Wojciech Sikora

ALGORYTM WYRÓWNYWANIA KOSZTÓW KRAŃCOWYCH DLA PROBLEMU TRANSPORTOWO-PRODUKCYJNEGO Z WYPUKŁĄ FUNKCJĄ KOSZTÓW

1. Wstęp

W pracy interesować nas będzie problem transportowo-produkcyjny z wypukłą funkcją kosztów produkcji. Zadania transportowo-produkcyjne z liniowymi funkcjami kosztów znalazły zastosowania w rozwiązywaniu wielu problemów gospodarczych. Problem, który nas interesuje może znaleźć zastosowanie w przetwórstwie surowców, zwłaszcza pochodzenia rolniczego. Analizujemy następującą sytuację. Surowiec znajdujący się u dostawców (producentów) należy dostarczyć do zakładów przerabiających go. Wiemy jaka jest podaż każdego dostawcy, znamy jednostkowe koszty transportu od każdego dostawcy do każdego zakładu. Wiemy jakie są koszty przerobu surowca w każdym zakładzie. Koszty te będą różne w poszczególnych zakładach, w zależności od ich wielkości i nowoczesności. Przyjmujemy, że każdy zakład ma określoną nominalną wydajność. Natomiast nie ograniczamy ilości surowca, którą ma on przetworzyć. Zakładamy bowiem, że zakład zawsze może zwiększyć ilość przerabianego surowca pracując na wydłużonych zmianach, w wolne soboty lub wydłużając czas trwania kampanii. Powoduje to jednak znaczny wzrost kosztów, które rosną szybciej niż wielkość przerobu. Stąd przyjmujemy, że koszt przerobu da się opisać wypukłą rosnącą funkcją zależną od wielkości przerobu.

W kosztach przerobu ujęte będą tylko te elementy całkowitych kosztów produkcji, które bezpośrednio zależą od wielkości przerobu. Wszystkie elementy kosztów niezależne od wielkości produkcji, a będące wynikiem decyzji wcześniej podjętych (np. amortyzacja) są pomijane. Zakładamy, że cały surowiec znajdujący się u dostawców musi być dostarczony do zakładów i tam przetworzony.

Interesujący nas problem polega na ustaleniu takiego planu transportu i przerobu surowca, aby łączne koszty transportu i przerobu były minimalne.

Szczególnym przypadkiem tego problemu może być zagadnienie rozdziału buraków między cukrownie minimalizującego łączne koszty transportu i przerobu. Rozdział buraków między cukrownie minimalizujący straty cukru był rozpatrywany w pracach [2],[4]. Problem transportu buraków od producentów do cukrowni analizowano w pracy [5]. Problem stawiany w niniejszej pracy pozwala obydwa elementy uwzględnić w jednym rachunku optymalizacyjnym.

W pracy sformułowano model postawionego problemu w postaci zadania będącego szczególnym przypadkiem zadania programowania kwadratowego. Podano warunki optymalności jego rozwiązania oraz przedstawiono algorytm pozwalający uzyskać rozwiązanie problemu z założoną dokładnością.

2. Sformułowanie problemu

Załóżmy, że mamy m dostawców i n zakładów. Dane są jednostkowe koszty transportu surowca od dostawców do zakładów oraz podaż surowca u każdego dostawcy. Dla każdego zakładu znamy funkcję opisującą zależność między kosztem przerobu a wielkością przerobu. Należy ustalić taki plan transportu i przerobu surowca, aby łączne koszty transportu i przerobu były minimalne.

Oznaczmy przez:

c_{ij} - jednostkowy koszt transportu od i-tego dostawcy do j-tego zakładu,

a_i - podaż surowca u i-tego dostawcy,

x_j - ilość surowca przerabianego w j-tym zakładzie,

x_{ij} - ilość surowca wysyłanego od i-tego dostawcy do j-tego zakładu,

$f_j(x_j)$ - koszt przerobu w j-tym zakładzie x_j jednostek surowca.

O funkcji $f_j(x_j)$ zakładamy, że jest funkcją wypukłą postaci $f_j(x_j) = c_j x_j + b_j x_j^2$, gdzie $c_j, b_j > 0$.[1]

Problem rozdziału surowca między zakłady sprowadza się do rozwiązania następującego zadania: znaleźć takie wartości zmiennych decyzyjnych x_{ij}, x_j, aby

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \min,$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,m).$$

---

[1] Por. [4]. zob.np [6]

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_j \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n). \tag{4}$$

Ponieważ cały surowiec, jaki otrzymuje zakład, jest w nim przerabiany, więc można dokonać redukcji zadania (1) - (4) eliminując zmienne x_j. Stosując podstawienie (3) do funkcji celu (1) otrzymujemy następujące zadanie:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 = \min, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{6}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \tag{7}$$

gdzie $d_{ij} = c_{ij} + c_j$.

Zadanie (5) - (7) jest zadaniem programowania kwadratowego o specjalnej strukturze. Można je rozwiązać stosując jedną z ogólnych metod programowania kwadratowego np. metodę Beale'a [1] lub metodę Wolfe'a [7]. Ze względu na rozmiary zadania (5) - (7) oraz jego specjalną strukturę takie postępowanie nie byłoby celowe. Zagadnień transportowych w programowaniu liniowym nie rozwiązujemy stosując np. metodę simpleks. Można jednak pewne własności jakimi charakteryzuje się rozwiązanie optymalne zadania programowania kwadratowego wykorzystać dla sformułowania procedury rozwiązywania zadania (5) - (7).

Dla ogólnego zadania programowania kwadratowego można utworzyć zadanie dualne oraz zadanie Kuhna-Tuckera określające warunki optymalności rozwiązań zadania prymalnego i dualnego.[2] Sformułujemy obecnie zadanie dualne i zadanie Kuhna-Tuckera dla zadania (5) - (7), które dalej nazywać będziemy zadaniem prymalnym.

Niech y_i oraz $y_{ij} \geq 0$ będą mnożnikami Lagrange'a związanymi z warunkami (6) i (7). Utwórzmy funkcję Lagrange'a dla zadania (5) - (7):

$$L(x_{ij},y_i,y_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i\left(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}x_{ij}. \tag{8}$$

Funkcja Lagrange'a (8) jest różniczkowalna, więc znajdujemy jej pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera:

---

[2] Jaka jest postać tych zadań zobacz [3] rozdz. 13.7 lub 14.2.

(9) $$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = d_{ij} + 2b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - y_i - y_{ij} = 0 \quad \begin{matrix}(i=1,\ldots,m:\\ j=1,\ldots,n).\end{matrix}$$

Otrzymujemy w ten sposób warunki zadania dualnego. Z warunku (9) wynika

(10) $$y_{ij} = d_{ij} + 2b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - y_i .$$

Podstawiając do funkcji Lagrange'a (8) zamiast y_{ij} prawą stronę równania (10) i dokonując odpowiednich uproszczeń uzyskujemy, że:

(11) $$L(x_{ij},y_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 .$$

Zadanie dualne względem prymalnego (5) - (7) będzie następujące: znajdź takie y_i, x_{ij}, aby

(12) $$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i - \sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 = \max$$

(13) $$y_i - 2b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \leqslant d_{ij} \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) .$$

Możemy teraz podać warunki Kuhna-Tuckera określające optymalność rozwiązań zadania prymalnego (5) - (8) i dualnego (12) - (13). Znajdź takie x_{ij}, y_i, y_{ij}, aby

(14) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,\ldots,m),$$

(15) $$y_i - 2b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) + y_{ij} = d_{ij} \quad \begin{matrix}(i=1,\ldots,m;\\ j=1,\ldots,n),\end{matrix}$$

(16) $$x_{ij} \cdot y_{ij} = 0 \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n),$$

(17) $$x_{ij},\ y_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Niech

(18) $$k_{ij}(x_j) = d_{ij} + 2b_j\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

gdzie $x_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, a $k_{ij}(x_j)$ jest kosztem krańcowym transportu i przerobu w zakładzie j surowca pochodzącego od i-tego dostawcy przy produkcji na poziomie x_j. Surowiec ten jest dostarczany na trasie $\langle i,j\rangle$, stąd o $k_{ij}(x_j)$ będziemy krótko mówili jako o koszcie krańcowym trasy $\langle i,j\rangle$. Przyjmijmy ponadto, że

(19) $$k_i = \min_{j=1,\ldots,n} \left\{k_{ij}(x_j)\right\} .$$

Z warunków Kuhna-Tuckera wynika natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli znajdziemy takie rozwiązanie dopuszczalne $[\bar{x}_{ij}]$ zadania (5) - (7), że

$$\bar{x}_{ij} > 0 \Rightarrow k_{ij}(\bar{x}_j) = k_i \,, \tag{20}$$

to rozwiązanie to jest rozwiązaniem optymalnym.

Dowód. Aby udowodnić twierdzenie 1 wykażemy, że dla rozwiązania $[\bar{x}_{ij}]$ można wyznaczyć taki układ $[\bar{y}_i]$ oraz $[\bar{y}_{ij}]$, że łącznie spełniają warunki Kuhna-Tuckera. Niech

$$\bar{y}_i = k_i \qquad (i=1,\ldots,m). \tag{21}$$

Wówczas na mocy definicji (18) i (19) mamy

$$\bar{y}_i \leqslant d_{ij} + 2b_j \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} \right) \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n).$$

Wprowadzając zgodnie z wzorem (10) zmienną $y_{ij} \geqslant 0$ warunek ten możemy zapisać

$$\bar{y}_i - 2b_j \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} \right) + \bar{y}_{ij} = d_{ij} \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \tag{22}$$

Z warunków (20),(21),(22) wynika, że jeżeli

$$\bar{x}_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{y}_i = k_{ij}(\bar{x}_j), \text{ a tym samym } \bar{y}_{ij} = 0.$$

Układ $[\bar{x}_{ij}]$, $[\bar{y}_i]$, $[\bar{y}_{ij}]$ spełnia więc warunki Kuhna-Tuckera (14)-(17).

Z twierdzenia 1 wynikają następujące wnioski dotyczące rozwiązania optymalnego:

Wniosek 1. Jeżeli trasa $\langle i,j \rangle$ jest trasą o najniższym koszcie krańcowym spośród tras wychodzących od i-tego dostawcy, to przewóz na trasie $\langle i,j \rangle$ może być dodatni.

Wniosek 2. Jeżeli trasa $\langle i,j \rangle$ nie jest trasą o najniższym koszcie krańcowym spośród tras wychodzących od i-tego dostawcy, to przewóz na trasie $\langle i,j \rangle$ musi być zerowy.

Wniosek 3. Surowiec pochodzący od i-tego dostawcy przerabiany jest po tym samym koszcie krańcowym przez wszystkich jego odbiorców.

3. Algorytm wyrównywania kosztów krańcowych

Idea procedury, którą proponujemy dla rozwiązania zadania (5) - (7) polega na:

(a) wyznaczeniu możliwie najlepszego rozwiązania wyjściowego,

(b) poprawie kolejnych rozwiązań poprzez wyrównywanie kosztów krańcowych.

Ciąg rozwiązań, jaki uzyskujemy poprawiając kolejne rozwiązania nie musi być skończony, chociaż powinien być zbieżny, czyli granicą tego ciągu powinno być rozwiązanie optymalne. W przypadku, gdy kolejne rozwiązanie nie spełnia kryterium optymalności, musimy przerwać obliczenia zadowalając się rozwiązaniem przybliżonym. Chcielibyśmy wówczas jednak wiedzieć, jaka jest dokładność rozwiązania przybliżonego. Ponieważ nie znamy rozwiązania optymalnego, możemy tylko podać, o ile maksymalnie (w najgorszym przypadku) odbiega wartość funkcji celu dla rozwiązania przybliżonego od wartości funkcji dla rozwiązania optymalnego. Z zależności zachodzących między wartościami funkcji celu dla rozwiązań zadania prymalnego i dualnego wynika, że

$$w\left[x_{ij}^{p}\right] \geqslant w\left[x_{ij}^{o}\right] \geqslant v\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right], \tag{23}$$

gdzie: $w\left[x_{ij}^{p}\right]$ - wartość funkcji celu dla przybliżonego rozwiązania $\left[x_{ij}^{p}\right]$,

$w\left[x_{ij}^{o}\right]$ - wartość funkcji celu dla optymalnego rozwiązania $\left[x_{ij}^{o}\right]$,

$v\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right]$ - wartość funkcji celu dla przybliżonego rozwiązania $\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right]$ sprzężonego z rozwiązaniem $\left[x_{ij}^{p}\right]$.

Z nierówności (23) otrzymujemy, że

$$w\left[x_{ij}^{p}\right] - w\left[x_{ij}^{o}\right] \leqslant w\left[x_{ij}^{p}\right] - v\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right].$$

Oznaczmy przez $d_B\left[x_{ij}^{p}\right]$ - dokładność bezwzględną rozwiązania przybliżonego $\left[x_{ij}^{p}\right]$. Mamy zatem

$$d_B\left[x_{ij}^{p}\right] = w\left[x_{ij}^{p}\right] - v\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right] = \sum_{\langle i,j\rangle \in R_p} (k_{ij}^{p} - y_{i}^{p}) x_{ij}^{p},$$

gdzie R_p - zbiór tras o przewozach dodatnich w rozwiązaniu $\left[x_{ij}^{p}\right]$.

Dla odrzucenia lub przyjęcia rozwiązania przybliżonego lepiej stosować dokładność względną, według wzoru:

$$d_w\left[x_{ij}^{p}\right] = \frac{w\left[x_{ij}^{p}\right]}{v\left[x_{ij}^{p}, y_{i}^{p}\right]}.$$

Jeżeli $d_w\left[x_{ij}^{p}\right] \leqslant 1+\varepsilon$, to będziemy mówili, że rozwiązanie jest ε - dokładne.

Algorytm, który proponujemy sprowadza się do wykonania następujących kroków:

Krok 1. Wyznaczenie dopuszczalnego rozwiązania wyjściowego.

Krok 2. Sprawdzenie, czy uzyskane rozwiązanie spełnia kryterium optymalności. Jeżeli je spełnia, idź do kroku 5. Jeżeli nie spełnia, idź do kroku 3.

Krok 3. Sprawdzenie, czy uzyskane rozwiązanie osiągnęło ε - dokładność. Jeżeli tak, to przechodzimy do kroku 6. Jeżeli nie, idziemy do kroku 4.

Krok 4. Poprawa uzyskanego rozwiązania poprzez wyrównywanie kosztów krańcowych. Idź do kroku 2.

Krok 5. Koniec obliczeń. Posiadane rozwiązanie jest optymalne.

Krok 6. Koniec obliczeń. Uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem ε - dokładnym.

Omówimy teraz dokładniej poszczególne kroki algorytmu:

Krok 1 - wyznaczanie rozwiązania wyjściowego.

Najpierw ustalamy początkowe koszty krańcowe według wzoru

$$k^o_{ij} = c_{ij} + c_j = d_{ij}$$

i zestawiamy je w postaci tabeli kosztów krańcowych (zobacz tabela 1). Następnie dla pierwszego dostawcy znajdujemy trasę o najmniejszym koszcie krańcowym, czyli taką trasę $\langle 1,r\rangle$, że.

$$k^o_{1r} = \min_j \left\{ k^o_{1,j} \right\}$$

oraz całą podaż pierwszego dostawcy kierujemy na trasę $\langle 1,r\rangle$, czyli

$$x'_{1r} = a_1 .$$

Tabela 1

i \ j	1	2	n	a_i
1	k^o_{11},	k^o_{12},...,	k^o_{1n}	a_1
2	k^o_{21},	k^o_{22},...,	k^o_{2n}	a_2
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
m	$k^o_{m,1}$	$k^o_{m,2}$,...	$k^o_{m,n}$	a_m

Modyfikujemy wtedy koszty krańcowe tras r-tej kolumny tabeli zgodnie z wzorem

$$k'_{ir} = k^o_{ir} + 2b_r a_1 \qquad (i=1,\ldots,m),$$

przyjmując ponadto,

$$k'_{ij} = k^{o}_{ij} \qquad (i=1,\ldots,m),\ (j=1,\ldots,n \wedge j \neq r).$$

Potem przechodzimy do następnego dostawcy i powtarzamy powyższe zabiegi modyfikując po każdym przydziale koszty krańcowe. Postępowanie to powtarzamy ogółem m-krotnie.

Krok 2 - sprawdzenie kryterium optymalności.

Mając ustalone w t-tej iteracji rozwiązanie dopuszczalne zadania (5) - (7) dla każdego dostawcy obliczamy różnicę między największym kosztem krańcowym realizowanym, a kosztem krańcowym minimalnym według wzoru:

$$z_i^t = \max_{j \in B_i^t} \left\{k_{ij}^t\right\} - \min_{j=1,\ldots,n} \left\{k_{ij}^t\right\},$$

gdzie B_i^t jest zbiorem zakładów, do których w t-tej iteracji dostarcza surowiec i-ty dostawca.

Jeżeli

$$\bigwedge_i z_i^t = 0,$$

to kończymy postępowanie, gdyż posiadany plan przewozów spełnia kryterium optymalności, czyli jest planem optymalnym.

Jeżeli natomiast

$$\bigvee_i z_i^t > 0,$$

to przechodzimy do sprawdzenia dokładności posiadanego rozwiązania.

Krok 3 - sprawdzenie dokładności rozwiązania

Jeżeli rozwiązanie zadania prymalnego $\left[x_{ij}^t\right]$ nie spełnia kryterium optymalności, to ustalamy sprzężone z nim rozwiązanie zadania dualnego obliczając y_i^t zgodnie z wzorem:

$$y_i^t = \min_j \left\{k_{ij}^t\right\} \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Ustalamy następnie

$$d_w\left[x_{ij}^t\right] = \frac{w(x_{ij}^t)}{v(x_{ij}^t, y_i^t)}.$$

Jeżeli

$$d_w\left[x_{ij}^t\right] \leqslant 1 + \varepsilon,$$

to rozwiązanie jest ε - dokładnym i kończymy obliczenia.

Jeżeli natomiast

$$d_w\left[x_{ij}^t\right] > 1 + \varepsilon,$$

to przechodzimy do poprawy aktualnego rozwiązania zadania pierwotnego.

Krok 4 - poprawa rozwiązania poprzez wyrównywanie kosztów krańcowych.

Wśród dostawców szukamy takiego dostawcy s, że

$$z_s^t = \max_{i=1,..,m} \{z_i^t\}$$

oraz formułujemy dla niego równanie kompensacyjne. Rozwiązanie tego równania wyznacza, ile należy przerzucić surowca z trasy o największym koszcie krańcowym na trasę o najmniejszym koszcie, aby koszty te się zrównały. Załóżmy, że trasą o największym koszcie jest trasa $\langle s,l \rangle$, a trasą o najmniejszym koszcie trasa $\langle s,r \rangle$. Wówczas równanie kompensacyjne s-tego dostawcy ma postać:

$$(2b_l + 2b_r)\Delta x = z_s^t,$$

gdzie z_s^t - różnica między kosztem krańcowym maksymalnym a kosztem minimalnym w t-tej iteracji dla s-tego dostawcy, $2b_l$ - tempo wzrostu kosztu krańcowego l-tego odbiorcy, $2b_r$ - tempo wzrostu kosztu krańcowego r-tego odbiorcy, Δx - ilość surowca, którą należy przerzucić z trasy $\langle s,l \rangle$ na trasę $\langle s,r \rangle$.

Następnie sprawdzamy, czy

$$\Delta x = \frac{z_s^t}{2b_l + 2b_r} \leqslant x_{s,l}^t \cdot \tag{24}$$

Jeżeli tak, to na trasie $\langle s,l \rangle$ zmniejszamy przewóz o Δx, a na trasie $\langle s,r \rangle$ zwiększamy przewóz o Δx oraz odpowiednio modyfikujemy koszty krańcowe w l-tej kolumnie zmniejszając je o $\Delta x \cdot 2b_l$, a w kolumnie r-tej zwiększając je o $\Delta x \cdot 2b_r$.

Jeżeli natomiast nierówność (24) nie jest spełniona, to na trasie $\langle s,l \rangle$ likwidujemy przewóz, zwiększając go na trasie $\langle s,r \rangle$ o $x_{s,l}^t$ i modyfikujemy odpowiednio koszty krańcowe w kolumnach l i s.

Wybór dostawcy, dla którego różnice w kosztach krańcowych są największe pokazuje nam w jakim kierunku powinniśmy się przesuwać, aby dojść jak najszybciej do rozwiązania optymalnego. Niestety likwidując tę różnicę u jednego dostawcy, zwiększamy je u nich, chociaż generalnie łączna ich wartość zmniejeza się. Dlatego trudno na tej drodze postępowania uzyskać rozwiązanie dokładne.

4. Przykład

Przyjmijmy, że mamy czterech dostawców i trzy zakłady. Funkcje kosztów przerobu dla poszczególnych zakładów są następujące:

$$f_1(x_1)=6x_1 + x_1^2, \qquad f_2(x_2) = 5x_2 + 0{,}5x_2^2, \qquad f_3(x_3) = 3x_3 + 1{,}5x_3^2.$$

Koszty jednostkowe transportu oraz podaż dostawców przedstawia tabela 2. Pokażemy jak stosując algorytm wyrównywania kosztów krańcowych otrzymamy rozwiązanie ε - dokładne, gdzie $\varepsilon = 0{,}01$.

Tabela 2

c^o_{ij}	1	2	3	a_i
1	10	2	11	2
2	9	13	6	8
3	4	7	14	4
4	12	3	2	6

Tabela 3

k^o_{ij}	1	2	3	a_i
1	16	7	14	2
2	15	18	9	8
3	10	12	17	4
4	18	8	5	6

Ustalamy początkowe koszty krańcowe, zgodnie z wzorem:

$$k^o_{ij} = c_{ij} + c_j .$$

Zestawienie tych kosztów krańcowych zawiera tabela 3. Następnie wyznaczamy trasy dostaw dla poszczególnych dostawców, modyfikując po każdym przydziale koszty krańcowe. Wyjściowe rozwiązanie wraz z aktualnymi kosztami krańcowymi przedstawia tabela 4. W tabeli tej koszty krańcowe podane są w lewym, górnym rogu każdej kratki, natomiast w prawym, dolnym rogu kratki podano dodatnie przewozy. Tabela ta zawiera w ostatnich kolumnach wartości z_i oraz y_i.

Tabela 4

k^1_{ij} / x^1_{ij}	$2x_1$	x_2	$3x_3$	y^1_i	z^1_i
1	24	15 [2]	38	15	0
2	23	26	33 [8]	23	10
3	18 [4]	20	41	18	0
4	26	16 [6]	29	16	0
x^1_j	4	8	8		

Ponieważ $z^1_2 = 10$, więc rozwiązanie wyjściowe nie jest optymalne i sprawdzamy, czy jest ε - dokładne:

$$d_w\left[x^1_{ij}\right] = 1{,}33 > 1{,}01.$$

Przechodzimy zatem do poprawy tego rozwiązania. Dla drugiego dostawcy istnieje trasa o mniejszym koszcie krańcowym od kosztu trasy realizującej dostawy. Na trasę $\langle 2,1 \rangle$ trzeba skierować część przewozu z trasy $\langle 2,3 \rangle$. Równanie kompensacyjne dla drugiego dostawcy ma postać

$$(2 + 3)\triangle x = 10.$$

Mamy więc

$$\triangle x = 2 \leqslant 8.$$

Na trasie $\langle 2,1 \rangle$ zwiększymy przewóz o 2, a na trasie $\langle 2,3 \rangle$ zmniejszymy o 2. Nowe rozwiązanie wraz z aktualnymi kosztami krańcowymi zawiera tabela 5. Ponieważ dalej z_2^2 i z_3^2 są dodatnie, więc rozwiązanie jest nieoptymalne. Liczymy także

$$d_w\left[x_{ij}^2\right] = 1{,}05 > 1{,}01.$$

Rozwiązanie nie jest jeszcze ε - dokładne, więc je poprawiamy. Równanie kompensacyjne dla trzeciego dostawcy jest postaci:

$$(1 + 2)\triangle x = 2,$$

więc

$$\triangle x = 2/3 \leqslant 4.$$

Tabela 5

k_{ij}^2 / x_{ij}^2	$2x_1$	x_2	$3x_3$	y_i^2	z_i^2
1	28	15 [2]	32	15	0
2	27 [2]	26	27 [6]	26	1
3	22 [4]	20	35	20	2
4	30	16 [6]	23	16	0
x_j^2	6	8	6		

Przesuwamy 2/3 jednostki z trasy $\langle 3,1 \rangle$ na trasę $\langle 3,2 \rangle$. Nowe rozwiązanie z bieżącymi kosztami krańcowymi zawiera tabela 6. Ponieważ $z_2^3 = 4/3 > 0$, a $d_w\left[x_{ij}^3\right] = 1{,}026$, więc rozwiązanie nie jest optymalne, ani nawet ε - dokładne. Rozwiązując równanie kompensacyjne dla drugiego

Tabela 6

k_{ij}^3 / x_{ij}^3	$2x_1$	x_2	$3x_3$	y_i^3	z_i^3
1	26 2/3	15 2/3 [2]	32	15 2/3	0
2	25 2/3 [2]	26 2/3	27 [6]	25 2/3	4/3
3	20 2/3 [10/3]	20 2/3 [2/3]	35	20 2/3	0
4	28 2/3	16 2/3 [6]	23	16 2/3	0
x_j^3	5 1/3	8 2/3	6		

Tabela 7

k_{ij}^4 / x_{ij}^4	$2x_1$	x_2	$3x_3$	y_i^4	z_i^4
1	27 1/5	15 2/3 [2]	31 $\frac{1}{5}$	15 2/3	0
2	26 $\frac{1}{5}$ [2 $\frac{4}{15}$]	26 2/3	26 $\frac{1}{5}$ [5 $\frac{11}{15}$]	26 $\frac{1}{5}$	0
3	21 $\frac{1}{5}$ [10/3]	20 2/3 [2/3]	34 $\frac{1}{5}$	20 $\frac{2}{3}$	8/15
4	29 $\frac{1}{5}$	16 2/3 [6]	22 $\frac{1}{5}$	16 2/3	0
x_j^4	5 3/5	8 2/3	5 11/15		

dostawcy uzyskujemy $\triangle x = 4/15 \leqslant 2$ i na trasę $\langle 2,1 \rangle$ przesuwamy 4/15. Nowe rozwiązanie i bieżące koszty krańcowe zawiera tabela 7. Rozwiązanie jest nieoptymalne, gdyż $z_3^4 = 2/15$, ale $d_w\left[x_{ij}^4\right] = 1{,}005$, czyli jest

ε - dokładnym. Kończymy więc postępowanie. Rozwiązanie optymalne rozważanego problemu podano w tabeli 8. Tabela 9 przedstawia dokładność kolejnych rozwiązań.

Tabela 8

k_{ij}^5 / x_{ij}^5	$2x_1$	x_2	$3x_3$	y_i^5	z_i^5
1	$26\frac{10}{11}$	$15\frac{10}{11}$ 2	$30\frac{10}{11}$	$15\frac{10}{11}$	0
2	$25\frac{10}{11}$ 26/11	$26\frac{10}{11}$ 10/11	$25\frac{10}{11}$ 62/11	$25\frac{10}{11}$	0
3	$20\frac{10}{11}$ 34/11	$20\frac{10}{11}$	$33\frac{10}{11}$	$20\frac{10}{11}$	0
4	$28\frac{10}{11}$	$16\frac{10}{11}$ 6	$21\frac{10}{11}$	$16\frac{10}{11}$	0
x_j^5	5 5/11	8 10/11	5 7/11		

Tabela 9

Nr roz. t	$w\left[x_{ij}^t\right]$	$v\left[x_{ij}^t, y_i^t\right]$	$d_B\left[x_{ij}^t\right]$	$d_w\left[x_{ij}^t\right]$
1	318	238	80	1,33
2	308	292	16	1,05
3	307 1/3	299 1/3	8	1,026
4	307 7/15	305 17/45	16/9	1,005
5	307 1/22	307 1/22	0	1,00

5. Podsumowanie

Liczba iteracji niezbędnych dla uzyskania rozwiązania ε - dokładnego zależy od jakości rozwiązania wyjściowego, wartości jaką przyjmuje ε, liczby dostawców i zakładów. Rozwiązanie wyjściowe możemy wyznaczyć stosując inne reguły. Gdybyśmy chcieli uzyskać rozwiązanie dokładne zada-

nia (4) - (7) możemy wykorzystać zredukowane zadanie Kuhna-Tuckera(14) - (17), w którym pominęlibyśmy wszystkie zmienne x_{ij}, y_{ij} związane z trasami o przewozach zerowych w rozwiązaniu ε - dokładnym. Tras dodatnich powinno być nie więcej niż n+m-1.

Zaproponowany algorytm rozwiązuje także problem transportowo-produkcyjny, w którym dostawcami są zakłady wydobywające surowiec, który dostarczany jest do odbiorców o określonym popycie. Koszt wydobycia określony jest funkcją wypukłą.

Stosowane podejście możemy wykorzystać do rozwiązania problemu transportowo-produkcyjnego, w którym funkcja kosztu przerobu jest funkcją wypukłą, ale niekwadratową. Komplikuje się wówczas rozwiązanie równań kompensacyjnych, które będą nieliniowe.

Literatura

[1] Beale E.M.L. Mathematical Programming in Practice, Isaac Ditmam and Son, Londyn 1968.

[2] Czerwiński Z., Matematyka na usługach ekonomii. PWN, Warszawa, 1984.

[3] Grabowski W., Programowanie matematyczne, PWE, Warszawa, 1980.

[4] Pluta M., Różański T., Nieliniowy model optymalnej kampanii cukrowniczej, Zeszyty Naukowe WSE w Poznaniu, nr 38, 1971.

[5] Runka H., Dwuetapowa procedura planowania przewozów buraków cukrowych, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, nr 63, 1976.

[6] Wasiliewa E.M., Liwszic W.N., Nieliniejnyje transportnyje zadaczi na sietjach, Transport, Moskwa 1981.

[7] Wolfe P., The Simplex Method for Quadratic Programming, Quarterly of Applied Mathematics 1961, nr 3.

Algorithm of Equalizing of Marginal Costs for the Transport-Production Problem with Convex Cost Function

Summary

The paper discusses the problem of such distribution of raw materials between the plants which produce them that joint transport and processing costs should be minimal. This problem was formulated as a quadratic programming problem of a special structure. The so-called algorithm of equalizing of marginal costs was suggested in order to solve this problem. It allows us to obtain ε - exact solution of the problem. Numerical example illustrating the algorithm was given.