacji to $C\approx B\succeq A$.

Oczywiście przy zmienionej ważności kryteriów zarówno stopnie niezdominowania decyzji, jak i uporządkowanie mogą ulec zmianie.

Jeżeli przyjmiemy, że macierzą względnej ważności kryteriów jest

W	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
K1	1	1	1	1	1	1	1
K2	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
K3	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5
K4	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5
K5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5
K6	1	1	1	1	1	1	1
K7	1	1	1	1	1	1	1

to $\mu_Q^{nd}(A)=1$, $\mu_Q^{nd}(B)=0{,}6$, $\mu_Q^{nd}(C)=1$ i $\mu_Q^{ndp}(A)=1$, $\mu_Q^{ndp}(B)=0{,}6$, $\mu_Q^{ndp}(C)=1$, a uporządkowanie preferencyjne lokalizacji to $A\approx C\succeq B$.

Jeśli natomiast macierzą względnej ważności kryteriów jest

W	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
K_1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
K_2	1	1	1	1	1	1	1
K_3	1	1	1	1	1	1	1
K_4	1	1	1	1	1	1	1
K_5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,5	0,5
K_6	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	0,5
K_7	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1

to $\mu_Q^{nd}(A)=0,6$, $\mu_Q^{nd}(B)=1$, $\mu_Q^{nd}(C)=0,7$ i $\mu_Q^{ndp}(A)=0,6$, $\mu_Q^{ndp}(B)=1$, $\mu_Q^{ndp}(C)=0,7$, a uporządkowanie preferencyjne lokalizacji to $B \succeq C \succeq A$.

Proponowana procedura obliczeń jest dzięki zastosowaniu komputerów bardzo łatwa do przeprowadzenia. Jednocześnie jest ona stosunkowo prosta dla decydenta, gdyż wymaga jedynie właściwego porównania decyzji lub kryteriów parami, bez konieczności uwzględnienia powiązań w całym zbiorze decyzji lub kryteriów (co jest niezbędne np. w procedurach opartych na wyznaczaniu wagowych współczynników rangi kryteriów).

Literatura

[1] *Ekonomika i programowanie rozwoju przemysłu*, E. Bittnerowa red., Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1996

[2] A.P. Muhlemann, J.S. Oakland, K.G. Lockyer, *Zarządzanie, produkcja, usługi*, PWN, Warszawa 1997

[3] S.A. Orlovski, *Calculus of decomposable properties, fuzzy sets, and decision*. Allerton Press, New York 1994

[4] S. Xiaoqiu, P. Zhi, *Fuzzy algebra in triangular norm system*, Fuzzy Sets and Systems 93, Elsevier, Amsterdam 1998, ss. 331-335

[5] M. Roubens, *Fuzzy sets and decision analysis*. Fuzzy Sets and Systems 90, Elsevier, Amsterdam 1997, ss. 199-206