Piotr DWORNICZAK

WYBÓR PORTFELA PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH NA PODSTAWIE ROZKŁADÓW MOŻLIWOŚCI

Wprowadzenie

Od czasu opublikowania przez Sharpe'a i Markowitza modeli doboru papierów wartościowych do portfela nie słabnie zainteresowanie matematycznym modelowaniem zjawisk zachodzących na rynku papierów wartościowych. W artykule przedstawiona została metoda konstrukcji portfela papierów wartościowych zbudowana na podstawie teorii zbiorów rozmytych i zbiorów przybliżonych. Teorie te pozwalają na przetwarzanie informacji niejasnych, nieprecyzyjnych, które są związane z ludzkim myśleniem i postrzeganiem świata, a w szczególności także ze sposobem myślenia inwestorów oraz ich oceną aktualnego stanu rynku, spółek giełdowych, gospodarki oraz przewidywaniem stanów przyszłych. Wychodząc od podstawowych pojęć teorii zbiorów rozmytych L. A. Zadeh podał w 1978 roku [5] koncepcję nazwaną później teorią możliwości (ang. *possibility theory*). Dotyczy ona operowania danymi określonymi w postaci liczb lub wektorów rozmytych przy określonej dla nich funkcji przynależności, nazywanej rozkładem możliwości (ang. *possibility distribution*). Jest to podejście analogiczne do analizy danych i predykcji opartej na zmiennych losowych i rozkładach prawdopodobieństwa. Rozkład możliwości jest jednak wyznaczany nie tylko na podstawie informacji z przeszłości, ale jest również reprezentacją wiedzy, doświadczenia i intuicji (naszej, eksperta), pomagającej przewidzieć przyszłe stany rynku.

Wybór portfela jest typowym problemem decyzyjnym z zakresu inżynierii finansowej. Opinie ekspertów mogą grać tu istotną rolę. Modele oparte na takich opiniach oferują więc nowy sposób wyboru portfela papierów wartościowych. Między modelami opartymi na prawdopodobieństwie a modelami opartymi na teorii możliwości istnieje więc istotna różnica. Pierwsze są odzwierciedleniem

poglądu, że na przyszły stan rynku ma wpływ częstość występowania i wielkość wahań pewnych wartości w przeszłości. Drugie, uznając wpływ przeszłości, wprowadzają jako ważne opinie ludzi. Ponieważ uważam, że wiedza ludzi (a często trudno mierzalne opinie) jest wartościowa przy przewidywaniu zachowań ludzi, więc rozsądne wydaje się zastosowanie poniżej przedstawionego modelu do badań rzeczywistego rynku papierów wartościowych.

Rozkład możliwości

Niech $\mathbf{x}$ będzie n-wymiarowym wektorem o współrzędnych rzeczywistych, tzn. $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \Re^n$. Rozkład możliwości to funkcja $\pi: \Re^n \to [0, 1]$ taka, że

1) $\exists\, \mathbf{x} \in \Re^n$: $\pi(\mathbf{x}) = 1$,

2) zbiór $A_\alpha = \{\mathbf{x}: \pi(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$, jest wypukły,

3) funkcja π jest ciągła.

Często postuluje się, aby warunek 1) był spełniony dla dokładnie jednego wektora $\mathbf{x} \in \Re^n$. Szczególnym przypadkiem jest funkcja π określona wzorem

$$\pi(\mathbf{x}) = \exp\{-\mathbf{x}^T \mathbf{I}\, \mathbf{x}\}, \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową stopnia n. Ponieważ $\mathbf{I}$ jest dodatnio określona, zatem $\pi(\mathbf{x}) \in [0, 1]$, przy czym wartość 1 osiągana jest wyłącznie dla wektora $\mathbf{0}$, nazywanego wektorem centralnym (ang. *center vector*). Macierz $\mathbf{I}$ nazywana jest macierzą rozrzutu (ang. *spread matrix*).

Na podstawie zasady rozszerzania można wykazać, że przekształcenie liniowe

$$P: \Re^n \supseteq \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \subseteq \Re^m$$

określone wzorem

$$\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

gdzie $\mathbf{F}_{m \times n}$ jest macierzą przekształcenia taką, że $\mathrm{rz}\mathbf{F}\mathbf{F}^T = m$, a $\mathbf{b}$ jest pewnym wektorem przesunięcia, nie zmienia typu funkcji przynależności π. Dokładniej, przekształcenie P przypisuje wektorowi $\mathbf{x}$ o funkcji (1) wektor $\mathbf{y}$ o funkcji przynależności

$$\pi(\mathbf{y}) = \exp\{-(\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{b})^T (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{b})\}.$$

Przekształcenie liniowe może więc zmienić jedynie wektor centralny i rozrzut, a nie typ funkcji przynależności. Ostatecznie każdy wektor rozmyty $\mathbf{A}$, będący wynikiem przekształcenia liniowego wektora o funkcji przynależności (1) może być określony za pomocą funkcji przynależności postaci:

$$\pi_A(\mathbf{x}) = \exp\{-(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \mathbf{D}_A^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a})\}, \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{a}=[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]$ jest wektorem centralnym, natomiast $\mathbf{D}_A$ symetryczną, dodatnio określoną macierzą rozrzutu. Dalsze rozważania prowadzone będą wyłącznie dla funkcji o tej postaci.

Rozważmy ciąg $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\ldots,m}$ wektorów $\mathbf{x}_i=[x_{i1}\ x_{i2}\ \ldots\ x_{in}]^T$ stóp zwrotu n papierów wartościowych w m okresach porównawczych. Niech z każdym wektorem $\mathbf{x}_i$ związany będzie stopień $h_i \in (0, 1]$, określający ważność wektora $\mathbf{x}_i$ dla kolejnego stanu rynku. Stopień ten wyraża przekonanie eksperta (decydenta) o podobieństwie obecnej sytuacji rynkowej do sytuacji przeszłych, a zatem o możliwości wystąpienia wartości stóp zwrotu w przybliżeniu takich jak te, które wystąpiły w przeszłości. Załóżmy, że stopnie h_i związane są z pewną funkcją przynależności typu (2), czyli mogą być wyznaczone jako wartości $\pi_A(\mathbf{x}_i)$ takiej funkcji dla pewnych $\mathbf{a}$ i $\mathbf{D}_A$ albo przybliżone takimi wartościami. Ustalenie parametrów jednej tego typu funkcji jest trudne i mało dokładne, dlatego lepsze jest wyznaczanie dwóch funkcji o takim samym wektorze centralnym, lecz różnych macierzach rozrzutu $\mathbf{D}_u$ i $\mathbf{D}_l$. W tym przypadku funkcje π_u i π_l nazywane są górnym i dolnym rozkładem możliwości. Muszą być dopasowane tak, aby

$$\forall \mathbf{x}_i:\ \pi_u(\mathbf{x}_i) \geq h_i \geq \pi_l(\mathbf{x}_i).$$

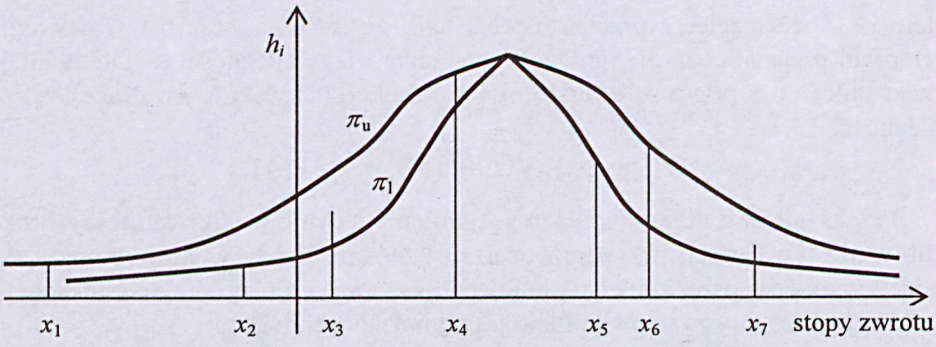
Wyznaczając macierz $\mathbf{D}_u$, minimalizuje się wartość funkcji celu

$$FC_u = \pi_u(\mathbf{x}_1) \cdot \pi_u(\mathbf{x}_2) \cdot \ldots \cdot \pi_u(\mathbf{x}_m)$$

przy warunkach $\pi_u(\mathbf{x}_i) \geq h_i$ dla $i=1, \ldots, m$, natomiast wyznaczając macierz $\mathbf{D}_l$ maksymalizuje się wartość funkcji

$$FC_l = \pi_l(\mathbf{x}_1) \cdot \pi_l(\mathbf{x}_2) \cdot \ldots \cdot \pi_l(\mathbf{x}_m)$$

przy warunku $\pi_l(\mathbf{x}_i) \leq h_i$ dla $i=1, \ldots, m$. Graficznie funkcje π_u i π_l można przedstawić jak na rysunku 1.



Rys.1. Wykres dolnego i górnego rozkładu możliwości

W tym przypadku rozważamy jeden walor w siedmiu okresach porównawczych, przy czym największe znaczenie dla przyszłości ma x_4.

Wyznaczenie górnego rozkładu możliwości polega na znalezieniu minimalnej funkcji typu (2), której wartości ograniczają z góry wartości h_i dla każdego $\mathbf{x}_i$. Wyznaczenie dolnego rozkładu polega na znalezieniu maksymalnej funkcji typu (2), której wartości ograniczają z dołu wartości h_i dla każdego $\mathbf{x}_i$.

Wybór portfela papierów wartościowych

Niech $\mathbf{r}=[r_1\ r_2\ \ldots\ r_n]^T$ będzie wektorem wag n papierów wartościowych w szukanym optymalnym portfelu. Stopa zwrotu portfela jest wówczas liczbą rzeczywistą $Z = \mathbf{r}^T \cdot \mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{x}$ jest wektorem stóp zwrotu poszczególnych n walorów.

Załóżmy, że wektor $\mathbf{x}$ związany jest z pewnymi rozkładami możliwości

$$\pi_u(\mathbf{x}) = \exp\{-(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\, \mathbf{D}_u^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\} \tag{3}$$

oraz

$$\pi_l(\mathbf{x}) = \exp\{-(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T\, \mathbf{D}_l^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\}. \tag{4}$$

Wówczas stopa Z zwrotu portfela jest liczbą rozmytą, a jako wynik liniowego przekształcenia wektora $\mathbf{x}$ związana jest z rozkładami

$$\pi_u(Z)=\exp\{-(Z-\mathbf{r}^T\mathbf{a})^T(\mathbf{r}^T\mathbf{D}_u\mathbf{r})^{-1}(Z-\mathbf{r}^T\mathbf{a})\}$$

oraz

$$\pi_l(Z)=\exp\{-(Z-\mathbf{r}^T\mathbf{a})^T(\mathbf{r}^T\mathbf{D}_l\mathbf{r})^{-1}(Z-\mathbf{r}^T\mathbf{a})\},$$

gdzie $\mathbf{r}^T\mathbf{a}$ jest wartością oczekiwaną stopy zwrotu portfela, natomiast $\mathbf{r}^T\mathbf{D}_u\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}^T\mathbf{D}_l\mathbf{r}$ to liczby interpretowane jako górna i dolna miara ryzyka tego portfela.

Przy tych założeniach wybór optymalnego portfela sprowadza się do rozwiązania zagadnień

(I) $\min\limits_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T\mathbf{D}_u\mathbf{r}$ przy warunkach $\mathbf{r}^T\mathbf{a} = c,\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 1,\ r_i \geq 0$

oraz

(II) $\min\limits_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T\mathbf{D}_l\mathbf{r}$ przy warunkach $\mathbf{r}^T\mathbf{a} = c,\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 1,\ r_i \geq 0$.

Wartość c to wielkość stopy zwrotu portfela, która ma być osiągnięta.

Jeżeli odrzucilibyśmy warunki $r_i \geq 0$, to dopuszczalna byłaby tzw. krótka sprzedaż. Zagadnienia (I) i (II) są analogiczne do modelu Markowitza, które jest zadaniem

$$\min_{\mathbf{r}} \mathbf{r}^T\mathbf{Q}\mathbf{r} \quad \text{przy warunkach} \quad \mathbf{r}^T\mathbf{x}_0 = c,\ \sum_{i=1}^{n} r_i = 1,\ r_i \geq 0,$$

gdzie **Q** jest macierzą kowariancji interpretowaną jako miara ryzyka, natomiast wektor $\mathbf{x}_0$ jest wektorem średnich.

Oba zadania są zadaniami programowania kwadratowego. Pozostaje wyznaczenie optymalnych rozwiązań zagadnień (I) i (II), ale wcześniej wyznaczenie na podstawie danych $\mathbf{x}_i$ i h_i wektora centralnego **a** i macierzy $\mathbf{D}_u$ i $\mathbf{D}_l$.

Ze wzoru (2) dla danych wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ wynika, że najbliżej centrum **a** jest wektor $\mathbf{x}_{i*}$ z największym stopniem h_i, dlatego przyjmę, że wektorem centralnym **a** jest dokładnie $\mathbf{x}_{i*}$, tzn.

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_{i*}, \quad \text{dla którego} \quad h_{i*} = \max_{k=1,\ldots,m} h_i .$$

Można teraz dokonać transformacji $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$, przechodząc na nowe, scentralizowane zmienne.

Powoduje to zmianę wzorów (3) i (4) na

$$\pi_u(\mathbf{y}) = \exp\{-\mathbf{y}^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}\} \tag{5}$$

oraz

$$\pi_l(\mathbf{y}) = \exp\{-\mathbf{y}^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}\}. \tag{6}$$

Macierz $\mathbf{D}_u$ wyznacza się jako rozwiązanie zagadnienia

$$FC_u = \pi_u(\mathbf{y}_1)\cdot\pi_u(\mathbf{y}_2)\cdot\ldots\cdot\pi_u(\mathbf{y}_m) \to \text{MIN} \quad \text{przy} \quad \pi_u(\mathbf{y}_i) \geq h_i \quad \text{dla} \quad i=1, \ldots, m.$$

Funkcja celu i warunki mogą zostać inaczej zapisane w postaci

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \to \text{MAX} \quad \text{przy} \quad \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \leq -\ln h_i \quad \text{i} \quad \mathbf{D}_u > \mathbf{0} .$$

Zapis $\mathbf{D}_u > \mathbf{0}$ oznacza, że $\mathbf{D}_u$ ma być macierzą dodatnio określoną.

Podobnie macierz $\mathbf{D}_l$ wyznacza się jako rozwiązanie zagadnienia

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i \to \text{MIN} \quad \text{przy} \quad \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i \geq -\ln h_i \quad \text{i} \quad \mathbf{D}_l > \mathbf{0} .$$

Ponieważ dla każdego **y** jest $\pi_u(\mathbf{y}) \geq \pi_l(\mathbf{y})$, więc $\mathbf{D}_u \geq \mathbf{D}_l$, zatem $\mathbf{D}_u - \mathbf{D}_l$ jest macierzą symetryczną dodatnio półokreśloną, a powyższe zagadnienia mogą być rozpatrywane jednocześnie jako zadanie:

$$\min_{\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_l} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \right\}$$

przy warunkach

(W1) $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \leq -\ln h_i, \quad i=1, \ldots, m,$

(W2) $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i \geq -\ln h_i, \quad i=1, \ldots, m,$

(W3) $\mathbf{D}_u - \mathbf{D}_l \geq \mathbf{0},$

(W4) $\mathbf{D}_l > \mathbf{0} .$

Jest to trudne do rozwiązania zagadnienie programowania nieliniowego. Dla ułatwienia warunki (W3) i (W4) są zastępowane przez

(W5) $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \geq \varepsilon$ dla $i \in E$,

(W6) $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_j = 0$ dla $i \neq j$, $i,j \in E$,

(W7) $\mathbf{y}_i^T (\mathbf{D}_l^{-1} - \mathbf{D}_u^{-1}) \mathbf{y}_i \geq 0$ dla $i \in E$,

(W8) $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_j = 0$ dla $i \neq j$, $i,j \in E$,

gdzie ε jest pewną liczbą dodatnią, a E jest zbiorem indeksów n niezależnych liniowo wektorów ze zbioru danych m wektorów (przy czym żaden z nich nie może być wektorem zerowym). Musi być oczywiście spełniony warunek $m \geq n+1$, tzn. liczba okresów porównawczych musi być co najmniej o 1 większa od liczby papierów wartościowych, z których budowany jest portfel. W praktyce zazwyczaj wszystkie obserwacje $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, zatem i wszystkie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{m-1}$ (oprócz wektora zerowego) są niezależne.

Nietrudno uzasadnić, że warunki (W5)–(W8) implikują (W3) i (W4). Jest tak, gdyż wektory $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ są niezależne liniowo, więc każdy wektor $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ przestrzeni $\Re^n$ można przedstawić jako kombinację liniową $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n$, gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Re$, skąd

$$\mathbf{w}^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{w} = (\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n)^T \mathbf{D}_u^{-1} (\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n) \overset{(W6)}{=}$$

$$\overset{(W6)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \overset{(W5)}{>} 0,$$

co oznacza, że $\mathbf{D}_u^{-1}$ jest dodatnio określona.

Z powyższej zależności i z (W7) wynika, że $\mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i \geq \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i > 0$ zatem $\mathbf{D}_l^{-1}$ jest dodatnio określona, czyli zachodzi (W4).

Dodatnia półokreśloność macierzy $\mathbf{D}_l^{-1} - \mathbf{D}_u^{-1}$ wynika z tego, że

$$\mathbf{w}^T (\mathbf{D}_l^{-1} - \mathbf{D}_u^{-1}) \mathbf{w} = (\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n)^T (\mathbf{D}_l^{-1} - \mathbf{D}_u^{-1}) (\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}_n) \underset{(W8)}{\overset{(W6)}{=}}$$

$$\underset{(W8)}{\overset{(W6)}{=}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \, \mathbf{y}_i^T (\mathbf{D}_l^{-1} - \mathbf{D}_u^{-1}) \mathbf{y}_i \overset{(W7)}{\geq} 0$$

zatem zachodzi (W3).

Kończąc uzasadnienie, przypomnijmy fakt, że jeśli macierz $\mathbf{M}$ jest dodatnio określona, to $\mathbf{M}^{-1}$ jest również dodatnio określona.

Ostatecznie wyznaczenie macierzy $\mathbf{D}_u$ i $\mathbf{D}_l$ można sprowadzić do zagadnienia

$$\min_{\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_l} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_l^{-1} \mathbf{y}_i - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}_i^T \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{y}_i \right\}$$

przy warunkach

(W1) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathrm{u}}^{-1} \mathbf{y}_i \le -\ln h_i$ $\quad i=1, \ldots, m$

(W2) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathrm{l}}^{-1} \mathbf{y}_i \ge -\ln h_i$ $\quad i=1, \ldots, m$

(W5) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathrm{u}}^{-1} \mathbf{y}_i \ge \varepsilon$ $\quad$ dla $i \in E$,

(W6) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathrm{u}}^{-1} \mathbf{y}_j = 0$ $\quad$ dla $i \neq j$, $i,j \in E$,

(W7) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} (\mathbf{D}_{\mathrm{l}}^{-1} - \mathbf{D}_{\mathrm{u}}^{-1}) \mathbf{y}_i \ge 0$ $\quad$ dla $i \in E$,

(W8) $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_{\mathrm{l}}^{-1} \mathbf{y}_j = 0$ $\quad$ dla $i \neq j$, $i,j \in E$.

Guo i Tanaka [4] podają dowód twierdzenia, że rozwiązanie powyższego zagadnienia zawsze istnieje. W celu jego wyznaczenia proponują użycie metody nazywanej analizą głównych składowych PCA (ang. *principle component analysis*). Wymaga ona przekształcenia macierzy wektorów $\mathbf{y}_i$ za pomocą przekształcenia liniowego macierzy $\mathbf{F}$, której kolumny są wektorami własnymi macierzy

$$\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}],$$

gdzie

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{ki} - a_i)(x_{kj} - a_j) h_k}{\sum_{k=1}^{m} h_k}.$$

Używając przekształcenia $\mathbf{F}$, otrzymujemy wektory $\mathbf{z}_i = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_i$, przy czym wektory te związane są z funkcją rozkładu możliwości $\pi(\mathbf{z}) = \exp\{-\mathbf{z}^{\mathrm{T}} \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}\, \mathbf{z}\}$. Z własności PCA wynika, że $\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}$ jest macierzą diagonalną. Oznaczając ją przez $\mathbf{C}_{\mathrm{u}}$, albo $\mathbf{C}_{\mathrm{l}}$, w zależności od tego czy wyznaczamy górny czy dolny rozkład możliwości, a jej elementy na głównej przekątnej przez c_{uj} albo c_{lj} ($j=1, \ldots, n$) sprowadzamy zagadnienie wyznaczenia macierzy $\mathbf{D}_{\mathrm{u}}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{l}}$ do obliczenia iloczynów $\mathbf{F}\mathbf{C}_{\mathrm{u}}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}_{\mathrm{u}}$ i $\mathbf{F}\mathbf{C}_{\mathrm{l}}^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{D}_{\mathrm{l}}$, gdzie $\mathbf{C}_{\mathrm{u}}$ i $\mathbf{C}_{\mathrm{l}}$ to rozwiązania zagadnienia programowania liniowego

$$\min_{\mathbf{C}_{\mathrm{u}}, \mathbf{C}_{\mathrm{l}}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{l}} \mathbf{z}_i - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{z}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{u}} \mathbf{z}_i \right\}$$

przy warunkach

$$\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{u}} \mathbf{z}_i \le -\ln h_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$\mathbf{z}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{\mathrm{l}} \mathbf{z}_i \ge -\ln h_i, \quad i=1, \ldots, m,$$

$$c_{uj} \ge \varepsilon \quad \text{dla pewnego } \varepsilon > 0,$$

$$c_{lj} \ge c_{uj}, \quad j=1, \ldots, n.$$

Ostatnie dwa warunki są równoważne temu, że $\mathbf{D}_{\mathrm{u}}$ i $\mathbf{D}_{\mathrm{l}}$ są dodatnio określone, a $\mathbf{D}_{\mathrm{u}} - \mathbf{D}_{\mathrm{l}}$ dodatnio półokreślona.

Przykład wyboru optymalnego portfela akcji wybranych spółek na GPW w Warszawie

Dane są, wyrażone w procentach, tygodniowe stopy zwrotu akcji pięciu polskich spółek giełdowych z sześciu tygodni od dnia 22 października 2001 roku oraz stopnie h_i ich ważności dla kolejnego okresu porównawczego.

Wprowadzone stopnie h_i nie powinny być traktowane jako wzorcowe, lecz jako przykładowe. Wybór tylko 5 spółek i 6 okresów porównawczych został dokonany w celu możliwości intuicyjnej kontroli wyników.

Stopy zwrotu podane zostały w tabeli 1.

Tabela 1. Stopy zwrotu wybranych spółek giełdowych

Okres	Spółka					
	BRE	BZWBK	CMR	CPL	TPS	h_i
1	0,0000	3,7296	11,6389	7,2144	1,4545	0,4
2	–4,3062	–4,6189	2,2222	–0,9615	9,7222	0,5
3	6,5000	9,6774	1,4957	6,7961	–2,2876	0,6
4	4,6296	8,3146	–5,0000	–4,0000	5,6250	0,7
5	6,6667	1,4675	–4,3011	2,3474	–2,1021	0,8
6	3,3333	2,1053	2,6906	–0,9174	–7,6220	0,9

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych z www.bossa.pl.

Obliczenia przeprowadzone w arkuszu kalkulacyjnym Excel i programie Mathematica zgodnie z procedurą podaną w poprzednim akapicie dają rezultaty przedstawione w następujących tabelach.

Tabela 2. Wektory stóp zwrotu po scentralizowaniu

Okres	Spółka					
	BRE	BZWBK	CMR	CPL	TPS	h_i
1	–3,3333	1,6243	8,9483	8,1318	9,0765	0,4
2	–7,6395	–6,7242	–0,4684	–0,0441	17,3442	0,5
3	3,1667	7,5721	–1,1949	7,7135	5,3344	0,6
4	1,2963	6,2093	–7,6906	–3,0826	13,2470	0,7
5	3,3334	–0,6378	–6,9917	3,2648	5,5199	0,8
6	0	0	0	0	0	0,9

Źródło: Obliczenia własne.

Optymalne macierze $\mathbf{C}_u$ i $\mathbf{C}_l$ to

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} 0{,}001757 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}000010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}000010 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}003928 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000010 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} 0{,}001757 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}000835 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}006635 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}003928 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}000010 \end{bmatrix},$$

skąd $\mathbf{D}_u$ i $\mathbf{D}_l$ to

$$\mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} 94508{,}25 & 15356{,}28 & 6541{,}26 & -12848{,}70 & 8589{,}13 \\ 15356{,}28 & 56220{,}43 & -21665{,}90 & 38584{,}87 & -15992{,}60 \\ 6541{,}26 & -21665{,}90 & 78648{,}70 & 25979{,}67 & 22009{,}84 \\ -12848{,}70 & 38584{,}87 & 25979{,}67 & 61534{,}29 & -5287{,}19 \\ 8589{,}13 & -15992{,}60 & 22009{,}84 & -5287{,}19 & 9912{,}34 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} 63662{,}01 & -19546{,}20 & 33165{,}88 & -20980{,}60 & 18826{,}24 \\ -19546{,}20 & 6730{,}32 & -10852{,}50 & 6531{,}41 & -6011{,}59 \\ 33165{,}88 & -10852{,}50 & 18364{,}17 & -11142{,}90 & 10078{,}89 \\ -20980{,}60 & 6531{,}41 & -11142{,}90 & 7157{,}71 & -6250{,}58 \\ 18826{,}24 & -6011{,}59 & 10078{,}89 & -6250{,}58 & 6258{,}12 \end{bmatrix}.$$

Biorąc $\varepsilon = 0{,}00001$ oraz ustalając pożądaną stopę c zwrotu portfela[1] na poziomie 2, uzyskujemy skład portfela optymalnego na podstawie górnego i dolnego rozkładu możliwości, o postaci

$$\mathbf{r}_u = [0{,}1229235 \;\; 0{,}4649544 \;\; 0{,}3638835 \;\; 0 \;\; 0{,}0482386]$$

oraz

$$\mathbf{r}_l = [0{,}8782963 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0{,}1217037].$$

[1] Wprowadzona pożądana stopa zwrotu nie powinna być traktowana jako wzorcowa, lecz jako przykładowa.

Przyjmując, że stopa c zwrotu z portfela wynosi 1, uzyskujemy inną strukturę portfela optymalnego:

$$\mathbf{r}_u = [0{,}0998238 \;\; 0{,}4458781 \;\; 0{,}3094476 \;\; 0 \;\; 0{,}1448504]$$

oraz

$$\mathbf{r}_l = [0{,}7870163 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0{,}2129837],$$

natomiast przyjmując, że stopa c zwrotu z portfela jest równa 0,3 uzyskujemy portfel o strukturze

$$\mathbf{r}_u = [0{,}083654 \;\; 0{,}4325248 \;\; 0{,}2713425 \;\; 0 \;\; 0{,}2124787]$$

oraz

$$\mathbf{r}_l = [0{,}7231203 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0{,}2768797].$$

Otrzymane wyniki wskazują, że w przypadku gdy spodziewamy się dużych wahań stóp zwrotu, pożądana jest większa dywersyfikacja portfela, natomiast gdy spodziewamy się, że wahania wokół najbardziej prawdopodobnego wektora stóp zwrotu będą niewielkie, warto zaryzykować inwestycję wyłącznie w dwie akcje. Wybór parametru c w przykładowych granicach zmienia skład portfela $\mathbf{r}_u$ przede wszystkim w przypadku akcji CMR i TPS. Natomiast dla portfeli $\mathbf{r}_l$ we wszystkich przypadkach preferowana jest inwestycja wyłącznie w akcje BRE i TPS, przy czym zwiększanie pożądanej stopy zwrotu powoduje przypisanie większego udziału akcjom BRE.

Literatura

[1] Dane giełdowe: www.bossa.pl
[2] Inuiguchi M., Tanino T., *Portfolio Selection Under Independent Possibilistic Information*, Fuzzy Sets and Systems 115, Elsevier 2000
[3] *Principle Component Analysis*: www.orfe.princeton.edu; www.cs.cmu.edu
[4] Tanaka H., Guo P., *Possibilistic Data Analysis for Operations Research*, Physica-Verlag, Heidelberg 1999
[5] Zadeh L.A., *Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems 1, Elsevier 1978

PORTFOLIO SELECTION BASED ON THE POSSIBILITY DISTRIBUTION

Summary

This paper deals with a portfolio selection problem based on the possibility theory. Possibility theory is used as a tool for decision-making and specially for the portfolio selection.

The lower and upper exponential possibility distribution are introduced. Some characteristics of this measure are presented. Also a theoretical approx is proposed with an example based on data from GPW Warszawa.