Piotr MAĆKOWIAK

O ISTNIENIU DODATNIEGO ROZWIĄZANIA ZADANIA MAKSYMALIZACJI UŻYTECZNOŚCI KONSUMPCJI

Dodatniość rozwiązania zadania maksymalizacji użyteczności konsumenta jest istotna dla badania jego właściwości za pomocą rachunku różniczkowego (badanie wrażliwości rozwiązania, możliwość skorzystania z twierdzenia o funkcji uwikłanej dla wyprowadzenia funkcji popytu i badanie jej własności [1]). Standardowym sposobem jej zapewnienia jest odrzucenie spośród argumentów funkcji użyteczności tych, których racjonalny konsument nie uwzględniał w wybranym, przy danych cenach i dochodzie, koszyku dóbr lub przyjęcie założenia, że rozwiązanie jest dodatnie [2]). Poniżej próbujemy odpowiedzieć na pytanie, kiedy problem braku dodatniości nabywanego koszyka się nie pojawia.

Założenia:

1) $U: X \to R$, $X = R^n_+$ [3], ciągła funkcja użyteczności;

2) $\forall x, y \in \operatorname{int} X: (x \geqslant y, x \neq y) \Rightarrow U(x) > U(y)$;

3) $\forall x, y \in \operatorname{int} X, x \neq y: U(x) \geqslant U(y) \Rightarrow \big(\forall t \in (0,1): U(tx + (1-t)y) > U(y)\big)$;

4) $\forall x \neq y, x > 0: (U(x) = U(y)) \Rightarrow y > 0$.

---

[1] E. Malinvaud, *Lectures on microeconomic theory*, North-Holland, 1972, s. 29.

[2] Ibidem, s. 30; K. Lancaster, *Mathematical economics*, Macmillan, 1968, s. 121; E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000, s. 51.

[3] Przez R^n_+ oznaczamy zbiór wektorów o wszystkich współrzędnych rzeczywistych nieujemnych.

Założenia 1) – 3) są standardowe w neoklasycznej teorii zachowania się konsumenta[4]. Założenie 4) zapewnia, że rozwiązanie zadania maksymalizacji użyteczności:

$$\bar{x} = \arg\max U(x), \langle p, x\rangle \leqslant m, x \geqslant 0, \qquad p, m > 0 \tag{*}$$

jest dodatnie, choć nie jest to warunek konieczny jego dodatniości[5].

Założenie 4) stanowi, że obszary obojętności wyznaczone poprzez punkty o wszystkich współrzędnych dodatnich nie mają elementów wspólnych z brzegiem zbioru X, traktowanego jako podzbiór przestrzeni R^n. Funkcją spełniającą 1) - 3), a niespełniającą 4) jest na przykład

$$U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} + x_2^{1/2}, \qquad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

Dla powyższej funkcji rozwiązanie (*) jest dodatnie dla dowolnych dodatnich wartości parametrów p, m.

Zdefiniujmy

$$\forall x \in X,\ x = (x_1, \ldots, x_n) : A_x := \{j \in \{1, \ldots, n\} : x_j = 0\}.$$

Twierdzenie 1. *Niech założenia 1) i 2) będą spełnione. Wtedy spełnienie założenia 4) jest równoważne zachodzeniu równości* $B = C$, *gdzie*

$$B = \{x \in X : U(x) = U(0)\},\ C = \{x \in X : A_x \neq \emptyset\}.$$

Dowód

Dostateczność

Niech $B = C$. Załóżmy, że $U(x) = U(y)$, $x > 0$, $x \neq y$. Wówczas $x \notin B$, co oznacza, że $y \notin B = C$, czyli $A_y = \emptyset$. Ostatecznie $y > 0$.

Konieczność

Załóżmy, że istnieje $x \in X : A_x \neq \emptyset$, $U(x) > U(0)$ (tj. $x \in C \setminus B$; $B \subseteq C$ zachodzi zawsze). Zdefiniujmy wektor y następująco: $y_j := x_j$, dla $j \notin A_x$, $y_j := \varepsilon$, dla $j \in A_x$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest pewną liczbą. Mamy zatem $y > 0$. Ze ścisłej monotoniczności (na wnętrzu dziedziny) funkcji U mamy $U(y) > U(x) > U(0)$. Z ciągłości funkcji U wynika, że istnieje[6] $y' \in (0, y)$ takie, że $U(y') = U(x)$[7]. Stąd otrzymujemy sprzeczność z 4), gdyż $y' > 0$, a $A_x \neq \emptyset$.

c.n.d.

---

[4] D. Katzner, *Walrasian microeconomics. An introduction to the economic theory of market behavior*, Addison-Wesley, 1988, s. 44; E. Panek, op. cit., s. 49.

[5] Katzner, op. cit., s. 44.

[6] $\forall x, y \in X\ (x, y) := \{z \in X : z = tx + (1-t)y$ dla pewnego $t \in (0, 1)\}$.

[7] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, WN PWN, Warszawa 1996.

Przy założeniach 1) i 2) warunek 4) jest równoważny temu, że zbiór punktów indyferentnych z 0 jest identyczny z brzegiem przestrzeni X traktowanej jako podzbiór R^n. Warunki 1), 2) i 4) spełnia na przykład funkcja typu Cobba-Douglasa.

Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby rozwiązanie (*) $\bar{x}$ było dodatnie dla dowolnych dodatnich p, m, gdy funkcja U spełnia założenia 1)-3)?

Twierdzenie 2. *Niech założenia 1)-3) będą spełnione.*

$$\forall p,m>0: \bar{x}>0 \Leftrightarrow \forall \bar{y}\, \exists x\in X: \langle p,x\rangle \leqslant m,\ U(x)=U(\bar{y}),\ x+\bar{y}>0,$$

gdzie $\bar{y}\in X$, $A_{\bar{y}}\neq\emptyset$ *oraz* $\bar{y}\in \arg\max U(z)$, $\langle p,z\rangle = m, A_z\neq\emptyset$, $z\in X$.

Dowód

Dostateczność

Weźmy wektory x, $\bar{y}$ spełniające założenie. Jeśli $U(\bar{y})=U(0)$, to $\bar{x}>0$. Załóżmy, że $U(\bar{y})>U(0)$. Przy założeniach 1) i 2) istnieje taki wektor $x'\in(0,x+\bar{y})$, że $U(x')=U(x)$. Wystarczy zatem ograniczyć się do przypadku, gdy $x\in \operatorname{int} X$. Z 1)-3) wynika, że $\exists z\in(x,\bar{y})$ takie, że $U(z)>U(\bar{y})$. Uzasadnijmy tę ostrą nierówność. Załóżmy, że

$$\forall z\in(x,\bar{y}):\ U(z)\leqslant U(\bar{y}).$$

Jeśli istnieje

$$z\in(x,\bar{y}):\ U(z)=U(x),$$

to z 3) otrzymujemy, że istnieje

$$z'\in(x,z):\ U(z')>U(x)=U(\bar{y}),$$

co prowadzi do sprzeczności z tym, że

$$\forall z\in(x,\bar{y}):\ U(z)\leqslant U(\bar{y}).$$

Zatem

$$\forall z\in(x,\bar{y}):\ U(z)<U(\bar{y}).$$

Ponieważ przy założeniach 1), 2)

$$U(x+\bar{y})>U(x)=U(\bar{y}), \quad \text{a} \quad \forall z\in(x,\bar{y}):\ U(z)<U(\bar{y}),$$

więc znów z 1) i 2) wynika, że istnieje taki punkt

$$z' \in \left(\frac{1}{2}(x+\bar{y}), x+\bar{y}\right) \subset \operatorname{int} X, \quad \text{że} \quad U(z') = U(x) = U(\bar{y}) > U\left(\frac{1}{2}(x+\bar{y})\right).$$

Z założeń 1) i 3) wynika, że istnieją takie punkty

$$v' \in \left(x, \frac{1}{2}(x+\bar{y})\right), \quad v'' \in \left(\frac{1}{2}(x+\bar{y}), \bar{y}\right) \text{ oraz } v \in \left(\frac{1}{2}(x+\bar{y}), z'\right) \subset \left(\frac{1}{2}(x+\bar{y}), (x+\bar{y})\right),$$

że

$$U(v') = U(v'') = U(v) > U\left(\frac{1}{2}(x+\bar{y})\right).$$

Otrzymujemy sprzeczność z założeniami 1) i 2). Tym samym wykazaliśmy, że

$$\exists z \in (x, \bar{y}) : U(z) > U(\bar{y}).$$

Ustalmy taki wektor $z \in (x, \bar{y})$, $U(z) > U(\bar{y})$. Ponieważ $x \in \operatorname{int} X$ a X jest wypukły, więc $z > 0$[8]. Z wypukłości zbioru rozwiązań dopuszczalnych wynika, że $\langle p, z\rangle \leqslant m$. Jednocześnie musi być $U(\bar{x}) \geqslant U(z) > U(\bar{y})$. Z definicji $\bar{y}$ wynika, że $\bar{x} > 0$.

Konieczność

Załóżmy, że $U(\bar{y}) > U(0)$.

Z jednoznaczności wektora rozwiązań $\bar{x}$ otrzymujemy

$$\forall p, m > 0 : U(\bar{x}) > U(\bar{y}).$$

Ponieważ U jest funkcją ciągłą, zatem

$$\exists y' \in (0, \bar{x}) : U(y') = U(\bar{y}).$$

Jednocześnie $y' + \bar{y} > 0$. Wystarczy przyjąć $x = y'$.

Niech $U(\bar{y}) = U(0)$.

Wtedy wystarczy wziąć taki wektor x, że $x_j = \varepsilon$, $j \in A_{\bar{y}}$ oraz $x_j = 0$, $j \notin A_{\bar{y}}$ dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$.

c.n.d.

Przy założeniach 1)-3) dodatniość rozwiązania (*) jest zapewniona, gdy biorąc dowolny „najlepszy" koszyk z brzegu zbioru koszyków dopuszczalnych, leżących w płaszczyźnie budżetowej, znajdziemy taki koszyk dopuszczalny, który ma identyczną użyteczność jak wybrany powyżej koszyk i suma poszczególnych współrzędnych obu koszyków jest dodatnia. Jest to jednocześnie warunek konieczny istnienia dodatniego rozwiązania.

---

[8] H. Nikaido, *Convex structures and economic theory*, Academic Press, 1968, s. 20.

Kolejne twierdzenia 3 i 4 wyjaśniają związek między założeniem 4) i zachowaniem się funkcji U na brzegu jej dziedziny.

Twierdzenie 3. *Niech będzie spełnione założenie 1). Jeśli spełnione jest założenie 4), to*

$$\forall x \in \operatorname{bnd} X\colon\ U(x) = U(0).$$

Dowód

Niech $y \in X$, $A_y \neq \emptyset$, $U(y) > U(0)$. Weźmy ciąg $(x^i)_{i=1}^{\infty} \subset \operatorname{int} X$, $x^i \to y$. Istnieje wtedy taka naturalna liczba N, że jeśli $i > N$, to $U(x^i) > U(0)$. Ustalmy dowolną liczbę naturalną $\bar{i} > N$, wtedy $U(x^{\bar{i}}) > U(y)$ lub $U(x^{\bar{i}}) \leqslant U(y)$. W obu przypadkach

$$(U(0),\ U(x^{\bar{i}})) \cap (U(0),\ U(y)) \neq \emptyset.$$

Stąd $\exists x, y'\colon x \in (0, x^{\bar{i}})$, $y' \in (0, y)$ takie, że $U(x) = U(y')$. Ostatecznie otrzymujemy, że $x > 0$ oraz $A_{y'} \neq \emptyset$, co jest sprzeczne z założeniem 4).

c.n.d.

Twierdzenie 4. *Niech założenia 1) i 3) będą spełnione, $X = R^n_+$, $n \geqslant 2$. Jeśli $\forall x \in \operatorname{bnd} X$ zachodzi $U(x) = U(0)$, to spełnione jest założenie 4).*

Dowód

Jeśli $x \in \operatorname{int} X$, to $U(x) > U(0)$, (z założenia 3)), każdy bowiem punkt z wnętrza X da się przedstawić jako wypukłą kombinację punktów z brzegu. Jeśli teraz $U(y) = U(x) > U(0)$, to $y > 0$. W przeciwnym razie $U(y) = U(0)$ i tym samym dochodzimy do sprzeczności.

c.n.d.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3 nie jest prawdziwe (wystarczy wziąć funkcję $U(x) \equiv 0$, $x \geqslant 0$). Twierdzenie 4 nie jest prawdziwe dla $n = 1$ (kontrprzykładem jest funkcja $U(x) = x(1-x)$, $x \geqslant 0$).

Literatura

Lancaster K., *Mathematical economics*, Macmillan, 1968

Malinvaud E., *Lectures on microeconomic theory*, North-Holland, 1972

Nikaido H., *Convex structures and economic theory*, Academic Press, 1968

Katzner D., *Walrasian microeconomics. An introduction to the economic theory of market behavior*, Addison-Wesley, 1988

Panek, E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000

Rudin W., *Podstawy analizy matematycznej*, WN PWN, Warszawa 1996