Emil Panek

OPTYMALNE TRAJEKTORIE WZROSTU W DWUSEKTOROWYM MODELU GOSPODARKI

W pracy przedstawiono rozwiązanie trzech zadań sterowania wzrostem w dwusektorowej (jednoczynnikowej) gospodarce z autonomiczną ścieżką wzrostu ludności. Dwa pierwsze zadania różnią się tylko kryteriami wzrostu. W trzecim zadaniu dodano pewien blok warunków eliminujących „skoki" w podziale inwestycji między sektory ujawnione w rozwiązaniach poprzednich zadań.

1. Sformułowanie zadania sterowania optymalnego

Oznaczenia:

R^n - przestrzeń Euklidesa n-wymiarowa; R^1 - oś liczbowa rzeczywista;

$T = [t_0, t_1]$ - przedział czasu domknięty w R^1 (horyzont czasu);

int T - podzbiór punktów wewnętrznych zbioru T w R^1;

$C^0[T]$ - klasa ciągłych funkcji wektorowych $f: T \longrightarrow R^n$;

$C^0[T] = C_1^0[T]$ (klasa ciągłych funkcji skalarnych $f: T \longrightarrow R^1$);

$\tilde{C}_n^0[T]$ - klasa przynajmniej przedziałami ciągłych funkcji wektorowych $f: T \longrightarrow R^n$ o co najwyżej skończonej liczbie punktów nieciągłości pierwszego rodzaju na int T, w punktach nieciągłości ciągłych prawostronnie;

$\tilde{C}^0[T] = \tilde{C}_1^0[T]$;

$U(\varepsilon;t)$ - ε - otoczenie punktu t w R^1;

$U^-(\varepsilon;t) = \{ t' \in U(\varepsilon;t): t' \leqslant t \}$ (lewostronne ε - otoczenie punktu t w R^1).

Zakładamy, że:

(i) Funkcjonowanie gładkiego, stacjonarnego systemu dynamicznego w horyzoncie czasu T opisuje układ równań

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = f(x(t),u(t)), \tag{1.1}$$

w którym $f = (f_1,\ldots,f_n)$, $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, $u(t) = (u_1(t)\ldots, \ldots,u_m(t))$,

$$u(t) \in U \subset R^n \quad \forall t \in T \tag{1.2}$$

oraz f, $\partial f_i/\partial x = (\partial f_i/\partial x_1,\ldots,\partial f_i/\partial x_n) \in C_n^o\,[R^n \times U]$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Zbiór U nazywamy zbiorem dopuszczalnych wartości sterowań, a każdą funkcję $u:T \longrightarrow U$ z klasy $\tilde{C}_m^o\,[T]$ - trajektorią sterowań lub krótko sterowaniem w horyzoncie czasu T.

(ii) W momencie początkowym t_o horyzontu czasu T system znajduje się w stanie początkowym x^o:

$$x(t_o) = x^o. \tag{1.3}$$

Rozwiązanie $x: T \longrightarrow R^n$ równania (1.1) z warunkiem początkowym (1.3) odpowiadające danemu sterowaniu nazywamy trajektorią stanów systemu[1]. W dalszym ciągu dane na T sterowanie i odpowiadającą mu trajektorię stanów krótko oznaczamy przez u_T, x_T. Parę $(u,x)_T$ spełniającą warunki (1.1) - (1.3) nazywamy dopuszczalnym procesem sterowania.

(iii) Wskaźnikiem jakości funkcjonowania systemu jest wartość funkcjonału całkowego

$$\Phi\left[(u,x)_T\right] = \int_T f_o(x(t),u(t))\,dt \tag{1.4}$$

określonego na wiązce dopuszczalnych procesów sterowania. O funkcji podcałkowej $f_o: R^n \times U \longrightarrow R^1$ zakładamy, że ma te same własności, co funkcje f_i w (1.1). Zadanie wyboru procesu maksymalizującego wartość funkcjonału (1.4) z wiązki dopuszczalnych procesów sterowania (spełniających warunki (1.1) - (1.3)) nazywamy zadaniem sterowania optymalnego stacjonarnym systemem z kryterium całkowym i swobodnym prawym końcem trajektorii stanów. Zapisujemy je w następującej postaci:

$$\max \int_T f_o\,(x(t),\, u(t))\,dt \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = f(x(t),\, u(t))$$

$$u(t) \in U,\ u \in \tilde{C}_m^o\,[T] \tag{1.6}$$

$$x(t_o) = x^o.$$

Proces $(u^*,x^*)_T$ będący rozwiązaniem tego zadania nazywamy procesem optymalnym, u_T^* - sterowaniem optymalnym, x_T^* - optymalną trajektorią stanów systemu.

---

[1] Rozwiązanie równania różniczkowego pojmujemy w sensie całkowym.

Zasada maksimum Pontriagina[2]. Wprowadźmy funkcję H (hamiltonian) zmiennych x,u i dodatkowej zmiennej wektorowej $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$:

$$H(\psi, x, u) = f_0(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x,u).$$

Jeżeli proces $(u^{*}, x^{*})_T$ jest rozwiązaniem zadania (1.5)-(1.6), to istnieje takie rozwiązanie $\psi_T = (\psi_1, \ldots, \psi_n)_T$ równania

$$(A) \qquad \frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{\partial H(\psi(t), x, u^{*}(t))}{\partial x}\Big|_{x = x^{*}(t)}$$

$(\partial H/\partial x = (\partial H/\partial x_1, \ldots, \partial H/\partial x_n))$ z warunkiem końcowym

$$(B) \qquad \psi(t_1) = 0,$$

że:

$$(C) \qquad H(\psi(t), x^{*}(t), u^{*}(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x^{*}(t), u) =$$

$$= \text{const.} \geqslant 0 \qquad \forall\, t \in T.$$

2. Model wzrostu[3]

Oznaczenia:

$m_j(t)$ - wielkość trwałego majątku produkcyjnego w j-ym sektorze gospodarki w momencie czasu t (zasób, wymiar: zł), $j = 1,2$;

$y_j(t)$ - wielkość dochodu (intensywność strumienia dochodu) wytwarzanego w j-ym sektorze w momencie czasu t (produkcja końcowa sektora - - strumień, wymiar: zł/R, R - ustalona jednostka czasu, np. R = 1 rok), $j = 1,2$;

$i_j(t)$ - wielkość inwestycji (intensywność strumienia inwestycji) w j-ym sektorze w momencie czasu t (strumień, wymiar: zł/R), $j = 1,2$;

$c(t)$ - konsumpcja (intensywność strumienia konsumpcji) w momencie czasu t (strumień, wymiar: zł/R);

$l(t)$ - liczba ludności w momencie czasu t (zasób, np. w mln. osób-L).

Zakładamy, że:

(i) Wzrost majątku produkcyjnego w sektorach w horyzoncie czasu T opisuje para równań:

$$\frac{d}{dt} m_j(t) = i_j(t) - \mu m_j(t) \qquad (2.1)$$

$j = 1,2$, gdzie μ jest dodatnim wskaźnikiem deprecjacji majątku[4].

---

[2] Zob. np. [1], rozdz. 4, twierdzenie 4.10.

[3] Por. [2], rozdz. 4, p. 4.2.

[4] Dla uproszczenia zakładamy, że obu sektorach wskaźnik ten jest taki sam.

(ii) Produkcja w sektorach wytwarzana jest w stałej proporcji do wielkości majątku funkcjonującego w tych sektorach:

$$y_j(t) = a_j m_j(t), \tag{2.2}$$

gdzie a_j jest dodatnim wskaźnikiem efektywności majątku w sektorze j.

(iii) Sektor 1 wytwarza tylko dobra inwestycyjne, a jego produkcja w całości przeznaczana jest na inwestycje w obu sektorach gospodarki:

$$y_1(t) = i_1(t) + i_2(t) \qquad (i_1(t),\ i_2(t) \geqslant 0) \tag{2.3}$$

Sektor 2 wytwarza tylko dobra konsumpcyjne. Jego produkcja w całości kierowana jest na spożycie:

$$c(t) = y_2(t). \tag{2.4}$$

(iv) Liczba ludności w horyzoncie czasu T rośnie wykładniczo ze stopą $\lambda > 0$:

$$l(t) = l^o\, e^{\lambda(t,t_o)}, \tag{2.5}$$

gdzie $l^o > 0$ jest liczbą ludności w początkowym momencie t_o.

Oznaczmy przez $m^o = (m_1^o,\ m_2^o)$ wielkość majątku produkcyjnego w sektorach w momencie początkowym t_o horyzontu czasu T

$$m(t_o) = m^o > 0 \tag{2.6}$$

$(m(t_o) = m_1(t_o),\ m_2(t_o))$ i wprowadźmy wskaźnik

$$s(t) = \frac{i_1(t)}{i_1(t) + i_2(t)} \qquad (= i_1(t)/y_1(t))$$

podziału inwestycji między sektory (struktury sektorowej nakładów inwestycyjnych, wielkość niemianowana). W układzie (2.1)-(2.3),(2.6) warunek (2.3) można zastąpić następującym:

$$\begin{aligned} &i_1(t) = s(t)y_1(t) \\ &i_2(t) = (1 - s(t))\, y_1(t) \\ &s(t) \in [0,1]\ , \end{aligned} \tag{2.7}$$

przy czym $s \in \tilde{C}^o[T]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i = (i_1,i_2) \in \tilde{C}_2^o[T]$. W dalszym ciągu zamiast układu (2.1)-(2.3), (2.6) będziemy rozpatrywać równoważny układ warunków (2.1), (2.2), (2.6), (2.7). Spełniające ten układ funkcje opisujące wzrost majątku produkcyjnego, inwestycji, produkcji (dochodu) itd. w sektorach gospodarki w horyzoncie czasu T nazywać będziemy <u>trajektoriami</u> (majątku produkcyjnego, inwestycji, produkcji itd.) i oznaczać: $m_T = (m_1,m_2)_T$, $i_T = (i_1,i_2)_T$, $y_T = (y_1,y_2)_T$ itd.

Układ warunków (2.1), (2.2), (2.6), (2.7) uzupełnimy poza tym o warunek niemalenia w czasie konsumpcji w przeliczeniu na osobę $c(t)/l(t)$.

Zważywszy na (2.4), (2.5) warunek ten oznacza, że w horyzoncie czasu T winna być spełniona nierówność[5]:

$$\frac{d}{dt} y_2(t) \frac{1}{y_2(t)} \geqslant \lambda \quad . \tag{2.8}$$

Warunek ten jednak tylko pozornie „sprzyja" konsumentom. Nie wyklucza on takiej „maksymalnie korzystnej" dla nich sytuacji, kiedy cała produkcja końcowa sektora inwestycyjnego będzie przez dłuższy okres czasu kierowana wyłącznie na doinwestowanie sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne. Na początku wywoła to nawet szybki wzrost produkcji w tym sektorze. Wzrost ten odbywać się będzie jednak kosztem sektora inwestycyjnego, którego produkcja zacznie spadać. Po pewnym czasie sektor ten zubożeje do tego stopnia, że nie będzie w stanie dostarczyć nawet inwestycji na odtworzenie zużywającego się majątku w sektorze 2, co uwidoczni się, oczywiście, w spadku produkcji również w tym sektorze.

Nie poprawi istotnie sytuacji postulat, aby tak dzielić inwestycje między sektory, by przynajmniej nie malał majątek produkcyjny w sektorze inwestycyjnym. Odsuniemy tylko nieco krytyczny moment, od którego zacznie się spadek produkcji w sektorze 2. Na dłuższą metę (w „długim" horyzoncie czasu T) wzrost produkcji końcowej w sektorze 2 ze stopą $\geqslant \lambda$ zapewnia dopiero taki podział inwestycji między sektory, przy którym także produkcja końcowa sektora inwestycyjnego będzie mogła rosnąć przynajmniej z tą stopą. Nawet skrajnie „prokonsumpcyjna" polityka wzrostu preferująca w całym (dowolnie długim) horyzoncie czasu T maksymalne doinwestowanie sektora 2 nie spowoduje wtedy nigdy spadku stopy wzrostu produkcji końcowej w sektorze 2 poniżej λ .

Twierdzenie 1. Jeżeli w procesie wzrostu spełniającym warunki (2.1), (2.2), (2.6), (2.7) stopa wzrostu produkcji końcowej w sektorze inwestycyjnym będzie niższa od stopy wzrostu ludności:

$$(*) \qquad \frac{d}{dt} y_1(t) \frac{1}{y_1(t)} \leqslant \lambda - \varepsilon,$$

gdzie ε oznacza dowolnie małą liczbą dodatnią, wtedy w dłuższym okresie czasu niemożliwy będzie wzrost produkcji dóbr konsumpcyjnych ze stopą $\geqslant \lambda$ (począwszy od pewnego momentu nie będzie spełniony warunek (2.8)).

Dowód. Przyjmując oznaczenia: $q_j(t) = (1/1^o)\, y_i(t) \exp\{-\lambda(t-t_o)\}$ $(j = 1,2)$ i uwzględniając (2.2) otrzymujemy następujący układ równań równoważny z (2.1):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} q_1(t) = (a_1 s(t) - \mu - \lambda)\, q_1(t) \\ &\frac{d}{dt} q_2(t) = a_2(1 - s(t))\, q_1(t) - (\mu + \lambda)\, q_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

---

[5] W ewentualnych punktach $\tau \in \operatorname{int} T$ nieokreśloności pochodnej funkcji $y_i \in \tilde{C}^1[T]$ przyjmujemy: $d\, y_i(t)/dt \,|_{t=\tau} = \lim_{t \to \tau + 0} d\, y_i(t)/dt$, $i=1,2$.

Warunek (*) jest przy tym równoważny z warunkiem

$$\frac{d}{dt} q_1(t) \frac{1}{q_1(t)} \leqslant -\varepsilon .$$

Z (1), (2) otrzymujemy: $s(t) \leqslant (\mu+\lambda-\varepsilon)/a_1$, $q_1(t) \leqslant q_1^o \exp\{-\varepsilon(t-t_o)\}$ $\forall t > t_o$, gdzie $q_1^o = y_1^o/1^o > 0$. Zatem

$$\frac{d}{dt} q_2(t) \frac{1}{q_2(t)} \leqslant a_2(1 - s(t)) \frac{q_1^o}{q_2(t)} e^{-\varepsilon(t-t_o)} - \mu - \lambda \quad \forall t > t_o$$

Załóżmy, że zachodzi warunek (2.8). Wtedy $q_2(t) \geqslant q_2^o$ $\forall t > t_o$ i

$$\frac{d}{dt} q_2(t) \frac{1}{q_2(t)} < 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{d}{dt} y_2(t) \frac{1}{y_2(t)}/dt < \lambda \ \forall\ t > t_o + \theta_\varepsilon ,$$

gdzie:

$\theta_\varepsilon = \max\left\{0, \frac{1}{\varepsilon} \ln\left[a_2 q_1^o/(\mu+\lambda) q_2^o\right]\right\}$.

Dalej interesować nas będą tylko te procesy wzrostu, które umożliwiają wzrost dochodu, a tym samym wzrost majątku produkcyjnego w obu sektorach gospodarki przynajmniej ze stopą λ, a więc procesy spełniające warunki (2.1), (2.2), (2.6)-(2.8) i warunek[6]

$$\frac{d}{dt} y_1(t) \frac{1}{y_1(t)} \geqslant \lambda . \tag{2.9}$$

Warunki (2.1), (2.2), (2.6)-(2.9) mogą okazać się jednak sprzeczne. Wyjaśnimy to bliżej. Aby spełnione były powyższe warunki, należy zapewnić inwestycje na odtworzenie majątku i wzrost produkcji w obu sektorach ze stopą $\geqslant \lambda$, a zatem w każdym momencie czasu powinien zachodzić warunek: $a_1 m_1(t) \geqslant (\mu+\lambda)(m_1(t) + m_2(t))$. W szczególności więc (w momencie początkowym):

$$(a_1 - \mu - \lambda)\ m_1^o - (\mu+\lambda) m_2^o \geqslant 0.$$

(Ponieważ $m_1^o, m_2^o > 0$, więc aby spełniony był ten warunek, musi być spełniona nierówność: $a_1 - \mu - \lambda > 0$). Łatwo pokazać, że jest to nie tylko konieczny, ale i wystarczający warunek niesprzeczności układu (2.1), (2.2), (2.6)-(2.9). Spełniają go np. trajektorie m_T, y_T:

$$m_1(t) = m_1^o e^{\lambda(t-t_o)}$$

$$m_2(t) = (m_2^o - d) e^{-\mu(t-t_o)} + d e^{\lambda(t-t_o)}$$

$$y_1(t) = a_1 m_1(t), \quad y_2(t) = a_2 m_2(t),$$

gdzie $d = m_1^o (a_1 - \mu - \lambda)/(\mu+\lambda)$, odpowiadające sterowaniu s_T: $s(t) = (\mu+\lambda)/a_1$ w każdym momencie czasu $t \in T$. Jeżeli warunek

---

[6] Zob. przypis 4.

$(a_1 - \mu - \lambda)\, m_1^o - (\mu+\lambda)\, m_2^o \geqslant 0$ spełniony jest z równością, wtedy powyższy proces jest jedynym procesem spełniającym warunki (2.1), (2.2), (2.6)-(2.9), przy czym $d = m_2^o$. W tym szczególnym przypadku warunki początkowe determinują podział inwestycji między sektory w całym horyzoncie czasu T. Ponieważ jest to sytuacja nietypowa dla realnej gospodarki będziemy zakładać, że w momencie początkowym t_o istnieje „rezerwa" inwestycyjna umożliwiająca wzrost produkcji końcowej w sektorach ze stopą $> \lambda$:

Założenie 1. $(a_1 - \mu - \lambda)\ m_1^o - (\mu+\lambda)\, m_2^o > 0.$

W dalszym ciągu wygodne będzie wprowadzenie zmiennych

$$f_j(t) = m_j(t)/1^o\, e^{\lambda(t-t_o)} \tag{2.10}$$

$(j = 1,2;$ majątek produkcyjny w sektorach w przeliczeniu na osobę, wymiar: zł/L). Po podstawieniu nowych zmiennych do (2.1), (2.2), (2.6)-(2.9) otrzymujemy następujący układ równoważny:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f_1(t) = (a_1 s(t) - \mu - \lambda) f_1(t) \\
&\frac{d}{dt} f_2(t) = a_1(1-s(t))\, f_1(t) - (\mu+\lambda)\, f_2(t) \\
&\frac{d}{dt} f_1(t) \geqslant 0, \qquad \frac{d}{dt} f_2(t) \geqslant 0 \\
&s(t) \in [0,1], \qquad s \in \tilde{C}^o[T] \\
&(f_1(t_o), f_2(t_o)) = (f_1^o, f_2^o)\ )(=(m_1^o/1^o,\ m_2^o/1^o) > 0).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że funkcje $f_T = (f_1, f_2)_T$, s_T wtedy i tylko wtedy spełniają warunki (2.11), gdy warunki (2.1), (2.2), (2.6)-(2.9) spełniają funkcje m_T, y_T, s_T : $m_j(t) = f_j(t) 1^o \exp\{\lambda(t-t_o)\}$, $y_j(t) = a_j f_j(t)\, 1^o \exp\{\lambda(t-t_o)\}$; $j = 1,2$.

3. Dwa zadania sterowania optymalnego wzrostem

Rozpatrzmy następujące dwa zadania sterowania optymalnego:

a) maksymalizacji konsumpcji (produkcji końcowej sektora 2) na osobę w ustalonym horyzoncie czasu T

$$\max \int_T a_2 f_2(t)\, dt$$

przy warunkach (2.11)

b) maksymalizacji konsumpcji w momencie okończowym ustalonego horyzontu czasu T

$$\max a_2 f_2(t_1)$$

przy warunkach (2.11).

Poniższy lemat ustala równoważną postać warunku (2.11) umożliwiająca wykorzystanie sformułowanej w punkcie 1 zasady maksimum w celu rozwiązania zadań (a), (b)[7].

Lemat. Jeżeli spełnione jest założenie 1, wówczas:

(i) Jeżeli para $(s,f)_T$ spełnia układ (2.11), to istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\alpha : T \longrightarrow [0,1]$ z klasy $\tilde{C}^o[T]$, że

$$(*) \qquad s(t) = \frac{\mu+\lambda}{a_1} + \frac{\alpha(t)\,\varphi(f(t))}{a_1 f_1(t)},$$

gdzie $\varphi(f(t)) = (a_1 - \mu - \lambda) f_1(t) - (\mu+\lambda) f_2(t)$;

(ii) Para $(s,f)_T$ wtedy i tylko wtedy spełnia warunki (2.11), gdy para $(\alpha,f)_T$ spełnia układ równań

$$(**) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt} f_1(t) &= \alpha(t)\,\varphi(f(t)) \\ \frac{d}{dt} f_2(t) &= (1-\alpha(t))\,\varphi(f(t)), \end{aligned}$$

gdzie $\alpha(t) \in [0,1]$, $\alpha \in \tilde{C}^o[T]$, $f(t_o) = (f_1(t_o), f_2(t_o)) = (f_1^o, f_2^o) > 0$.

Dowód. (i). Z (2.11) otrzymujemy

$$(1) \qquad s(t) \in \left[\frac{\mu+\lambda}{a_1}, \frac{\mu+\lambda}{a_1} + \frac{\varphi(f(t))}{a_1 f_1(t)} \right] \qquad \forall t \in T,$$

czyli w każdym momencie czasu $t \in T$ istnieje taka liczba $\alpha(t) \in [0,1]$, że $s(t) = (\mu+\lambda)/a_1 + \alpha(t)\varphi(f(t))/a_1 f_1(t)$. Podstawiając (*) do układu równań w (2.11) otrzymujemy (**). Ponieważ

$$\frac{d}{dt}\varphi(f(t)) = (a_1\alpha(t) - \mu - \lambda)\,\varphi(f(t))$$

(prawie wszędzie na T), oraz $\varphi(f(t_o)) > 0$ (przy założeniu 1), więc $\varphi(f(t)) > 0$ $\forall t \in T$. Przy $f_1(t) > 0$, $\varphi(f(t)) > 0$ $\forall t \in T$ (f, $\varphi(f(t)) \in C^o[T]$) z $s \in \tilde{C}^o[T]$ wynika $\alpha \in \tilde{C}^o[T]$, przy tym funkcja α_T jest określona jednoznacznie.

(ii). (Konieczność). Wykazaliśmy faktycznie w (i); jeżeli para $(s,f)_T$ spełnia warunki (2.11), to istnieje taka funkcja $\alpha : T \longrightarrow [0,1]$, $\alpha \in \tilde{C}^o[T]$, że para $(\alpha,f)_T$ jest rozwiązaniem układu (**).

(Dostateczność). Weźmy funkcję $\alpha : T \longrightarrow [0,1]$, $\alpha \in \tilde{C}^o[T]$ i odpowiadające jej rozwiązanie f_T układu (**) z warunkiem $f(t_o) = f_o > 0$. Pokażemy, że para $(s,f)_T$ z funkcją s_T postaci (*) spełnia układ (2.11). Ponieważ $\varphi(f(t)) > 0$, $f_1(t) > 0$ oraz $\alpha(t) \in [0,1]$ $\forall t \in T$, zatem funkcja s_T spełnia warunek (1). Wprowadzając tę funkcję zamiast α_T do

---

[7] Aby móc zastosować warunki optymalności Pontriagina w celu rozwiązania zadań (a), (b) należy układ (2.11) doprowadzić do takiej równoważnej postaci, w której nie wystąpią warunki typu nierówności.

(⁂) otrzymujemy układ równań różniczkowych w (2.11). Natomiast warunek $df(t)/dt \geqslant 0$ wynika z (1).

Warunki (2.11) są zatem równoważne z następującymi:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t)\left[(a_1-\mu-\lambda)f_1(t) - (\mu+\lambda)f_2(t)\right] \\ &\frac{d}{dt} f_2(t) = (1-\alpha(t))\left[(a_1-\mu-\lambda)f_1(t) - (\mu+\lambda)f_2(t)\right] \\ &\alpha(t) \in [0,1], \quad \alpha \in \tilde{C}^0[T] \\ &(f_1(t_0), f_2(t_0)) = (f_1^0, f_2^0) \quad (>0). \end{aligned} \tag{2.11'}$$

Zważywszy, że kryterium $\max a_2 f_2(t_1)$ w zadaniu (b) jest równoważne z kryterium $\max \int_T a_2(1-\alpha(t))\left[(a_1-\mu-\lambda)f_1(t) - (\mu+\lambda)f_2(t)\right] dt$ otrzymujemy następującą parę zadań równoważnych z zadaniami (a), (b):

(a') $$\max \int_T a_2 f_2(t)\, dt$$

przy warunkach (2.11'),

(b') $$\max \int_T a_2(1-\alpha(t))\left[(a_1-\mu-\lambda)f_1(t) - (\mu+\lambda)f_2(t)\right] dt$$

przy warunkach (2.11').

Równoważność rozumiemy w tym sensie, że proces $(\alpha^{⁂}, f^*)_T$ będzie rozwiązaniem któregokolwiek z zadań (a'), (b') wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem odpowiadającego mu zadania (a), (b) będzie proces $(s^*, f^*)_T$, w którym $s^{⁂}(t) = (\mu+\lambda)/a_1 + \alpha^{⁂}(t)\left[(a_1-\mu-\lambda) f_1^{⁂}(t) - (\mu+\lambda) f_2^{⁂}(t)\right]/a_1 f_1^{⁂}(t)$. Rolę sterowania w zadaniach (a'), (b') gra funkcja α_T podziału między sektory „nadwyżki" inwestycyjnej ponad tę ich wielkość, która jest niezbędna, aby majątek produkcyjny w sektorach mógł rosnąć ze stopą λ.

Twierdzenie 2. Przy założeniu 1 rozwiązaniem zadań (a'), (b') jest następujący proces $(\alpha^{⁂}, f^{⁂})_T$:

$$\alpha^{⁂}(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } t \in [t_0, \tau] \\ 0, & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

(⁂) $$f_1^{⁂}(t) = \begin{cases} (f_1^0 - d_1)e^{(a_1-\mu-\lambda)(t-t_0)} + d_1, & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ f_1^{⁂}(\tau), & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

$$f_2^{⁂}(t) = \begin{cases} f_2^0, & \text{dla } t \in [t_0, \tau) \\ (f_2^0 - d_2(\tau))e^{-(\mu+\lambda)(t-\tau)} + d_2(\tau), & \text{dla } t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

[8] Podstawienie takie jest dopuszczalne, ponieważ przekształcenie (⁂) przy założeniu 1 jest wzajemnie jednoznaczne.

$d_1 = (\mu+\lambda)f_2^o/(a_1-\mu-\lambda)$, $d_2(\tau) = (a_1-\mu-\lambda)\, f_1^{\divideontimes}(\tau)/(\mu+\lambda)$, przy czym $\tau = t_1 - \theta (> t_o)$, jeżeli $t_1 - t_o > \theta$, gdzie w zadaniu (a') θ jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$(\divideontimes\divideontimes) \qquad 1 - (\mu+\lambda)\left(1 - \frac{\mu+\lambda}{a_1}\right)\theta = e^{-(\mu+\lambda)\theta},$$

natomiast w zadaniu (b') $\theta = (\mu+\lambda)^{-1} \ln\left[1+(\mu+\lambda)/a_2(a_1-\mu-\lambda)\right]$.

Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, $t_1 - t_o \leqslant \theta$, wówczas optymalny proces redukuje się do postaci:

$$(\divideontimes\divideontimes\divideontimes) \qquad \begin{aligned} &\alpha^{\divideontimes}(t) = 0, \quad f_1^{\divideontimes}(t) = f_1^o, \\ &f_2^{\divideontimes}(t) = (f_2^o - d_2(t_o))e^{-(\mu+\lambda)(t-t_o)} + d_2(t_o) \end{aligned}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$, gdzie $d_2(t_o) = d_2(\tau)$ dla $\tau = t_o$.

Dowód. Z zasady maksimum sformułowanej w punkcie 1 otrzymujemy następujące warunki optymalności procesu $(\alpha^{\divideontimes}, f^{\divideontimes})_T$ w zadaniu (a'):

Istnieje takie rozwiązanie $\psi_T = (\psi_1, \psi_2)_T$ układu równań

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_1(t) &= -\alpha^{\divideontimes}(t)\,(a_1-\mu-\lambda)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) - (a_1-\mu-\lambda)\,\psi_1(t) \\ \frac{d}{dt}\psi_2(t) &= \alpha^{\divideontimes}(t)(\mu+\lambda)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + (\mu+\lambda)\,\psi_2(t) - a_2 \end{aligned}$$

z warunkiem końcowym

$$(2) \qquad \psi_1(t_1) = \psi_2(t_1) = 0,$$

że:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\alpha^{\divideontimes}(t) = 1, \quad \text{jeżeli} \quad \varphi(t) > 0, \\ &\alpha^{\divideontimes}(t) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad \varphi(t) < 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$.

Ponieważ $\varphi(t_1) = 0$, $d\,\varphi(t)/dt\big|_{t=t_1} > 0$, zatem $\alpha^{\divideontimes}(t) = 0 \quad \forall t \in U(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Tak więc albo $\alpha^{\divideontimes}(t) = 0 \ \forall t \in T$ jeżeli $\varphi(t) < 0$ na int T, albo istnieje punkt $\tau \in$ int T, w którym $\varphi(\tau) = 0$, $\varphi(t) < 0 \ \forall t \in (\tau, t_1)$. Rozwiązując układ (1) z warunkiem końcowym (2) i sterowaniem $\alpha_T^{\divideontimes}$: $\alpha^{\divideontimes}(t) = 0$ w lewostronnym otoczeniu punktu t_1 otrzymujemy $\varphi(t) < 0 \ \forall t \in (\tau, t_1)$, gdzie $\tau = t_1 - \theta$, θ - jest dodatnim pierwiastkiem równania $(\divideontimes\divideontimes)$. Załóżmy, że $t_1 - t_o > \theta$. Wówczas $\tau > t_o$ i w punkcie τ funkcja φ jest różniczkowalna, $d\,\varphi(t)/dt\big|_{t=\tau} < 0$, zatem $\alpha^{\divideontimes}(t) = 1 \ \forall t \in U(\varepsilon; \tau)\setminus\{\tau\}$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Rozwiązując układ równań (1) z warunkiem $\psi_1(\tau) = \psi_2(\tau)$ i sterowaniem $\alpha_T^{\divideontimes} \ni \alpha^{\divideontimes}(t) = 1$ w lewostronnym otoczeniu punktu τ otrzymujemy $\varphi(t) > 0$ (czyli $\alpha^{\divideontimes}(t) = 1$) $\forall t \in [t_o, \tau)$. Tak więc jeżeli $t_1 - t_o > \theta$, to

$$(4) \qquad \alpha^{*}(t) = \begin{cases} 1 , & \text{dla} \quad t \in [t_0, \tau) \\ 0 , & \text{dla} \quad t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

gdzie:
$\tau = t_1 - \theta$, θ jest dodatnim pierwiastkiem równania (**).

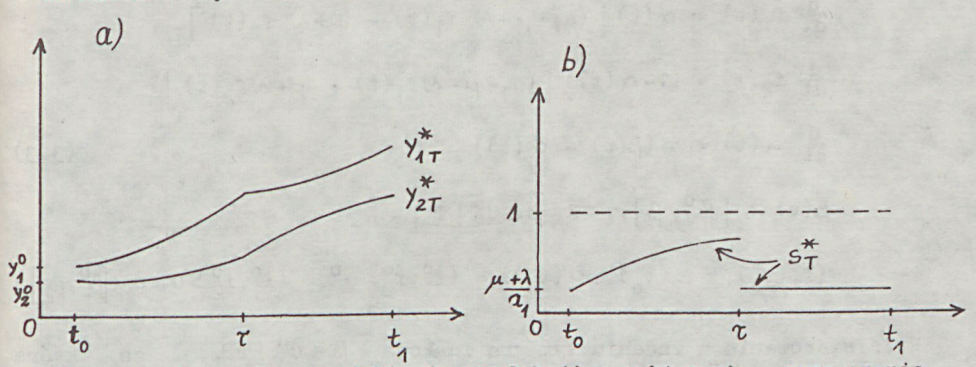
Jeżeli $t_1 - t_0 \leq \theta$, wtedy $\alpha^{*}(t) = 0 \ \forall t \in T$. Rozwiązując układ równań w (2.11') ze sterowaniem postaci (4) otrzymujemy proces (*), który redukuje się do postaci (***), jeżeli $t_1 - t_0 \leq \theta$.

Podobnie, korzystając z warunków optymalności sformułowanych w punkcie 1 i stosując analogiczną procedurę dowodzenia otrzymujemy rozwiązanie zadania (b').

Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego w sektorach oraz produkcji końcowej sektorów otrzymujemy na podstawie (2.10), (2.2). W krótkim horyzoncie czasu cała „nadwyżka" inwestycji ponad ich wielkość niezbędną dla zapewnienia wzrostu produkcji w sektorach ze stopą λ skierowana zostaje do sektora 2. Majątek produkcyjny i produkcja tego sektora rosną ze stopą $> \lambda$. Majątek produkcyjny i produkcja sektora inwestycyjnego rosną ze stopą λ. Konsumpcja na osobę rośnie gasnąco.

W długim horyzoncie czasu pojawiają się dwie fazy wzrostu. W fazie pierwszej, inwestycyjnej, szybko rośnie majątek i produkcja sektora inwestycyjnego (ze stopą $a_1 - \mu > \lambda$). Majątek i produkcja sektora 2 rosną w tym czasie tylko ze stopą λ (konsumpcja na osobę utrzymuje się na wyjściowym poziomie y_2^0/l^0). W fazie drugiej, konsumpcyjnej, następuje zahamowanie szybkiego wzrostu majątku w sektorze inwestycyjnym (majątek i produkcja sektora 1 rosną w tej fazie tylko ze stopą λ). Wzrastają inwestycje w sektorze 2, rośnie szybko majątek i produkcja tego sektora (jednak z upływem czasu coraz wolniej). Rośnie także (gasząco) konsumpcja na osobę.

Przy przejściu od fazy inwestycyjnej do fazy konsumpcyjnej (w momencie τ) obserwujemy gwałtowny spadek inwestycji w sektorze 1 ich wzrost w sektorze 2 (rys. 1a - 1b).



Rys. 1a. Optymalne trajektorie produkcji w sektorach - rozwiązanie zadań (a'), (b')
Rys. 1b. Optymalny podział inwestycji (udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych) - rozwiązanie zadań (a'), (b')

4. Ciągłość trajektorii inwestycji w sektorach. Trzecie zadanie sterowania optymalnego

W praktyce gwałtowne zmiany w strukturze inwestycji, zwłaszcza w ich podziale między sektory wytwarzające środki produkcji i dobra konsumpcyjne są zjawiskiem niepożądanym. Inercyjność procesów inwestycyjnych powoduje, że za realne można uznać tylko takie procesy wzrostu, w których trajektorie inwestycji w sektorach będą funkcjami ciągłymi i dostatecznie gładkimi. W zadaniach (a'), (b') warunek ten zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy analogiczne własności będzie miała funkcja α_T. Nie będzie ona jednak mogła wówczas pełnić roli „steru", ponieważ przypisując jej tę rolę zakładamy automatycznie, że należy ona do klasy funkcji przedziałami ciągłych. Jeżeli pożądane jest, by podział inwestycji między sektory opisywały funkcje dostatecznie gładkie, np. ciągłe i przedziałami różniczkowalne, to funkcję α_T należy potraktować jako kolejną współrzędną trajektorii stanów systemu przypisując rolę „steru" takiej innej funkcji, wprowadzonej dodatkowo i mającej określoną interpretację ekonomiczną, której nieciągłość nie budziłaby zastrzeżeń. Można tego dokonać wieloma sposobami. Jeden z nich przedstawimy dalej dokonując prostej modyfikacji zadania (b').

Oznaczmy przez $\beta^0 > 0$ minimalny, a przez $\beta^1 > \beta^0$ - maksymalny udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w ich „nadwyżce" ponad tę wielkość, która jest niezbędna, aby majątek w obu sektorach rósł ze stopą λ ($\beta^1 < 1$). Niech funkcja α_T będzie rozwiązaniem równania

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \tag{3.1}$$

($\omega > 0$) z warunkiem początkowym $\alpha(t_o) = \alpha^o \in [\beta^o, \beta^1]$ i funkcją $\beta \in \tilde{C}^o[T]$ z wartościami w $[\beta^o, \beta^1]$ $\forall t \in T$. Wówczas $\alpha \in C^o[T]$, $\alpha(t) \in [\beta^o, \beta^1]$ na T. Rozpatrzmy zadanie sterowania:

$$\max a_2 f_2(t_1) \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t)\left[(a_1-\mu-\lambda) f_1(t) - (\mu+\lambda) f_2(t)\right]$$

$$\frac{d}{dt} f_2(t) = (1-\alpha(t))\left[(a_1-\mu-\lambda) f_1(t) - (\mu+\lambda) f_2(t)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \tag{3.3}$$

$$\beta(t) \in [\beta^o, \beta], \qquad \beta \in \tilde{C}^o[T]$$

$$(f_1(t_o),\ f_2(t_o),\ \alpha(t_o)) = (f_1^o, f_2^o, \alpha^o) \quad (f_1^o, f_2^o > 0,\ \alpha^o \in [\beta^o, \beta^1])$$

Rolę sterowania w zadaniu tym gra funkcja $\beta \in \tilde{C}^o[T]$, za którą „nadąża" zgodnie z (3.1) trajektoria $\alpha \in C^o[T]$. W celu rozwiązania zadania (3.2) - (3.3) przedstawimy je w prostszej postaci (zredukujemy jego rozmiary). Przyjmując oznaczenie:

$$g(t) = (a_1 - \mu - \lambda)f_1(t) - (\mu + \lambda)f_2(t) \tag{3.4}$$

(inwestycje w przeliczeniu na osobę pozostające po odliczeniu tej ich części, która jest niezbędna dla zapewnienia wzrostu majątku w sektorach ze stopą λ, wymiar: zł/R·L) otrzymujemy następujące zadanie równoważne z zadaniem (3.2) - (3.3):

$$\max \int_T a_2(1-\alpha(t))\, g(t)dt \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} g(t) = (a_1 \alpha(t) - \mu - \lambda)\, g(t) \\ &\frac{d}{dt} \alpha(t) = \omega(\beta(t) - \alpha(t)) \\ &\beta(t) \in [\beta^0, \beta^1], \qquad \beta \in \tilde{C}^0[T] \\ &(g(t_0), \alpha(t_0)) = (g^0, \alpha^0) \quad (g^0 > 0, \ \alpha^0 \in [\beta^0, \beta^1]), \end{aligned} \tag{3.6}$$

($g^0 = (a_1 - \mu - \lambda)f_1^0 - (\mu + \lambda) f_2^0 > 0$ przy założeniu 1). Zadania (3.2)-(3.3) i (3.5) - (3.6) są równoważne w tym sensie, że proces $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$ będzie rozwiązaniem zadania (3.5)-(3.6) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (3.2)-(3.3) będzie proces $(\beta^*, f^*, \alpha^*)_T$, gdzie związek trajektorii f_T^* i g_T^* określa równanie (3.4) oraz para równań:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} f_1(t) = \alpha(t)g(t) \\ &\frac{d}{dt} f_2(t) = (1-\alpha(t))g(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Proces dopuszczalny w zadaniu (3.5)-(3.6) tworzy każda trójka $(\beta, g, \alpha)_T$ spełniająca układ (3.6). Proces optymalny - trójka $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$ maksymalizująca funkcjonał (3.5). W procesie dopuszczalnym trajektoria g_T jest wszędzie dodatnia. O parametrach zadania będziemy zakładać, że spełniają warunki.

Założenie 2. $\beta^0 > \frac{\mu+\lambda}{a_1}$, $\qquad \omega > a_1\beta^1 - \mu - \lambda$.

W realnej gospodarce warunki te są praktycznie zawsze spełnione, a omawiane zadania sterowania można rozwiązać i bez tego założenia, z tym że trzebaby wówczas kolejno rozpatrywać przypadki:

$$\beta^0 \gtreqless (\mu+\lambda)/a_1, \ \omega \gtreqless a_1\beta^1 - \mu - \lambda .$$

Twierdzenie 3. Przy założeniu 2 rozwiązanie zadania (3.5)-(3.6) jest następujące:

Istnieje taka liczba $\Theta > 0$, że jeżeli horyzont czasu T jest długi, $t_1 - t_0 > \Theta$, wtedy rozwiązaniem zadania ejest proces $(\beta^*, g^*, \alpha^*)_T$:

$$\beta^{*}(t) = \begin{cases} \beta^{1} & \text{dla} \quad t \in [t_o, \tau] \\ \beta^{o} & \text{dla} \quad t \in [\tau, t_1] \end{cases}$$

$$g^{*}(t) = \begin{cases} g^{o}\, e^{\varphi_1(t)} & \text{dla} \quad t \in [t_o, \tau) \\ g^{*}(\tau)\, e^{\varphi_2(\tau;t)} & \text{dla} \quad t \quad [\tau, t_1] \end{cases}$$

$$\alpha^{*}(t) = \begin{cases} (\alpha^{o} - \beta^{1}) e^{-\omega(t-t_o)} + \beta^{1} & \text{dla} \quad t \in [t_o, \tau) \\ (\alpha^{*}(\tau) - \beta^{o})\, e^{-\omega(t-t_o)} + \beta^{o} & \text{dla} \quad t \quad [\tau, t_1] \end{cases}$$

z momentem „przełączenie" sterowania $\tau \in \operatorname{int} T$, gdzie $\varphi_1(t) = a_1 \omega^{-1}(\alpha^{o} - \beta^{1})(1 - \exp\{-\omega(t-t_o)\}) + (a_1\beta^{1} - \mu - \lambda)(t - t_o)$, $\varphi_2(\tau;t) = a_1 \omega^{-1}(\alpha^{*}(\tau) - \beta^{o})(1 - \exp\{-\omega(t-\tau)\}) + (a_1\beta^{o} - \mu - \lambda)(t-\tau)$. W krótkim horyzoncie czasu T, tzn. gdy $t_1 - t_o \leqslant \Theta$, proces optymalny redukuje się do postaci

$$(**) \quad \beta^{*}(t) = \beta^{o}, \quad g^{*}(t) = g^{o}\, e^{\varphi_2(t_o;t)}, \quad \alpha^{*}(t) = (\alpha^{o} - \beta^{o}) e^{-\omega(t-t_o)} + \beta^{o}$$

w każdym momencie czasu $t \in T$ (tutaj: $\varphi_2(t_o;t) = \varphi_2(\tau;t)$ dla $\tau = t_o$).

Dowód. Z zasady maksimum (punkt 1) otrzymujemy następujące warunki optymalności procesu $(\beta^{*}, g^{*}, \alpha^{*})_T$ w zadaniu (3.5)-(3.6):

Istnieje takie rozwiązanie $\psi_T = (\psi_1, \psi_2)_T$ układu równań

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_1(t) &= -(a_1\alpha^{*}(t) - \mu - \lambda)\psi_1(t) - a_2(1 - \alpha^{*}(t)) \\ \frac{d}{dt}\psi_2(t) &= -a_1 g^{*}(t)\psi_1(t) + \omega\psi_2(t) + a_2 g^{*}(t) \end{aligned}$$

z warunkiem końcowym

$$(2) \quad \psi_1(t_1) = \psi_2(t_1) = 0,$$

że

$$(3) \quad \begin{aligned} \beta^{*}(t) &= \beta^{1}, \quad \text{jeżeli} \quad \psi_2(t) > 0, \\ \beta^{*}(t) &= \beta^{o}, \quad \text{jeżeli} \quad \psi_2(t) < 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $\psi_2(t_1) = 0$, $d\psi_2(t)/dt\big|_{t=t_1} > 0$, zatem $\beta^{*}(t) = \beta^{o}$ $\forall t \in \in U(\varepsilon; t_1)$, gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią. Biorąc drugą pochodną funkcji ψ_2 i przyjmując oznaczenie $\varphi(t) = d\psi_2(t)/dt$ z (1) otrzymujemy równanie

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \omega\varphi(t) + a_2(a_1 - \mu - \lambda) g(t),$$

które prawie wszędzie na T spełnia ciągła funkcja φ. W jego rozwiąza-
niu

$$\varphi(t) = e^{\omega(t-t_1)}\left[\varphi(t_1) - a_2(a_1-\mu-\lambda)\int_t^{t_1} e^{-\omega(\theta-t_1)}\, g(\theta)\,d\theta\right]$$

funkcja podcałkowa jest zawsze dodatnia, zatem wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest funkcją rosnącą i φ rośnie na T. Istnieje zatem nie więcej niż jeden punkt $\tau \in \text{int } T$ (poza punktem t_1), w którym $\psi_2(\tau)=0$. Tak więc, albo $\psi_2(t) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T$ i warunki optymalności spełnia proces (**) ze sterowaniem $\beta^{*}(t) = \beta^{o}$ na T, albo $\tau \in \text{int } T$ i warunki optymalności spełnia proces (*) ze sterowaniem

$$\beta^{*}(t) = \begin{cases} \beta^{1}, & \text{dla} \quad t \in [t_o, \tau) \\ \beta^{o}, & \text{dla} \quad t \in [\tau, t_1]. \end{cases}$$

Przy założeniu 2 rozwiązanie układu równań

$$\frac{d}{dt}\xi_1(t) = -(a_1\beta^{o} - \mu - \lambda)\,\xi_1(t) - a_2(1-\beta^{1})$$

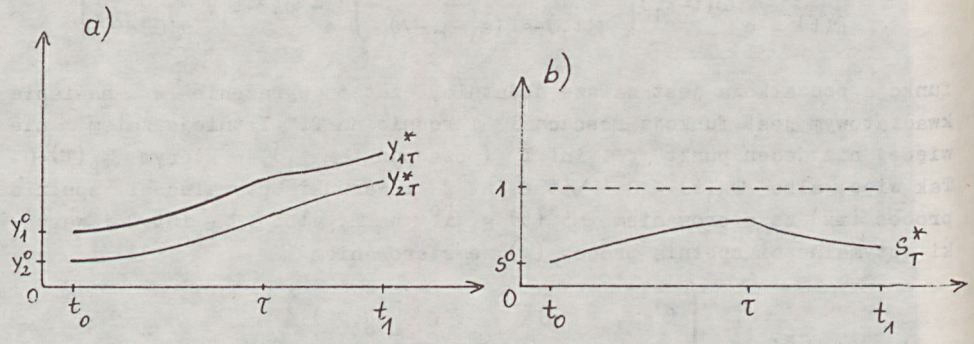
$$\frac{d}{dt}\xi_2(t) = -a_1 g^{o}\xi_1(t) + \omega\xi_2(t) + a_2 g^{o} e^{(a_1\beta^{1}-\mu-\lambda)(t-t_o)}$$

z warunkiem końcowym $\xi_1(t_1) = \xi_2(t_1) = 0$ spełnia warunek $\xi_i(t) \leqslant \psi_i(t) \quad \forall t \in T$, $\xi_i(t) \longrightarrow +\infty$ przy $t_1 - t_o \longrightarrow +\infty$ $(i = 1,2)$. Istnieje więc taka liczba $\theta > 0$, że $\psi_2(t_o) > 0$ oraz $\psi_2(\tau) = 0$ dla pewnego $\tau \geqslant t_1 - \theta$ $(\tau < t_1)$, jeżeli tylko $t_1 - t_o > \theta$. Rozwiązaniem zadania jest wtedy proces (*) z punktem „przełączenia" $\tau \in \text{int } T$. Jeżeli $t_1 - t_o \leqslant \theta$, wtedy $\psi_2(t) < 0 \quad \forall t \in \text{int } T$ i rozwiązaniem zadania jest proces (**).

Optymalne trajektorie majątku produkcyjnego na osobę w sektorach otrzymujemy z rozwiązania równań (3.7), natomiast trajektorie majątku i produkcji - z (2.10), (2.2). Wszystkie trajektorie za wyjątkiem trajektorii α_T^{*} są funkcjami rosnącymi, niezależnie od długości horyzontu czasu T. Postać trajektorii α_T^{*} zależy od stanu początkowego α^{o} i długości horyzontu czasu T.

(i) $\alpha^{o} \in (\beta^{o}, \beta^{1})$. Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy w łącznych nakładach inwestycyjnych stale rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne (α_T^{*} jest funkcją malejącą). Z czasem majątek i produkcja sektora 2 (konsumpcja) zaczynają rosnąć szybciej, niż majątek i produkcja sektora 1.

W długim horyzoncie czasu T, w fazie pierwszej (inwestycyjnej), w łącznych nakładach inwestycyjnych rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 1 wytwarzającego dobra inwestycyjne. Majątek i produkcja tego sektora rosną coraz szybciej. W fazie drugiej (konsumpcyjnej) zaczyna wzrastać udział inwestycji kierowanych do sektora 2, co powoduje przyspieszony wzrost jego majątku i produkcji (konsumpcji). Majątek i produkcja sektora 1 rosną wolniej, niż w fazie pierwszej (rys. 2a-2b).



Rys. 2a. Optymalne trajektorie produkcji w sektorach - rozwiązanie zadania (3.5)-(3.6)

Rys. 2b. Optymalny podział inwestycji (udział inwestycji kierowanych do sektora 1 w całkowitych nakładach inwestycyjnych) - rozwiązanie zadania (3.5)-(3.6)

(ii) $\alpha^o = \beta^o$ (podział inwestycji w fazie początkowej „korzystany" dla sektora 2). Jeżeli horyzont czasu T jest krótki, wtedy w całym horyzoncie zachowany zostaje wyjściowy podział α^o. Majątek produkcyjny i produkcja sektora 2 (konsumpcja) rosną szybciej, niż majątek i produkcja sektora inwestycyjnego. W długim horyzoncie czasu, w pierwszej fazie rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 1, co wywołuje najpierw wolny, potem coraz szybszy wzrost jego majątku i produkcji. Majątek i produkcja sektora 2 (konsumpcja) rosną najpierw szybko, potem coraz wolniej. W drugiej fazie zaczyna rosnąć udział inwestycji kierowanych do sektora 2 co powoduje szybszy wzrost jego majątku i produkcji (konsumpcji). Wzrost majątku i produkcji sektora inwestycyjnego jest w tej fazie wolniejszy, niż w fazie pierwszej.

(iii) $\alpha^o = \beta^1$ (podział inwestycji w fazie początkowej „korzystny" dla sektora 1). W krótkim horyzoncie czasu T rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2. Jego majątek i produkcja (konsumpcja) rosną najpierw wolno, potem coraz szybciej. W sektorze inwestycyjnym, przeciwnie, przyspieszony wzrost majątku produkcji na początku zostaje nieco zahamowany pod koniec horyzontu czasu T. W długim horyzoncie czasu, w fazie pierwszej dynamicznie rośnie majątek i produkcja sektora inwestycyjnego, wolniej - majątek i produkcja sektora 2 (konsumpcja). W fazie tej zachowany zostaje wyjściowy, korzystny dla sektora 1, podział inwestycji. W fazie drugiej rośnie udział inwestycji kierowanych do sektora 2. Najpierw wolno, potem coraz szybciej rośnie majątek i produkcja sektora 2 (konsumpcja). Majątek i produkcja sektora 1 rosną wolniej, niż w fazie pierwszej.

Trajektorie majątku produkcyjnego i produkcji w sektorach są funkcjami gładkimi na T. Te same własności ma, oczywiście, także trajektoria konsumpcji. Trajektorie inwestycji w sektorach, które w rozwiązaniach zadań (a'), (b') były funkcjami nieciągłymi, obecnie są funkcjami ciągłymi, przedziałami gładkimi.

5. Uwagi końcowe

Jak wiele innych działów matematyki, teoria sterowania optymalnego powstała jako narzędzie badawcze zjawisk fizycznych, znacznie prostszych i łatwiejszych do opisu matematycznego od zjawisk ekonomiczno-społecznych. Nie należy się zatem zbyt dziwić, że podejmowanym przez ekonometryków próbom wykorzystania aparatu teorii sterowania do rozwiązania szeregu „klasycznych" zagadnień wzrostu (np. zagadnienia podziału dochodu narodowego na akumulację i konsumpcję, czy podziału inwestycji między sektory) towarzyszy pewien sceptycyzm teoretyków ekonomii podkreślających nierealność rozwiązań otrzymywanych na gruncie tej teorii. Spróbujmy przyjrzeć się temu bliżej.

W każdym zadaniu sterowania wyodrębnione zostają zmienne charakteryzujące „stan wewnętrzny" modelowanego obiektu oraz zmienne grające rolę „sterów". Funkcje wartości tych zmiennych w pewnym okresie czasu nazywamy trajektoriami. Postać trajektorii stanów(przy ustalonym stanie początkowym) zależy od postaci trajektorii sterowań. Formułując zadanie sterowania optymalnego musimy rozstrzygnąć, za pomocą jakich zmiennych opiszemy modelowany obiekt, jakie będą zależności matematyczne między tymi zmiennymi oraz które zmienne będą w takim zadaniu sterowaniami. Trajektorie sterowań mają bowiem bardzo ważną ze względu na zastosowania własność: mogą być zarówno ciągłymi, jak i przedziałami ciągłymi funkcjami czasu, w szczególności funkcjami typu „włącz-wyłącz". Zjawiska takie, często dopuszczalne w procesie sterowania obiektami fizycznymi, bywają nie do przyjęcia jako rozwiązania najlepsze w sferze sterowania procesami ekonomicznymi.

W rozwiązaniach zadań (a'), (b'), w których rolę „steru" przypisaliśmy funkcji α_T (podziału między sektory „nadwyżki" inwestycyjnej ponad tę ich wielkość, która jest niezbędna, aby majątek w obu sektorach mógł rosnąć ze stopą λ), stwierdzamy gwałtowny skok w strukturze i poziomie inwestycji w sektorach w momencie przejścia od inwestycyjnej do konsumpcyjnej fazy wzrostu. Tymczasem z obserwacji zjawisk ekonomicznych wynika, że ich „skokowy", nieregularny przebieg jest tak ze społecznego, jak i z czysto technicznego punktu widzenia niepożądany, a często wręcz niedopuszczalny. Postulat natychmiastowego, gwałtownego wzrostu nakładów inwestycyjnych jest niewykonalny, ponieważ w krótkim czasie technicznie niemożliwa jest ich nadmierna akumulacja. Podobnie, co najmniej nieracjonalna jest gwałtowna redukcja inwestycji ze względu na inercyjny charakter procesów inwestycyjnych. Powstaje pytanie, czy wobec tego aparat teorii sterowania optymalnego może mieć większe znaczenie jako narzędzie badawcze zjawisk ekonomiczno-społecznych? Rozwiązanie zadania (3.5)-(3.6) pokazuje, że tak, a zarzuty o nierealność rozwiązań należy kierować pod adresem założeń modeli, a nie teorii sterowania. Podstawy większości modeli wzrostu opracowane zostały bowiem, zanim powstała teoria sterowania optymalnego, a z zastosowaniem jej metod w ekonomii matematycznej wiąże się konieczność weryfikacji „tradycyjnych" założeń

modeli w świetle ich nowej interpretacji ekonomicznej. „Mechaniczne" uogólnienia prowadzą bowiem z reguły do rozwiązań nie do przyjęcia w świetle naszej wiedzy o wzroście, jak to pokazują rozwiązania zadań (a'), (b').

Środki przedsięwzięte w celu wyeliminowania nieregularnych procesów wzrostu w zadaniu (3.5)-(3.6) nie zmieniły jednej generalnej własności tych procesów. W rozwiązaniach wszystkich trzech zadań, w praktycznie ciekawych sytuacjach, jako początkowa w optymalnych procesach wzrostu występuje faza inwestycyjna, w której ograniczony zostaje strumień inwestycji kierowanych do sektora 2 wytwarzającego dobra konsumpcyjne (w granicach, które określają założenia modeli) na rzecz zwiększonych inwestycji w sektorze 1 wytwarzającym środki produkcji. We wszystkich bez wyjątku zadaniach optymalne procesy wzrostu kończą się fazą konsumpcyjną, w której rośnie strumień inwestycji kierowanych do sektora 2 i tym samym zasób majątku produkcyjnego i produkcja tego sektora.

Dlaczego w rozwiązaniach wszystkich trzech zadań optymalne procesy wzrostu rozpoczynają się od fazy inwestycyjnej i kończą fazą konsumpcyjną? Jeżeli kryterium wzrostu byłaby nie maksymalizacja konsumpcji (produkcji sektora 2), lecz na przykład maksymalizacja produkcji dóbr inwestycyjnych (produkcji sektora 1), wtedy w żadnym procesie optymalnym, niezależnie od długości horyzontu czasu T, nie pojawiłaby się faza konsumpcyjna. Samo występowanie konsumpcyjnej fazy wzrostu w procesach optymalnych jest związane z „konsumpcyjnymi" kryteriami wzrostu, co oczywiście nie wyjaśnia jeszcze, dlaczego w rozwiązaniach faza ta zamyka horyzont czasu T.

Załóżmy, że faza konsumpcyjna nie kończy procesu wzrostu, lecz pojawia się wcześniej. Tak więc po fazie konsumpcyjnej wystąpi jeszcze inna, nie konsumpcyjna, faza, w której możnaby zwiększyć produkcję dóbr konsumpcyjnych, ale nie czyni się tego - mniejsza o to, z jakich powodów. W świetle „konsumpcyjnych" kryteriów wzrostu faza ta nie będzie w pełni wykorzystana, a więc proces taki nie będzie optymalny. Równocześnie brak w ogóle fazy inwestycyjnej oznacza na dłuższą metę kurczenie się majątku, a w konsekwencji spadek produkcji i konsumpcji. Nieopłacalne jest również „przesunięcie" tej fazy, a więc poprzedzenie jej jakąkolwiek inną fazą wzrostu. Oznaczałoby to bowiem rezygnację z możliwości szybkiego doinwestowania gospodarki w okresie początkowym i stworzenia odpowiednio wysokiego potencjału wytwórczego pozwalającego na zwiększenie produkcji dóbr konsumpcyjnych w okresie następnym.

Literatura

[1] Bołtiański W.G. Metody matematyczne sterowania optymalnego. WNT, Warszawa 1970.

[2] Czerwiński Z. Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego, PWE, Warszawa 1973.

Optimal trajectories of growth in two-sector model of the economy

Summary

Solution of the three tasks of optimal control of growth in two-sector, one-factor economy with autonoumous path of population growth was presented in the paper. The first two tasks differ from each other only in the criterion of growth. In the third task a certain block of conditions was added which eliminate rapid changes - unreal from the economic point of view - in the distribution of investments between the sectors which were revealed in the solutions of the previous problems.