Marcin Anholcer

MODYFIKACJA METODY QUASI-BAZ DLA NIELINIOWEGO ZAGADNIENIA POŚREDNIKA Z KWADRATOWĄ, WKLĘSŁĄ FUNKCJĄ CELU

1. Wstęp

Przyjmuje się, że zjawiska ekonomiczne, w tym systemy dystrybucji, można opisać za pomocą modeli liniowych. Ich zaletą jest prostota umożliwiająca szybkie odnalezienie rozwiązania optymalnego (np. przy użyciu metody potencjałów zaproponowanej w pracy [2] z późniejszymi modyfikacjami) oraz łatwą interpretację wartości zmiennych i parametrów. Wadą modeli liniowych jest nadmierne upraszczanie rzeczywistości, które uniemożliwia albo przynajmniej utrudnia stawianie poprawnych prognoz i podejmowanie właściwych decyzji.

Wierniejszym odzwierciedleniem rzeczywistości są modele nieliniowe. Ich wadę stanową jednak trudności w znalezieniu optimum.

Pewnym kompromisem są modele, w których występują kwadratowe funkcje kosztów i przychodów.

Kształt wykresu funkcji kosztów lub przychodów całkowitych jest bardziej zbliżony do kształtu paraboli niż prostej. W związku z tymi zaletami funkcji kwadratowych skonstruowano kilka modeli dystrybucji opierających się właśnie na założeniu o kwadratowej postaci funkcji celu (jedynie zmienność kosztów transportu opisuje funkcja liniowa) i liniowości warunków ograniczających.

Poniżej przedstawiony zostanie jeden z takich modeli – wariant nieliniowego zagadnienia pośrednika, wraz ze zmodyfikowaną metodą jego rozwiązywania. Ponieważ metoda ta opiera się w dużej mierze na algorytmie opisanym w pracy [8], w poniższym artykule przypomnimy jedynie pokrótce pewne podstawowe pojęcia, takie jak opływ cyklu, quasi-baza, trasa centralna, czy też T – pokrycie quasi-bazy generowane przez daną trasę. Zakładamy również znajomość pewnych podstawowych technik związanych z algorytmem potencjałów (wyznaczanie pierwszego rozwiązania, wyznaczanie wartości zmiennych dualnych, generowanie cyklu dla zadanej trasy niebazowej).

2. Prezentacja problemu

Pośrednik kupuje towar u m dostawców i sprzedaje go n odbiorcom. Jest zainteresowany maksymalizacją zysku. Zakładamy, że funkcje kosztów całkowitych zakupu towaru u poszczególnych dostawców są kwadratowymi funkcjami wypukłymi, funkcje przychodów całkowitych ze sprzedaży towaru poszczególnym odbiorcom kwadratowymi funkcjami wklęsłymi, zaś jednostkowe koszty transportu są stałe. Oznaczmy przez:

c_{ij} – jednostkowe koszty transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy;
x_{ij} – wielkość przewozu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy;
a_i – maksymalną podaż i-tego dostawcy;
b_j – maksymalny popyt j-tego odbiorcy;
c_j^p i e_j^p – współczynniki przy pierwszej i drugiej potędze wielomianu opisującego całkowity przychód ze sprzedaży towaru u j-tego odbiorcy;
c_i^k i e_i^k – współczynniki przy pierwszej i drugiej potędze wielomianu opisującego całkowite koszty zakupu u i-tego dostawcy.

Zadanie przyjmie wówczas postać (por. [14, 20]):

$$\max \sum_{j=1}^{n}\left(-e_j^p\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)^2 + c_j^p \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(e_i^k\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)^2 + c_i^k \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

przy

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i \in \{1, ..., m\},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, j \in \{1, ..., n\}, \tag{1}$$

$$x_{ij} \ge 0, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}.$$

Zadanie to można oczywiście rozwiązać którąś z metod ogólnych rozwiązywania zadań programowania kwadratowego (lub w ogóle nieliniowego), jak np. metodą Wolfe'a, metodą rzutu gradientu lub metodą kierunków dopuszczalnych (metody te opisane są na przykład w pracach [4, 5, 7]).

Bardziej efektywna wydaje się jednak metoda quasi-baz (QB) zaproponowana w pracy [9].

3. Podstawowe pojęcia

Przypomnimy teraz kilka podstawowych pojęć związanych z algorytmem quasi-baz.

Cykl to ciąg tras, z których dwie sąsiednie leżą w jednym wierszu lub jednej kolumnie, w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie albo znajdują się dwie trasy należące do cyklu, albo nie znajduje się żadna, zaś ostatnia trasa tego ciągu leży w tym samym wierszu lub tej samej kolumnie, co pierwsza.

Quasi-bazą nazywamy zbiór tras taki, że w każdym wierszu i każdej kolumnie tablicy transportowej występuje przynajmniej jedna należąca do niego trasa, a jednocześnie, jeżeli zawiera on jakiś cykl, to przynajmniej jedna z tworzących go tras leży w ostatnim wierszu lub ostatniej kolumnie tablicy transportowej (w przypadku zadania transportowo-produkcyjnego trasa ta musi leżeć w ostatnim wierszu).

Opływ cyklu to wielkość, o jaką zmieniamy wartość przewozów na należących do niego trasach.

Trasa centralna to trasa wprowadzana do quasi-bazy.

T – pokrycie quasi-bazy to zbiór cykli zawierających trasę centralną, które w ostatnim wierszu lub kolumnie mają parami co najwyżej po jednej wspólnej trasie (przy czym ta sama trasa może należeć do więcej niż dwóch cykli).

4. Algorytm

Metoda QB jest w zasadzie uogólnieniem metody potencjałów na zadania z kwadratowymi, wypukłymi lub wklęsłymi funkcjami celu. Jej idea polega na wyznaczeniu pierwszego dopuszczalnego rozwiązania quasi-bazowego (w zasadzie bazowego) i jego stopniowe modyfikowanie. Każda kolejna iteracja przynosi przy tym poprawę wartości funkcji celu, zaś po skończonej liczbie kroków otrzymujemy rozwiązanie optymalne (w przeciwieństwie do metod wyrównań, zaproponowanych w pracy [9], nie jest to więc metoda przybliżona).

Postawionego zadania nie rozwiązuje się bezpośrednio, najpierw należy je sprowadzić do uproszczonej, chociaż równoważnej, postaci.

Podstawiając

$$u_{ij} = c_j^p - c_i^k - c_{ij} - 2e_i^k a_i - 2e_j^p b_j \tag{2}$$

i przyjmując $z_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ oraz $v_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, otrzymujemy zadanie:

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} e_j^p v_j^2 - \sum_{i=1}^{m} e_i^k z_i^2$$

przy

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + z_i = a_i, i \in \{1, ..., m\}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + v_j = b_j, j \in \{1, ..., n\},$$

$$x_{ij} \geq 0, z_i \geq 0, v_j \geq 0, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}.$$

Wartości funkcji celu obu zadań różnią się o stałą $\sum_{i=1}^{m} e_i^k a_i^2 + \sum_{j=1}^{n} e_j^p b_j^2$ (wartość funkcji celu zadania (3) jest mniejsza).

Zadanie dualne do zadania (3) ma postać:

$$\min \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j + \sum_{i=1}^{m} e_i^k z_i^2 + \sum_{j=1}^{n} e_j^p v_j^2$$

przy

$$\alpha_i + \beta_j \geq u_{ij}, i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\}, \tag{4}$$

$$\alpha_i \geq -2e_i^k z_i, i \in \{1, ..., m\},$$

$$\beta_j \geq -2e_j^p v_j, j \in \{1, ..., n\}.$$

Z warunków Kuhna-Tuckera wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1: Rozwiązanie zadania (3) jest optymalne wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące warunki:

$$\begin{aligned}
&\alpha_i + \beta_j = u_{ij}, x_{ij} > 0,\\
&\alpha_i = -2e_i^k z_i, z_i > 0,\\
&\beta_j = -2e_j^p v_j, v_j > 0,\\
&\alpha_i + \beta_j \geq u_{ij}, x_{ij} = 0,\\
&\alpha_i \geq -2e_i^k z_i, z_i = 0,\\
&\beta_j \geq -2e_j^p v_j, v_j = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

W celu rozwiązania zadania najprościej jest posługiwać się, podobnie jak w przypadku metody potencjałów, tablicą transportową.

Pierwszym krokiem jest wprowadzenie fikcyjnego dostawcy oraz fikcyjnego odbiorcy. Fikcyjny dostawca musi mieć podaż równą łącznemu popytowi wszystkich odbiorców, zaś fikcyjny odbiorca – popyt równy łącznej podaży wszystkich dostawców. Przewozy na trasach z kolumny fikcyjnego odbiorcy równe będą zmiennym $z_i=x_{i,n+1}$ i będą reprezentować niewykorzystaną podaż dostawców. Przewozy na trasach z wiersza fikcyjnego dostawcy będą równe zmiennym $v_j=x_{m+1,j}$ i będą reprezentować niezaspokojony popyt poszczególnych odbiorców. Przewóz na trasie $x_{m+1,n+1}$ reprezentuje całkowitą wielkość obrotu towarem przez pośrednika (jest równy sumie wszystkich przewozów).

Zyski krańcowe u_{ij} w tablicy ustalamy następująco:

- dla tras poza ostatnim wierszem i ostatnią kolumną wyznaczamy je zgodnie ze wzorem (2);
- dla trasy $<m+1,n+1>$ przyjmujemy $u_{m+1,n+1}=0$;
- dla tras w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie korzystamy ze wzorów:

$$u_{i,n+1} = -2e_i^k x_{i,n+1}, \qquad u_{m+1,j} = -2e_j^p x_{m+1,j} \tag{7}$$

(początkowe wartości wynoszą oczywiście 0).

Pierwsze rozwiązanie wyznaczamy na jeden z dwóch sposobów. Pierwszy polega na skorzystaniu z odpowiednio zmodyfikowanej metody MEM, VAM lub MRM[1]. Należy przy tym rozpocząć od m pierwszych wierszy i n pierwszych kolumn, trasy w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie, uzupełniając na końcu. Ten sposób jest sugerowany między innymi w pracy [10]. Drugi sposób polega na tym, żeby całą podaż umieścić w kolumnie fikcyjnego odbiorcy, zaś cały popyt w wierszu fikcyjnego dostawcy. W pierwszej quasi-bazie umieszczamy również zmienną $x_{m+1,n+1}=0$. Niezależnie od wyboru metody, należy pamiętać o modyfikowaniu zysków krańcowych w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie zgodnie z wzorami (7).

Teraz należy wykonywać cyklicznie następujące kroki:

1. Obliczamy wartości kryteriów D_{ij} podobnie jak w metodzie potencjałów (na przykład przez uprzednie wyznaczenie wartości zmiennych dualnych a_i oraz b_j).
2. Jeżeli wszystkie D_{ij} są niedodatnie, to STOP. Rozwiązanie jest optymalne. Jeżeli nie, to przechodzimy do kroku 3.
3. Wybieramy trasę $<i^*, j^*>$ dla której wskaźnik D_{ij} jest największy. Mogą teraz zaistnieć następujące przypadki:
   - Trasa $<i^*, j^*>$ generuje dokładnie jeden cykl, poza ostatnim wierszem; w tej sytuacji postępujemy identycznie, jak w metodzie potencjałów zmodyfikowanej do rozwiązywania liniowego zagadnienia pośrednika;

[1] Metoda proponowana w pracy [1].

- trasa $<i^*, j^*>$ generuje co najmniej jeden cykl, ale wszystkie przechodzą przez ostatni wiersz; wtedy musimy rozwiązać układ równań koordynacyjnych, dzięki którym ustalimy wartości opływów dla cykli wchodzących w skład T-pokrycia generowanego przez trasę $<i^*, j^*>$; równania te mają jedną z trzech postaci:

$$2e_p^p \sum_{t \in B_{m+1,p}} w_t + 2e_q^p \sum_{t \in B_{m+1,q}} w_t = \Delta_{i^* j^*}, \tag{8}$$

$$2e_p^p \sum_{t \in B_{m+1,p}} w_t + 2e_q^k \sum_{t \in B_{q,n+1}} w_t = \Delta_{i^* j^*}, \tag{9}$$

$$2e_p^k \sum_{t \in B_{p,n+1}} w_t + 2e_q^k \sum_{t \in B_{q,m+1}} w_t = \Delta_{i^* j^*}, \tag{10}$$

gdzie w_t oznacza opływ dla cyklu t, zaś B_{ij} to zbiór indeksów cykli należących do T-pokrycia i przechodzących przez trasę $<i,j>$. Każde równanie koordynacyjne odpowiada jednemu z cykli T-pokrycia, zaś jego postać zależy od tego, czy przechodzi tylko przez ostatni wiersz, tylko przez ostatnią kolumnę, czy też przez ostatni wiersz i kolumnę jednocześnie;
modyfikujemy odpowiednio przewozy na poszczególnych trasach; jeżeli na którejś z tras przewóz miałby spaść poniżej zera, obliczamy dopuszczalny stopień realizacji przepływu zgodnie ze wzorem:

$$\lambda_{ij} = \frac{x_{ij}}{\left| \sum_{t \in B_{ij}} w_t \right|}, \tag{11}$$

wybieramy trasę o najmniejszym dopuszczalnym stopniu realizacji przepływu $<g, h>$; usuwamy ją z quasi-bazy, kasujemy związane z nią cykle, zaś ich optymalne opływy wyznaczamy zgodnie ze wzorem

$$w_t^* = \lambda_{gh} w_t . \tag{12}$$

Postępując dalej w ten sam sposób ustalamy ostatecznie dopuszczalny przepływ; można wykazać, że ta procedura jest skończona (dowód zawierają np. prace [9, 10]).

- Trasa $<i^*, j^*>$ generuje co najmniej dwa cykle, w tym jeden poza ostatnim wierszem, zaś pozostałe przechodzą przez ostatni wiersz; w tej sytuacji zadanie nieco się komplikuje;

pierwszym krokiem jest ustalenie przepływu dla cyklu nie przechodzącego przez ostatni wiersz, tak jak w metodzie potencjałów; cykl ten nie będzie już dalej rozważany; oznaczmy trasę, która zostaje usunięta z quasi-bazy przez $<i^{**}, j^{**}>$;

można teraz wygenerować nowe T-pokrycie, zawierające cykle nie przechodzące przez trasę usuniętą z quasi-bazy; wymagałoby to jednak wygenerowanie wszystkich cykli od początku; byłoby to dosyć czasochłonne, zaś w przypadku stosowania indeksowego zapisu quasi-bazy – wysoce utrudnione;

można jednak posłużyć się inną metodą, wykorzystując już wygenerowane cykle; opiera się ona na idei utworzenia pokrycia analogicznego do T-pokrycia, jednak generowanego zarówno przez trasę $<i^*, j^*>$, jak też przez trasę $<i^{**}, j^{**}>$ (w zasadzie przez trasy wyznaczone podaną niżej metodą); dla rozróżnienia nazwijmy je D-pokryciem; tworzymy je w następujący sposób: mając dane T-pokrycie związane z trasą $<i^*, j^*>$ (pamiętając o tym, że nie bierzemy już pod uwagę cyklu nie przechodzącego przez ostatni wiersz), wyznaczamy wszystkie cykle przechodzące przez trasę $<i^{**}, j^{**}>$ i nie przechodzące przez trasę $<i^*, j^*>$; wszystkie te cykle przechodzą przez ostatni wiersz; jeżeli są w ostatnim wierszu trasy należące do tych cykli, ale nie należące do T-pokrycia, to generujemy związane z nimi cykle i dołączamy je do D-pokrycia; rozwiązujemy układ równań koordynacyjnych, pamiętając jednak o tym, że dla cykli należących do D-pokrycia, ale nie należących do T-pokrycia wartość prawej strony równania jest równa 0 (a nie $-\Delta_{i^*j^*}$); jeżeli wyznaczony opływ jest niedopuszczalny, to postępujemy tak jak w poprzednim przypadku.

4. Modyfikujemy przewozy na wszystkich trasach oraz koszty krańcowe w ostatnim wierszu i wracamy do kroku 1.

Podany powyżej algorytm jest ulepszoną wersją metody zaproponowanej w pracy [8] (modyfikacja metody postępowania w przypadkach, gdy część cykli przechodzi przez ostatni wiersz, zaś część nie). Poniżej zaproponowana zostanie jeszcze jedna modyfikacja poprawiająca jego działanie. Zamiast rozpatrywać jedną trasę centralną możemy bowiem rozpatrywać, przy spełnieniu pewnych warunków, kilka tras centralnych jednocześnie.

Sformułujmy najpierw lemat:

Lemat 1:

Jeżeli $<i^*, j^*>$ nie należy do quasi-bazy, to kryterium Δ_{ij} spełnia następujący warunek:

$$\Delta_{i^*j^*} = \sum_{<i,j>\in C^+} u_{ij} - \sum_{<i,j>\in C^-} u_{ij}\,, \tag{13}$$

gdzie C^+ to zbiór tras należących do dowolnego cyklu generowanego przez trasę $<i^*, j^*>$, o nieparzystej pozycji w tym cyklu, zaś C^- to zbiór tras o pozycji parzystej (przyjmujemy, że pozycję 1 ma trasa $<i^*, j^*>$).

Treść tego twierdzenia wynika bezpośrednio z definicji kryteriów Δ_{ij}.

Na podstawie powyższego lematu można wykazać prawdziwość następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 1:
Jeżeli istnieją co najmniej dwie trasy o dodatnim kryterium Δ_{ij} i spełniają jeden z dwóch poniższych warunków:

- żaden z cykli należących do T-pokrycia (lub D-pokrycia) generowanego przez dowolną spośród tych tras nie ma tras wspólnych z którymkolwiek z cykli należących do T-pokrycia (lub D-pokrycia) którejkolwiek innej trasy;
- istnieją trasy należące do cykli będących elementami T-pokryć (D-pokryć) generowanych przez dwie różne trasy o dodatnim kryterium, jednak te wspólne trasy leżą poza ostatnim wierszem i poza ostatnią kolumną oraz na żadnej z nich przewóz nie zostałby zmniejszony, gdybyśmy rozpatrywali T-pokrycie (D-pokrycie) tylko jednej z tras o ujemnym kryterium,

to dopuszczalne jest rozpatrywanie tych tras łącznie, to znaczy wygenerowanie w jednej iteracji T-pokryć (D-pokryć) dla wszystkich tych tras i modyfikacja wielkości przewozów na wszystkich odpowiadających im cyklach.

Uzasadnienie:
W sytuacji gdy zachodzi jeden z przypadków, o których mowa w twierdzeniu, zmiana przewozów związana z T-pokryciem (D-pokryciem) generowanym przez dowolną trasę nie powoduje zmiany kształtu żadnego z cykli należących do T-pokryć (D-pokryć) generowanych przez pozostałe trasy centralne. Ponieważ zaś trasy wspólne, jeśli nawet występują, znajdują się poza ostatnim wierszem, więc zmiana przewozów na tych trasach nie zmienia wartości odpowiadających im kosztów krańcowych, a tym samym, jak wynika z lematu, nie zmienia się wartość kryteriów dla tras centralnych. Zatem na pewno łączna zmiana przewozów na cyklach należących do T-pokryć (D-pokryć) generowanych przez wszystkie trasy centralne daje taki sam rezultat jak rozłożenie tych zmian na kilka kolejnych iteracji. Z drugiej zaś strony zmiana taka jest możliwa, gdyż z przyjętych założeń wynika, że zmiany wielkości przepływów na cyklach należących do T-pokryć (D-pokryć) generowanych przez poszczególne trasy centralne są od siebie niezależne: gdy nie ma tras wspólnych, jest to oczywiste, natomiast gdy takie trasy występują, to przewozy na nich rosną niezależnie od tego, które z T-pokryć (D-pokryć) rozpatrujemy. Tylko zaś spadek któregoś z przewozów mógłby wpłynąć na zmianę ograniczeń dla pozostałych cykli i w konsekwencji na zmianę ich opływów.

Na koniec zaprezentujemy przykład liczbowy ilustrujący działanie algorytmu.

5. Przykład liczbowy[2]

Pośrednik dostarcza towar od dwóch dostawców do trzech odbiorców. Podaż obu dostawców wynosi po 6 jednostek towaru, zaś funkcje kosztów zakupu są opisane równaniami: $f_1(x_1) = x_1 + 0{,}5x_1^2$, $f_2(x_2) = 2x_2 + 0{,}5x_2^2$. Popyt odbiorców wynosi 4, 7 i 3 jednostki, zaś funkcje przychodów ze sprzedaży mają postać: $g_1(y_1) = 13y_1 - 0{,}5y_1^2$, $g_2(y_2) = 26y_2 - y_2^2$, $g_3(y_3) = 12y_3 - 0{,}5y_3^2$. Jednostkowe koszty transportu podaje tablica 1:

Tablica 1

	Odbiorca 1	Odbiorca 2	Odbiorca 3
Dostawca 1	2	6	5
Dostawca 2	9	11	1

Należy opracować plan dostaw maksymalizujący zysk pośrednika.

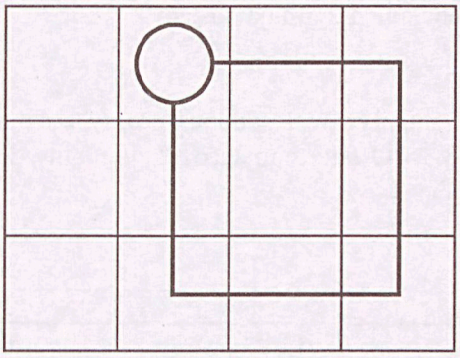
W celu rozwiązania zadania obliczamy (korzystając ze wzorów (2) i (7)) zyski krańcowe dla poszczególnych tras i wyznaczamy pierwsze rozwiązanie, umieszczając całą podaż i popyt w ostatniej kolumnie i ostatnim wierszu, odpowiadającym fikcyjnemu odbiorcy i fikcyjnemu dostawcy. Otrzymaną sytuację przedstawia tablica 2. Przyjmujemy przy tym, że aktualne zyski krańcowe znajdują się w lewym górnym, aktualne przewozy w prawym dolnym, a wartości kryteriów dla tras nie należących do quasi-bazy w lewym dolnym rogu każdego z pól tablicy. Wartości zmiennych dualnych α_i oraz β_j obliczamy podobnie, jak w metodzie potencjałów.

Tablica 2

	O_1	O_2	O_3	FO	α_i
D_1	0 2	–1 19	–3 15	–6 6	–6
D_2	–8 2	–7 13	0 9	–6 6	–6
FD	–4 4	–14 7	–3 3	0 0	0
β_j	–4	–14	–3	0	

Możemy rozpatrywać tylko jedną trasę centralną, na której jest najwyższe kryterium dodatnie. Jest to trasa <1,2>. Generowany przez nią cykl przedstawia schemat 1:

[2] Zadanie zaczerpnięte z pracy [10].



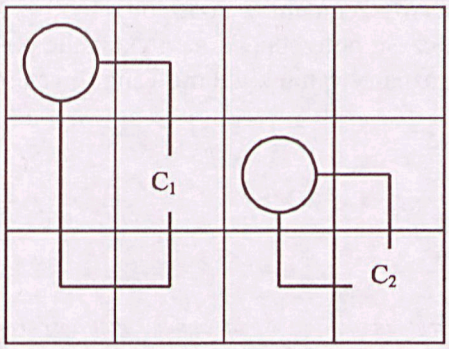
Schemat 1

Równanie koordynacyjne dla tego cyklu ma postać $2w+1w=19$, skąd $w=6\frac{2}{3}$. Ze względu jednak na trasę <1,4> opływ ten jest niedopuszczalny. Musimy więc przyjąć, że $w=6$. Sytuację po zmianie rozwiązania przedstawia tablica 3:

Tablica 3

	O_1	O_2	O_3	FO	α_i
D_1	0 3	–1 6	–3 –1	0 –1	1
D_2	–8 2	–7 1	0 9	–6 6	–6
FD	–4 4	–2 1	–3 3	0 6	0
β_j	–4	–2	–3	0	

Tym razem możemy łącznie rozpatrywać dwie trasy centralne: trasę <2,3> i trasę <1,1>. Wygenerowane przez nie cykle przedstawia schemat 2:



Schemat 2

Równania koordynacyjne przyjmują postać:

$1w_1+2w_1=3$,

$1w_2+1w_2=9$.

Skąd $w_1=1$ i $w_2=4{,}5$. Opływ w_1 jest dopuszczalny, zaś opływ w_2 jest zbyt duży ze względu na trasę <3,3>. Ostatecznie więc przyjmujemy, że $w_2=3$. Nowe rozwiązanie przedstawia tablica 4:

Tablica 4

	O_1	O_2	O_3	FO	α_i
D_1	0 1	–1 5	–3 –9	0 –3	0
D_2	–8 –2	–7 0	0 3	–6 3	–6
FD	–3 3	–4 2	–3 –3	0 9	–3
β_j	0	–1	6	3	

Jak widać, otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem optymalnym.

6. *Uwagi końcowe*

Metoda quasi-baz pozwala na dosyć szybkie znalezienie rozwiązania optymalnego nieliniowego zagadnienia dystrybucji z kwadratową funkcją celu, o ile tylko jest to zadanie programowania wypukłego. Jej podobieństwo do metody potencjałów sprawia, że nie jest trudna do zaimplementowania, zwłaszcza jeśli zastosuje się indeksowy zapis quasi-bazy oparty na sposobie podanym w pracy [3].

Wprowadzone modyfikacje pozwalają na skrócenie czasu działania programu. Pierwsza, polegająca na rozszerzeniu, w razie potrzeby, T-pokrycia do D-pokrycia, pozwala na skrócenie czasu potrzebnego na wykonanie poszczególnych iteracji. Druga, polegająca na rozpatrywaniu kilku tras centralnych równocześnie, zmniejsza ogólną ich liczbę.

Literatura

[1] Całczyński A., *Nowa metoda rozwiązywania zagadnienia transportowego*, Część 1, *Wyznaczanie rozwiązania wstępnego*, „Przegląd Statystyczny" r. X, z. 1, 1963.

[2] Dantzig G.B., *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem*, w: Koopmans

T.C. (red.): *Activity analysis of production and allocation*, Cowles Commission Monograph, 13 Wiley, New York 1951.

[3] Dubnicki W., *Zapis bazy w zagadnieniu transportowym*, „Przegląd Statystyczny" r. XXXV, z. 2, 1988.

[4] Fang S.C., Puthenpura S., *Linear Optimization and Extensions: Theory and Alghorithms*, AT&T, Prentice Hall, Inc New Jersey 1993.

[5] Greń J., *Metoda rzutowanego gradientu w programowaniu nieliniowym*, „Przegląd Statystyczny" r. XII, z. 3, 1965.

[6] Nykowski I., *Kilka uwag na temat rozwiązywania zadań transportowych programowania liniowego*, „Przegląd Statystyczny" r. IX, z. 4, 1962.

[7] Runka H.J., *Programowanie matematyczne*, część 2 *Programowanie nieliniowe*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1997.

[8] Sikora W., *Metoda quasi-baz dla problemu transportowo-produkcyjnego z wypukłą funkcją kosztów*, „Przegląd Statystyczny" r. XXXVII, z. 3, 1990.

[9] Sikora W., *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, Zeszyty Naukowe – seria II, Prace doktorskie i habilitacyjne, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1993.

[10] Sikora W., Runka H., Pyrzyński D., *Optymalizacja przeplywów w sferze dystrybucji dóbr jednorodnych*, projekt badawczy H\12\209\90-2, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1991.