*Krzysztof* MALAGA

# O ISTNIENIU TOWARÓW GIFFENA W ROZWIĄZANIACH OPTYMALNYCH ZADAŃ MAKSYMALIZACJI UŻYTECZNOŚCI KONSUMPCJI

W literaturze ekonomicznej formułuje się zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji, wyrażanej za pomocą różnych typów funkcji użyteczności, przy standardowym ograniczeniu budżetowym[1]. Do najczęściej omawianych przypadków należą zadania z multiplikatywnymi, logarytmicznymi i addytywnymi funkcjami użyteczności, o których zakłada się, że są ciągłe, dwukrotnie różniczkowalne, rosnące i silnie wklęsłe[2]. Ciągłe i różniczkowalne funkcje popytu, będące rozwiązaniami optymalnymi tych zadań charakteryzują się tym, że elastyczności cenowe popytu na poszczególne towary są ujemne[3]. Oznacza to, że w rozwiązaniach optymalnych takich zadań mamy do czynienia z towarami normalnymi. Powstaje więc pytanie o dodatkowe warunki, gwarantujące istnienie funkcji popytu, w której występują towary o dodatnich elastycznościach cenowych popytu i tym samym są towarami Giffena.

W artykule podejmiemy próbę udzielenia odpowiedzi na to pytanie, na przykładzie zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji z niesubstytucyjną funkcją użyteczności.

Rozpatrzymy rynek, na który w wybranym okresie dostarczana jest skończona ilość $n$-towarów. Ustalane na rynku ceny towarów opisuje wektor $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) > \mathbf{0}$. Założymy ponadto, że konsument dysponujący dodatnim dochodem $I > 0$ jest zainteresowany nabyciem takiego koszyka

[1] W artykule skorzystamy z definicji i twierdzeń zawartych w pracy [1].

[2] W przypadku wymienionych funkcji użyteczności ma miejsce substytucja towarów.

[3] Zob. [1] s. 36 - 57.

towarów $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geq \mathbf{0}$, którego wartość (w cenach rynku) nie przekracza dochodu konsumenta. Symbolem $D(\mathbf{p}, I)$ oznaczymy zbiór koszyków towarów, które może nabyć na rynku konsument dysponujący dochodem I:

$$D(\mathbf{p}, I) = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I \right\} \subset R_+^n. \tag{1}$$

Zbiór oznaczany symbolem $L(\mathbf{p}, I)$, który tworzą koszyki o wartości równej dochodowi konsumenta:

$$L(\mathbf{p}, I) = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \sum p_i x_i = I \right\} \subset D(\mathbf{p}, I) \tag{2}$$

nazywać będziemy linią budżetową.

Przyjmiemy, że konsument przy wyborze koszyka towarów posługuje się funkcją użyteczności $u : R_+^n \to R_+^1$ taką, że $u(\mathbf{x}) = \max \{\lambda \mid \lambda \mathbf{c} \leq \mathbf{x}\}$, gdzie wektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) > 0$ oznacza koszyk towarów o wzorcowej strukturze, natomiast maksymalna liczba $\lambda$ jest miarą użyteczności koszyka towarów $\mathbf{x} \in D(\mathbf{p}, I)$. Łatwo można zauważyć, że maksymalna liczba $\lambda \geq 0$ (spełniająca układ nierówności $\lambda c \leq x$) jest równa minimalnej spośród maksymalnych liczb $\lambda_i = \frac{x_i}{c_i} \geq 0$, dla i=1, ..., n (spełniających poszczególne nierówności). Dlatego też wyjściową funkcję użyteczności będziemy zapisywać w równoważnej postaci $u(x) = = \min \left\{ \frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_n}{c_n} \right\}$. Jest to funkcja użyteczności ciągła, dodatnio jednorodna stopnia pierwszego, niemalejąca i niesubstytucyjna[4].

Problem racjonalnego wyboru koszyka towarów przez konsumenta zapiszemy jako zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji:

$$u(\mathbf{x}) = \min \left\{ \frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_n}{c_n} \right\} \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I, \tag{3}$$

$$x_1, \ldots, x_n \geq 0.$$

[4] W teorii produkcji, odpowiednikiem rozpatrywanej przez nas funkcji użyteczności jest funkcja produkcji Koopmansa-Leontiefa, zob. [2] s. 39.

Warunki ograniczające w powyższym zadaniu tworzy zbór $D(\mathbf{p},I)$, który jest ograniczony, domknięty i wypukły. Zadanie polega na wyborze maksymalnie użytecznego koszyka towarów:

$$\bar{x} = \arg\max u(x), \quad x \in D(P,I) \tag{4}$$

przy ustalonym koszyku towarów o wzorcowej strukturze $c > 0$.

Rozwiązaniem optymalnym zadania (3), w przypadku rynku dwóch towarów, jest koszyk towarów:

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\mathbf{c} = \left( \frac{c_1 I}{\sum_{i=1}^{2} c_i p_i}, \frac{c_2 I}{\sum_{i=1}^{2} c_i p_i} \right) > \mathbf{0}. \tag{5}$$

Ponieważ leży on na linii budżetowej, więc $(p_1\bar{\lambda}c_1 + p_2\bar{\lambda}c_2) = I$. Wynika stąd, że

$$\bar{\lambda} = \frac{I}{\sum_{i=1}^{2} c_i p_i} = u(\bar{\mathbf{x}}) > 0. \tag{6}$$

Ilustracją geometryczną rozwiązania optymalnego zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji (3) dla rynku dwóch towarów konsumpcyjnych są rysunki 1 i 2.

W przypadku rynku *n*-towarów (*n*>2) rozwiązaniem optymalnym zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji jest koszyk towarów:

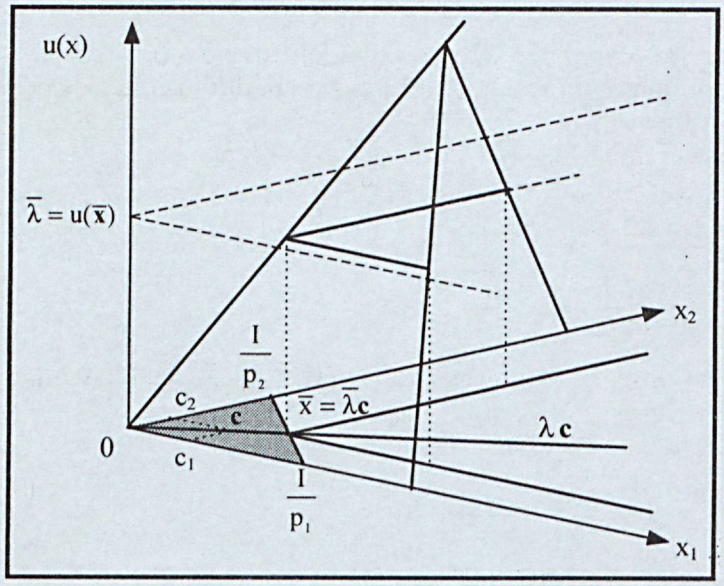
$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\mathbf{c} = \left( \frac{c_1 I}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i}, \ldots, \frac{c_n I}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i} \right) > \mathbf{0}, \tag{7}$$

gdzie

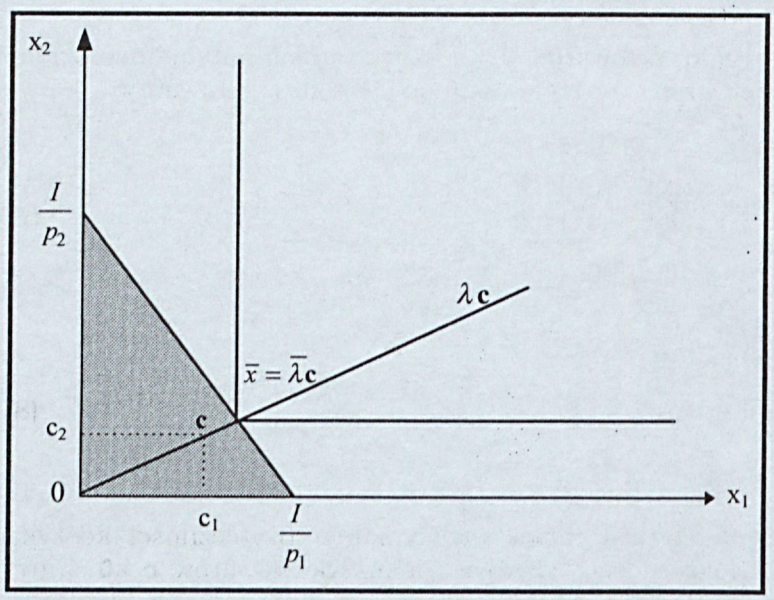
$$\bar{\lambda} = \frac{I}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i} = u(\bar{\mathbf{x}}) > 0. \tag{8}$$

Współczynnik $\bar{\lambda} > 0$ jest miarą maksymalnej użyteczności koszyka $\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$. Jest on wielokrotnością wzorcowego koszyka towarów $\mathbf{c} > \mathbf{0}$. Innymi słowy maksymalnie użyteczny koszyk towarów ma tę samą strukturę

co koszyk wzorcowy. Natomiast to, czy ilości poszczególnych towarów w koszyku $\bar{x} > 0$ będą większe lub mniejsze niż we wzorcowym koszyku towarów $c > 0$, zależy od istniejącego na rynku układu cen oraz od dochodu konsumenta.




**Rys. 1.**




**Rys. 2.**

**Definicja 1.**

**Funkcją popytu konsumpcyjnego nazywać będziemy funkcję wektorową:**

$$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \equiv \overline{\Phi}(\mathbf{p}, I) = (\overline{\Phi}_1(\mathbf{p}, I), \ldots, \overline{\Phi}_n(\mathbf{p}, I)) > \mathbf{0}\,, \tag{9}$$

**która uzależnia popyt na towary od cen towarów i dochodu konsumenta.**

Funkcja popytu związana z zadaniem maksymalizacji użyteczności konsumpcji z niesubstytucyjną funkcją użyteczności jest ciągła i różniczkowalna.

**Definicja 2.**

**Elastycznością cenową popytu na towar *i-ty* nazywamy wyrażenie:**

$$E_{ii}^{c}(\mathbf{p}, I) = \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_i} \frac{p_i}{\Phi_i(\mathbf{p}, I)}\,, \text{ dla } i = 1, \ldots, n\,, \tag{10}$$

**które informuje, o ile procent zmieni się popyt na towar *i-ty*, gdy cena tego towaru wzrośnie o jeden procent, przy nie zmienionych cenach pozostałych towarów i dochodzie konsumenta.**

**Definicja 3.**

**Towar *i-ty* nazywamy towarem normalnym, gdy elastyczność cenowa popytu na ten towar jest ujemna.**

Towar uznawać będziemy za normalny, gdy reakcją konsumenta na wzrost ceny towaru będzie spadek popytu na ten towar. W neoklasycznej teorii ekonomii jest to naturalna reakcja konsumenta.

**Definicja 4.**

**Towar *i-ty* nazywamy towarem Giffena, gdy elastyczność cenowa popytu na ten towar jest dodatnia.**

Oznacza to, że towar uznawać będziemy za towar Giffena, gdy reakcją konsumenta na wzrost ceny towaru będzie równoczesny wzrost popytu na ten towar. Nie jest to typowa reakcja konsumenta.

Wyznaczmy elastyczności cenowe popytu dla ciągłej i różniczkowalnej funkcji popytu, związanej z zadaniem maksymalizacji użyteczności konsumpcji z niesubstytucyjną funkcją użyteczności. Wiemy, że interesująca nas funkcja popytu ma postać:

$$\overline{x} \equiv \overline{\Phi}(\mathbf{p}, I) = (\overline{\Phi}_1(\mathbf{p}, I), \ldots, \overline{\Phi}_n(\mathbf{p}, I)) = \left( \frac{c_1 I}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i}, \ldots, \frac{c_n I}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i} \right). \tag{11}$$

Elastyczność cenowa popytu na towar *i-ty* wyraża się więc wzorem:

$$E_{ii}^{c}(\mathbf{p},I) = \frac{-c_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i} < 0 \text{ dla } i = 1,\ldots, n. \tag{12}$$

**Wniosek 1.**

**Dla ustalonego wektora $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n) > \mathbf{0}$ elastyczności cenowe wszystkich towarów są ujemne.**

Co oznacza, że wszystkie towary występujące w funkcji popytu związanej z zadaniem maksymalizacji użyteczności konsumpcji z niesubstytucyjną funkcją użyteczności są towarami normalnymi.

Określmy warunki, przy których w rozpatrywanej przez nas funkcji popytu mogą występować towary Giffena. W tym celu uzależnijmy składowe wektora $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n) > \mathbf{0}$ od relacji między cenami towarów, które chce nabyć konsument.

Załóżmy, że w wektorze $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n) > \mathbf{0}$ ceny wszystkich towarów są różne. Zatem istnieje towar *k*-ty, którego cena jest najwyższa. Wówczas wektor cen towarów możemy wyrazić w postaci $\mathbf{p} = p_k\left(\frac{p_1}{p_k},\ldots,1,\ldots,\frac{p_n}{p_k}\right)$,

gdzie $\frac{p_i}{p_k} \in (0,1)$ dla $i = 1,\ldots, n$ oraz $i \neq k$.

Przyjmiemy, że koszyk towarów o wzorcowej strukturze ma postać: $\mathbf{c} = \left(\frac{p_1}{p_k},\ldots,1,\ldots,\frac{p_n}{p_k}\right) > \mathbf{0}$. Jest to sytuacja, w której konsument akceptuje istniejący układ cen i ustala pożądane ilości poszczególnych towarów w przeliczeniu na jednostkę towaru najdroższego. Towar najdroższy ma dla niego subiektywnie największą wartość. W takim przypadku rozwiązaniem optymalnym zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji (3) jest koszyk towarów:

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{p_1 I}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2},\ldots,\frac{p_n I}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}\right) > \mathbf{0}, \tag{13}$$

którego użyteczność wynosi:

$$u(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\lambda} = \frac{p_k I}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} > 0. \tag{14}$$

Elastyczność cenowa popytu na towar najdroższy wyraża się wzorem:

$$E^c_{kk}(\mathbf{p},I) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2p_k^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}, \tag{15}$$

natomiast elastyczność cenową popytu na towar *j*-ty, różny od towaru najdroższego opisuje wzór:

$$E^c_{jj}(\mathbf{p},I) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2p_j^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \quad \text{dla } j=1,\dots n \text{ oraz } j\neq k. \tag{16}$$

Z warunków (15) i (16) wynika, że na rynku dwóch towarów elastyczność cenowa popytu na towar droższy jest ujemna, natomiast elastyczność cenowa popytu na towar tańszy jest dodatnia. Towar droższy jest więc towarem normalnym, a towar tańszy jest towarem Giffena.

Na rynku co najmniej trzech towarów, towar najdroższy może być towarem normalnym lub towarem Giffena, natomiast towary tańsze są zawsze towarami Giffena.

Ze wzoru (15) wynika, że elastyczność cenowa popytu na towar najdroższy jest ujemna, gdy $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2p_k^2 < 0$, co jest równoważne z tym, że:

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots p_{k-1}^2 + p_{k+1}^2 + \dots + p_n^2 < p_k^2 \tag{17}$$

lub

$$\left(\frac{p_1}{p_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{p_{k-1}}{p_k}\right)^2 + \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{p_k}\right)^2 < 1. \tag{18}$$

Elastyczność cenowa popytu na towar najdroższy jest dodatnia, gdy $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2p_k^2 > 0$, co jest równoważne z tym, że

$$\left(\frac{p_1}{p_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{p_{k-1}}{p_k}\right)^2 + \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{p_k}\right)^2 > 1 \tag{19}$$

Obie sytuacje są możliwe. Z pierwszą z nich mamy do czynienia, gdy cena towaru najdroższego jest wielokrotnie większa od cen wszystkich innych towarów. Przykładem drugiej sytuacji jest koszyk towarów, w którym zróżnicowane ceny towarów kształtują się na zbliżonym poziomie.

Z warunków (18) i (19) wynika, że istnieją układy cen towarów, przy których towar najdroższy jest towarem normalnym albo towarem Giffena.

Z warunku (16) wynika, że towar tańszy jest towarem Giffena, gdy $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2p_j^2 > 0$, co jest równoważne z tym, że:

$$p_1^2+...+p_{j-1}^2+p_{j+1}^2+...+p_n^2 > p_j^2$$

lub

$$\left(\frac{p_1}{p_j}\right)^2+...+\left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right)^2+...+\left(\frac{p_{j+1}}{p_j}\right)^2+...+\left(\frac{p_n}{p_j}\right)^2 > 1 \text{ dla } j = 1,..., n;\ j \neq k \quad (21)$$

Ponieważ wśród towarów {1, 2, ..., j-1, j+1, ... n} jest towar najdroższy, zatem warunek (21) jest zawsze prawdziwy. Oznacza to, że dowolny towar tańszy nie może być towarem normalnym. Jest on towarem Giffena.

**Wniosek 2.**

**Jeżeli składowe wektora $c = (c_1,..., c_n) > 0$ opisują relacje między cenami poszczególnych towarów i ceną towaru najdroższego, to w funkcji popytu związanej z zadaniem maksymalizacji użyteczności konsumpcji z niesubstytucyjną funkcją użyteczności, towar najdroższy jest towarem normalnym albo towarem Giffena, natomiast towary tańsze są towarami Giffena.**

W artykule pokazaliśmy, że w rozwiązaniu optymalnym zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji (z niesubstytucyjną funkcją użyteczności) występują towary normalne, gdy składowe wzorcowego koszyka towarów ustalane są przez konsumenta w sposób niezależny od cen poszczególnych towarów. Wykazaliśmy również, że jeżeli składowe koszyka o wzorcowej strukturze zależą od relacji między cenami poszczególnych towarów i ceną towaru najdroższego, to w funkcji popytu wystąpią towary Giffena. Składowe wektora $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ są parametrami niesubstytucyjnej funkcji użyteczności $u(x) = \min\left\{\frac{x_1}{c_1},...,\frac{x_n}{c_n}\right\}$.

Uzyskane wyniki upoważniają do sformułowania ogólniejszej hipotezy. Warunkiem dostatecznym istnienia towarów Giffena w funkcjach popytu związanych z zadaniami maksymalizacji użyteczności konsumpcji z multiplikatywnymi, logarytmicznymi i addytywnymi funkcjami użyteczności, jest uzależnienie wybranych charakterystyk tych funkcji, od cen lub relacji między cenami towarów[5].

[5] Weryfikacja tej hipotezy będzie przedmiotem odrębnego artykułu.

Pod pojęciem wybranych charakterystyk funkcji użyteczności $u:R_+^n \to R_+^1$ rozumiemy wielkości, które opisuje określony wektor jej parametrów. W przypadku multiplikatywnej funkcji użyteczności, ciągłej, dwukrotnie różniczkowalnej, rosnącej i silnie wklęsłej $u:R_+^n \to R_+^1$ takiej, że $u(\mathbf{x}) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, $a > 0$, $\alpha_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$, wybranymi jej charakterystykami powinny być składowe wektora $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$. Gdzie $\alpha_i$ oznacza elastyczność użyteczności konsumpcji koszyka towarów $\mathbf{x} \geq 0$ względem *i-tego* towaru.

## *Literatura*

[1] E. Panek, Elementy ekonomii matematycznej. Statyka, PWE, Warszawa, 1993

[2] K. Malaga, E. Panek, Elementy teorii produkcji, MD nr 9, AE Poznań 1996