Stanisław Gorzeński

TWIERDZENIA O ZANURZANIU DLA PRZESTRZENI F^s_{Pq} i B^s_{Pq}

Celem pracy jest przedstawienie pewnych twierdzeń o zanurzaniu dla przestrzeni F^s_{Pq} i B^s_{Pq} (por. definicje 3.1 i 3.2 w pracy [2]).

1. Definicje i oznaczenia

Jeżeli $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, to przez L_P oznaczać będziemy przestrzeń funkcji całkowalnych z mieszaną normą (por. [1]).

Jeżeli $W(x,y)$ jest relacją między zmiennymi x i y oraz P i Q są n-wymiarowymi wektorami to $W(P,Q)$ oznaczać będzie n relacji $W(p_i,q_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$.

1.1. Definicja. Przez l^s_q oznaczać będziemy przestrzeń ciągów zespolonych z normą

$$\|t\|_{l^s_q} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{skq}|t_k|^q\Big)^{1/q}, \quad \text{dla } 1 \leqslant q \leqslant \infty, \ -\infty < s < \infty$$

oraz

$$\|t\|_{l^s_\infty} = \sup_k 2^{sk}|t_k| \text{ dla } q = \infty, \quad -\infty < s < \infty.$$

1.2. Definicja. Jeżeli E i E_1 są przestrzeniami unormowanymi takimi, że $E \subset E_1$, oraz jeżeli

$$\|x\|_{E_1} \leqslant c\,\|x\|_E,$$

gdzie $\|\cdot\|_{E}$ i $\|\cdot\|_{E_1}$ są normami w przestrzeniach E i E_1, a stała c nie zależy od elementu x, to będziemy mówić, że przestrzeń E jest zanurzona w przestrzeni E_1. Piszemy wtedy $E \longrightarrow E_1$.

1.3. Lemat. Dla $-\infty < s < \infty$ i $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$ mamy

$$l_1^s \longrightarrow l_q^s \longrightarrow l_r^s \longrightarrow l_\infty^s, \quad \text{oraz} \quad \|t\|_{l_\infty^s} \leqslant \|t\|_{l_r^s} \leqslant \|t\|_{l_q^s} \leqslant \|t\|_{l_1^s}.$$

Dowód. Jeżeli $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$, to na podstawie nierówności Jenssena $l_q \longrightarrow l_r$ i $\|t\|_{l_r} \leqslant \|t\|_{l_q}$. Mamy

$$\|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^s} = \|\{2^{sk}t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q}.$$

Stąd dla $1 \leqslant q \leqslant \infty$

$$\|\{2^{sk}\,t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_\infty} \leqslant \|\{2^{sk}\,t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_r} \leqslant \|\{2^{sk}\,t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q} \leqslant \|\{2^{sk}\,t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_1}.$$

Zatem

$$\|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_\infty^s} \leqslant \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_r^s} \leqslant \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^s} \leqslant \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_1^s},$$

co kończy dowód.

1.4. Lemat. Dla $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $-\infty < s < \infty$ i dla $\varepsilon > 0$

$$l_\infty^{s+\varepsilon} \longrightarrow l_q^s \longrightarrow l_1^{s-\varepsilon}.$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że dla $\varepsilon > 0$, $l_\infty^{s+\varepsilon} \longrightarrow l_q^s$.
Niech $t = \{t_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^{s+\varepsilon}$. Mamy wtedy

$$(1.1) \qquad \|t\|_{l_q^s} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq}\,|t_k|^q\Big)^{1/q} =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k\varepsilon}2^{k(s+\varepsilon)}\,|t_k|)^q\Big)^{1/q} \leqslant \sup_k 2^{k(s+\varepsilon)}\,|t_k| \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kq\varepsilon}\Big)^{1/q} =$$

$$= \sup_k 2^{k(s+\varepsilon)}\,|t_k|\;\|\{2^{-k\varepsilon}\}\|_{l_q} = c\,\|t\|_{l_\infty^{s+\varepsilon}}.$$

Dla dowodu drugiej części lematu pokażemy najpierw, że dla $\varepsilon > 0$

$$l_q^s \longrightarrow l_\infty^s \longrightarrow l_1^{s-\varepsilon},$$

oraz

$$\|t\|_{l_1^{s-\varepsilon}} \leqslant c\,\|t\|_{l_\infty^s} \leqslant c\,\|t\|_{l_q^s}.$$

Niech $t = \{t_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_q^s$. Mamy

$$(1.2) \qquad \|t\|_{l_1^{s-\varepsilon}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(s-\varepsilon)} |t_k| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{sk} 2^{-k\varepsilon} |t_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k 2^{sk} |t_k| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\varepsilon} = c \sup_k 2^{sk} |t_k| \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |t_k|^q \right)^{1/q} = c \|t\|_{l_q^s}.$$

1.5. Lemat. Jeżeli $-\infty < u < s < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, to $l_q^s \longrightarrow l_q^u$ i $\|t\|_{l_q^u} \leqslant c \|t\|_{l_q^s}$.

Dowód. Niech $u = s-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Dla $1 \leqslant q < \infty$ mamy

$$\|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^u} = \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^{s-\varepsilon}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s-\varepsilon)kq} |t_k|^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |t_k|^q 2^{-\varepsilon kq} \right)^{1/q} \leqslant c \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |t_k|^q \right)^{1/q} = c \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^s}.$$

Dla $q = \infty$

$$\|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l^u} = \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_{\infty}^{s-\varepsilon}} = \sup_k 2^{(s-\varepsilon)k} |t_k| =$$

$$= \sup_k 2^{-\varepsilon k} 2^{sk} |t_k| \leqslant c \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_{\infty}^s}.$$

1.6. Lemat. Jeżeli $1 \leqslant q < r < \infty$, $-\infty < u < s < \infty$, to $l_r^s \longrightarrow l_q^u$ i $\|t\|_{l_q^u} \leqslant c \|t\|_{l_r^s}$.

Dowód. Niech $t = \{t_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_r^s$, czyli $\{2^{sk} t_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_r$. Wtedy dla $q < r$ mamy $\{2^{skq} |t_k|^q\}_{k=0}^{\infty} \in l_{r/q}$, bowiem

$$\|\{2^{skq} |t_k|^q\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_{r/q}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq(r/q)} |t_k|^{q(r/q)} \right)^{q/r} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skr} |t_k|^r \right)^{(1/r)q} = \|\{t_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_r^s}^q < \infty.$$

Oznaczmy $r/q = a > 1$ i niech b będzie liczbą sprzężoną, $1/a + 1/b = 1$. Wtedy na mocy nierówności Höldera

$$\|t\|_{l_q^u} = \|t\|_{l_q^{s-\varepsilon}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(s-\varepsilon)kq} |t_k|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} |t_k|^q 2^{-\varepsilon kq} \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skqa} |t_k|^{qa} \right)^{(1/a)(1/q)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon kqb} \right)^{1/(qb)} =$$

$$= \| \{2^{-\varepsilon k}\}_{k=0}^{\infty} \|_{l_{qb}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skr} |t_k|^r \Big)^{1/r} = c \| \{t_k\}_{k=0}^{\infty} \|_{l_r^s},$$

gdzie $u = s - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, co kończy dowód.

1.7. Wniosek. Dla $-\infty < s < \infty$, $\varepsilon > 0$, $1 \leqslant q < r \leqslant \infty$,

$$l_\infty^{s+\varepsilon} \to l_1^s \to l_q^s \to l_r^s \to l_\infty^s \to l_1^{s-\varepsilon}$$
$$l_r^{s-\varepsilon} \leftarrow l_q^{s-\varepsilon}$$

2. Twierdzenia o zanurzaniu dla przestrzeni F_{Pq}^s i B_{Pq}^s

Przypomnijmy najpierw definicje przestrzeni F_{Pq}^s i B_{Pq}^s (por. [2]).

2.1. Oznaczmy przez M_j i M_0 następujące zbiory

$$M_j = \{t \in R_n: 2^{j-1} \leqslant |t| \leqslant 2^{j+1}\}, \qquad j = 1,2,\ldots;$$
$$M_0 = \{t \in R_n: |t| \leqslant 2\}.$$

Niech $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ będzie ciągiem dystrybucji temperowanych, $a_j \in S'(R_n)$, $j = 0,1,\ldots$; takim, że supp $Fa_j \subset M_j$ dla $j = 0,1,\ldots$;

2.2. Definicja. Niech $-\infty < s < \infty$, $1 < P < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$ i niech $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ będzie ciągiem jak w 2.1. Przez F_{Pq}^s oznaczać będziemy przestrzeń liniową tych dystrybucji $f \in S'(R_n)$, które można przedstawić w postaci

$$f \overset{S'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x), \tag{2.1}$$

oraz wprowadzimy w przestrzeni F_{Pq}^s normę w następujący sposób

$$\|f\|_{F_{Pq}^s} = \inf_{f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j} \| \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \|_{L_p(l_q^s)}. \tag{2.2}$$

2.3. Definicja. Niech $-\infty < s < \infty$, $1 < P < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ i niech $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ będzie ciągiem jak w 2.1. Przez B_{Pq}^s oznaczać będziemy przestrzeń liniową tych dystrybucji $f \in S'(R_n)$, które można przedstawić w postaci

$$f \overset{S'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x), \tag{2.3}$$

oraz wprowadzimy w przestrzeni B_{Pq}^s normę w następujący sposób

$$\|f\|_{F_{Pq}^s} = \inf_{f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j} \| \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \|_{l_q^s(L_p)}. \tag{2.4}$$

2.4. Definicja. Dla dowolnej liczby naturalnej N, oznaczymy przez U_N zbiór wszystkich układów funkcji $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, które mają następujące własności:

A. $\varphi_k(x) \in S(R_n)$, $(F\varphi_k)(t) \geqslant 0$ dla $k=0,1,2,\ldots$;

B. $\operatorname{supp} F\varphi_k \subset \{t \in R_n: 2^{k-N} \leqslant |t| \leqslant 2^{k+N}\}$ dla $k=1,2,\ldots$;
$\operatorname{supp} F\varphi_0 \subset \{t \in R_n: |t| \leqslant 2^N\}$;

C. istnieje liczba $c_1 > 0$ taka, że

$$c_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (F\varphi_k)(t);$$

D. dla dowolnego wielowskaźnika α istnieje liczba c_2 zależna od α taka, że $c_2(\alpha) > 0$ oraz
$D^{\alpha}(F\varphi_k)(t) \leqslant c_2(\alpha)/|t|^{|\alpha|}$ dla $k=0,1,2,\ldots$;

Oznaczymy przez U sumę $U = \bigcup_{N=1}^{\infty} U_N$.

Istnienie takich układów funkcji jest konsekwencją twierdzenia o rozkładzie jedności.

W dalszym ciągu posługiwać się będziemy następującym przykładem pochodzącym od H. Triebla [4].

Niech $(F\varphi)(t) \geqslant 0$ dla funkcji $\varphi \in S(R_n)$, przy czym przekształcenie Fouriera $F\varphi$ funkcji φ spełnia następujące warunki:

$$\operatorname{supp} F\varphi \subset \{t: 2^{-N} \leqslant |t| \leqslant 2^N\},$$

dla pewnej liczby naturalnej N, oraz

$$(F\varphi)(t) > 0 \quad \text{dla} \quad 1/\sqrt{2} \leqslant |t| \leqslant \sqrt{2}.$$

Kładąc $(F\varphi_k)(t) = (F\varphi)(2^{-k}t)$ dla $k=1,2,\ldots$; oraz wybierając odpowiednio funkcję φ_0 otrzymujemy układ funkcji $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in U_N$.
Jeżeli dodatkowo weźmiemy:

$$(F\psi_k)(t) = c(F\varphi_k)(t) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (F\varphi)(2^{-j}t) \quad \text{dla} \quad c > 0 \quad k=1,2,\ldots;$$

to wybierając w odpowiedni sposób funkcję ψ_0 otrzymamy inny układ funkcji $\{\psi_k\}_{k=0} \in U_N$ dla którego spełniona jest tożsamość

$$\sum_{k=0}^{\infty} (F\psi_k)(t) \equiv c.$$

2.5. Twierdzenie. Niech $1 < P \leqslant Q < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $-\infty < t \leqslant s < \infty$. Jeżeli

$$s - \sum_{i=1}^{n} 1/p_i = t - \sum_{i=1}^{n} 1/q_i,$$

to

$$B_{Pr}^{s} \longrightarrow B_{Qr}^{t}.$$

Dowód. Niech $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \in U$ oraz $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \in U$, gdzie $(F\psi_k)(t) = 1$ gdy $t \in \operatorname{supp} F\varphi_k$ dla $k=0,1,2,\ldots$; Niech $f \in B^s_{Pr}$, wtedy $f * \varphi_k \in L_P$. Jeżeli dla $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ spełniony jest warunek

$$1/P + 1/R = 1 + 1/Q,$$

to na podstawie nierówności Younga (A. Benedek, R. Panzone [1])

$$\| f*\varphi_k \|_{L_Q} = \| f*\varphi_k*\psi_k \|_{L_Q} \leqslant \| \psi_k \|_{L_R} \| f*\varphi_k \|_{L_P}.$$

Z konstrukcji funkcji ψ_k (por. definicja 2.4), mamy $(F\psi_k)(t) = (F\psi)(2^{-k}t)$, zatem:

$$\psi_k(x) = 2^{kn}\, \psi(2^k x) \qquad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots;$$

Wtedy

$$\| \psi_k \|_{L_R} = \| 2^{kn}\, \psi(2^k x) \|_{L_R} =$$

$$= 2^{kn} \Big(\int_{R_n} \Big(\cdots \Big(\int_{R_n} |\psi(2^k x_1, \ldots 2^k x_n)|^{p_1} dx_1 \Big)^{p_2/p_1} dx_2 \cdots \Big)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \Big)^{1/p_n}.$$

Niech $2^k x_1 = t_1, \ldots, 2^k x_n = t_n$.

Wtedy

$$\| \psi_k \|_{L_R} = 2^{kn}\, 2^{-k/p_1} \| \psi(2^k x_2, \ldots, 2^k x_n) \|_{L(r_2,\ldots,r_n)} = \cdots =$$

$$= 2^{kn}\, 2^{-k(\sum 1/r_i)} \| \psi \|_{L_R} = 2^{k(n-\sum 1/r_i)} \| \psi \|_{L_R}.$$

Zatem

$$\| f*\varphi_k \|_{L_Q} \leqslant 2^{k(n-\sum 1/r_i)} \| \psi \|_{L_R} \| f*\varphi_k \|_{L_P} = c\, 2^{k(n-\sum 1/r_i)} \| f*\varphi_k \|_{L_P}.$$

Z założenia mamy $s - \sum_{i=1}^{n} 1/p_i = t - \sum_{i=1}^{n} 1/q_i$ oraz $1/r_i = 1-1/p_i+1/q_i$.

Z równości tych oraz z twierdzenia o normach równoważnych (por. [3]), otrzymujemy:

$$\| f \|_{B^t_{Qr}} \leqslant c \| \{f*\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \|_{l^r_r(L_Q)} = c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{tkr} \| f*\varphi_k \|^r_{L_Q} \Big)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{tkr}\, 2^{k(n-\sum 1/r_i)r} \| f*\varphi_k \|^r_{L_P} \Big)^{1/r} =$$

$$= c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (2^t\, 2^{(n-\sum 1/r_i)})^{kr} \| f*\varphi_k \|^r_{L_P} \Big)^{1/r} =$$

$$= c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(t+\sum(1/p_i-1/q_i))\,kr} \| f*\varphi_k \|^r_{L_P} \Big)^{1/r} =$$

$$= c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skr} \| f * \varphi_k \|_{L_P}^r \Big)^{1/r} = c \, \| \{ f * \varphi_k \}_{k=0}^{\infty} \|_{l_r^s(L_P)} \leqslant c \, \| f \|_{B_{Pr}^s}.$$

Wobec ostatnich nierówności $B_{Pr}^s \longrightarrow B_{Qr}^t$, co kończy dowód.

2.6. Twierdzenie. Niech $1 < P \leqslant Q < \infty$ i $-\infty < t < s < \infty$. Jeżeli $1 \leqslant r < z \leqslant \infty$ i

$$s - \sum_{i=1}^{n} 1/p_i > t - \sum_{i=1}^{n} 1/q_i,$$

to

$$B_{Pr}^s \longrightarrow B_{Qz}^t.$$

Dowód. Niech $f \in B_{Pr}^s$. Wtedy dla $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ mamy jak w twierdzeniu 2.5

$$\| f * \varphi_k \|_{L_Q} \leqslant c \, 2^{k(n-\sum 1/r_i)} \| f * \varphi_k \|_{L_P}, \quad \text{dla} \quad 1/P + 1/R = 1 + 1/Q.$$

Zatem na podstawie twierdzenia o normach równoważnych (por. [3]) i na podstawie lematu 1.6 otrzymujemy:

$$\| f \|_{B_{Qz}^t} \leqslant c \, \| \{ f * \varphi_k \}_{k=0}^{\infty} \|_{l_z^t(L_Q)} = c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{tkz} \| f * \varphi_k \|_{L_Q}^z \Big)^{1/z} \leqslant$$

$$\leqslant c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{tkz} \, 2^{k(n-\sum 1/r_i)z} \| f * \varphi_k \|_{L_P}^z \Big)^{1/z} =$$

$$= c \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(t+\sum(1/p_i-1/q_i))\,kz} \| f * \varphi_k \|_{L_P}^z \Big)^{1/z} =$$

$$= c \, \| \{ 2^{(t+\sum(1/p_i-1/q_i))\,k} \| f * \varphi_k \|_{L_P}^{\infty} \}_{k=0} \|_{l_z} \leqslant$$

$$\leqslant c \, \| \{ 2^{sk} \| f * \varphi_k \|_{L_P} \}_{k=0}^{\infty} \|_{l_r} = c \, \| \{ f * \varphi_k \}_{k=0}^{\infty} \|_{l_r^s(L_P)} \leqslant c \, \| f \|_{B_{Pr}^s},$$

co kończy dowód.

2.7. Lemat. Niech $-\infty < s < \infty$, $P = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant q \leqslant p_i < \infty$ dla $i = 1,2,\ldots,n$; Jeżeli $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in l_q^s(L_P)$, to $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in L_P(l_q^s)$ oraz zachodzi nierówność

$$\| \{ a_j \}_{j=0}^{\infty} \|_{L_P(l_q^s)} \leqslant \| \{ a_j \}_{j=0}^{\infty} \|_{l_q^s(L_P)}.$$

2.8. Twierdzenie. Jeżeli $P = (p_1, \ldots, p_n)$ oraz $1 < q < p_i < \infty$ dla $i = 1,2,\ldots,n$; to $B_{Pq}^s \longrightarrow F_{Pq}^s$.

Dowód. Należy pokazać, że jeżeli $f \in B_{Pq}^s$, to istnieje stała c, niezależna od f taka, że spełniona jest nierówność

$$\| f \|_{F_{Pq}^s} \leqslant c \, \| f \|_{B_{Pq}^s}.$$

Niech $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in U$ oraz $f \in B_{Pq}^s$. Na podstawie twierdzenia o normach równoważnych (por. [3]) oraz na podstawie lematu 2.7 mamy

$$\|f\|_{F_{Pq}^s} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{B_p(l_q^s)} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^s(L_p)} \leqslant c \|f\|_{B_{Pq}^s},$$

co należało udowodnić.

2.9. Lemat. Niech $-\infty < s < \infty$, $P = (p_1,\ldots,p_n)$ oraz $1 < p_i \leqslant q < \infty$ dla $i = 1,2,\ldots,n$; Jeżeli $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in L_p(l_q^s)$, to $\{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in l_q^s(L_p)$ oraz

$$\|\{a_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{l_q^s(L_p)} \leqslant \|\{a_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{L_p(l_q^s)}. \tag{2.5}$$

2.10. Twierdzenie. Jeżeli $P = (p_1,\ldots,p_n)$ oraz $1 < p_i \leqslant q < \infty$, to $F_{Pq}^s \longrightarrow B_{Pq}^s$.

Dowód. Należy pokazać, że jeżeli $f \in F_{Pq}^s$, to istnieje stała c, niezależna od f taka, że

$$\|f\|_{B_{Pq}^s} \leqslant c \|f\|_{F_{Pq}^s}.$$

Niech $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in U$, wtedy na podstawie twierdzenia o normach równoważnych (por. [3]) oraz na podstawie lematu 2.9 mamy

$$\|f\|_{B_{Pq}^s} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l_q^s(L_p)} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p(l_q^s)} \leqslant c \|f\|_{F_{Pq}^s},$$

co należało wykazać.

2.11. Twierdzenie. Jeżeli $P = (p_1,\ldots,p_n)$, $1 < p_i < \infty$ oraz $1 < q \leqslant r < \infty$, to $F_{Pq}^s \longrightarrow F_{Pr}^s$.

Dowód. Jeżeli $q \leqslant r$, to na mocy lematu 1.3 $l_q^s \longrightarrow l_r^s$ i

$$\|\{a_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{l_r^s} \leqslant \|\{a_j\}_{j=0}^{\infty}\|_{l_q^s}.$$

Zatem na podstawie twierdzenia o normach równoważnych (por. [3]), mamy dla $f \in F_{Pq}^s$ i dla $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \in U$

$$\|f\|_{F_{Pr}^s} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}\|_{L_p(l_r^s)} \leqslant c \|\{f * \varphi_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{L_p(l_q^s)} \leqslant c \|f\|_{F_{Pq}^s},$$

co należało udowodnić.

2.12. Twierdzenie. Niech $1 < P \leqslant Q < \infty$, $1 < p_i \leqslant r \leqslant q_i < \infty$, $-\infty < t < s < \infty$. Jeżeli

$$s - \sum_{i=1}^{n} 1/p_i = t - \sum_{i=1}^{n} 1/q_i,$$

to

$$F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qr} \quad \text{i} \quad \|f\|_{F^t_{Qr}} \leqslant c \|f\|_{F^s_{Pr}}.$$

Dowód. Na mocy twierdzenia 2.10 mamy $F^s_{Pr} \longrightarrow B^s_{Pr}$, następnie z twierdzenia 2.5 $B^s_{Pr} \longrightarrow B^t_{Qr}$, oraz z twierdzenia 2.8 otrzymujemy $B^t_{Qr} \longrightarrow F^t_{Qr}$. Zatem $F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qr}$, co kończy dowód.

2.13. Twierdzenie. Niech $1 < P \leqslant Q < \infty$, $q1 < p_i \leqslant r \leqslant q_i < \infty$, oraz $1 < p_i \leqslant r \leqslant z < q_i < \infty$. Jeżeli

$$s - \sum_{i=1}^{n} 1/p_i \qquad t - \sum_{i=1}^{n} 1/q_i,$$

to

$$F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qz}.$$

Dowód. Z twierdzenia 2.10 mamy $F^s_{Pr} \longrightarrow B^s_{Pr}$, z twierdzenia 2.6 $B^s_{Pr} \longrightarrow B^t_{Qz}$, oraz z twierdzenia 2.8 $B^t_{Qz} \longrightarrow F^t_{Qz}$. Zatem $F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qz}$, co kończy dowód.

Literatura

[1] A. Benedek, R. Panzone, The spaces L_p with mixed norm. Duke Math. J., 28 (1961), 301-324.

[2] St. Gorzeński, Własności pewnych przestrzeni dystrybucji z mieszaną normą. Prace Instytutu Cybernetyki Ekonomicznej, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, (1981), 17-24.

[3] St. Gorzeński, Praca doktorska.

[4] H. Triebel, Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n-space. Duality, interpolation. Arkiv Mat. 11 (1973), 13-64.

Theorems On Embedding For the Spaces F^s_{Pq} and B^s_{Pq}

Summary

In this paper some theorems on embedding for the spaces F^s_{Pq} and B^s_{Pq} are given. For various relationships between the indices P, Q, p, q, r, s, etc., the following results are established:

1. If $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $1 < q \leqslant p_i < \infty$, then $B^s_{Pq} \longrightarrow F^s_{Pq}$.
2. If $1 < P \leqslant Q < \infty$, $1 < r < \infty$, $-\infty\, t < s < \infty$ and

$$s - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = t - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i},$$

then $B^s_{Pr} \longrightarrow B^t_{Qr}$ and, for suitable indices, also $F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qr}$.

3. For suitable relationships between indices involved P, Q, r, z, s, t, $B^s_{Pr} \longrightarrow B^t_{Qz}$ and $F^s_{Pr} \longrightarrow F^t_{Qz}$.