Wojciech SIKORA
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ANALIZA POSTOPTYMALIZACYJNA W ZAMKNIĘTYM ZAGADNIENIU TRANSPORTOWYM

Wstęp

Analiza postoptymalizacyjna (zwana często **analizą wrażliwości**) jest analizą prowadzoną po uzyskaniu rozwiązania optymalnego. Chodzi w niej generalnie o ustalenie, co się dzieje z rozwiązaniem optymalnym i wartością kryterium oceny, jeżeli zmieniają się **parametry** zadania.

Zachodzi jeden z trzech przypadków (por. [7], rozdz. 2.7):

- rozwiązanie optymalne się **nie zmienia** (zmiany parametrów są *nieistotne*),
- rozwiązanie optymalne zmienia się w sposób **przewidywalny** (zmiana parametrów jest *istotna*),
- rozwiązanie optymalne zmienia się w sposób **nieprzewidywalny** (zmiana parametrów jest *nadmierna*), co wymaga rozwiązania zadania jeszcze raz, chociaż nie zawsze od początku.

Generalnie analizę postoptymalizacyjną można podzielić na:

- analizę **wektorową,** gdy zmianie ulega cały **wektor** parametrów,
- analizę **przedziałową,** gdy zmianie ulega **jeden** parametr.

W przypadku analizy przedziałowej interesuje nas ustalenie **dopuszczalnego przedziału** zmian wartości jednego parametru, przy których rozwiązanie optymalne się nie zmienia lub zmienia się w sposób przewidywalny (zob. [6]).

W zamkniętym (zbilansowanym) zagadnieniu transportowym (ZZT), sformułowanym po raz pierwszy przez Hitchcocka w 1941 roku (zob. [4]), mamy m dostawców jednorodnego dobra oraz n jego odbiorców. Znamy podaż każdego dostawcy, popyt każdego odbiorcy i jednostkowe koszty dostawy dla tras wiodących od każdego dostawcy do każdego odbiorcy. Zakładamy, że

łączna podaż dostawców jest równa łącznemu popytowi odbiorców (por. [5], rozdz. 4).

Należy ustalić taki plan dostaw, aby całkowity koszt transportu był minimalny, podaż dostawców w pełni wykorzystana, a popyt odbiorców w pełni został zaspokojony.

ZZT jest zadaniem programowania liniowego (PL) i jako takie może być rozwiązywane metodami:

(a) ogólnymi, na przykład metodą simpleks,

(b) specjalnymi, na przykład metodą potencjałów, którą opracował Dantzig w 1951 roku (por. [2]; [5]; [1], rozdz. 5), metodą dualną opracowaną przez Galea ([3], s. 195-202).

W przypadku (a) możemy stosować ogólne reguły analizy postoptymalizacyjnej dla zadania PL (por. [6]). W niniejszym artykule interesuje nas analiza postoptymalizacyjna w ZZT, o ile jest ono rozwiązywane metodą potencjałów. Będziemy starali się odpowiedzieć na trzy podstawowe pytania:

- W jakim przedziale może się zmieniać koszt jednostkowy na określonej trasie, aby nie uległo zmianie rozwiązywanie optymalne?
- W jakim przedziale może się zmienić przewóz na określonej trasie, aby zmiana rozwiązania była przewidywalna i przewidywalne były jego skutki w postaci zmiany łącznego kosztu?
- W jakim przedziale może się zmienić podaż określonego dostawcy lub popyt określonego odbiorcy lub podaż jednego dostawcy i popyt jednego odbiorcy, aby przewidywalna była zmiana rozwiązania oraz zmiana łącznego kosztu?

1. Zamknięte zagadnienie transportowe i zadanie dualne

Oznaczmy przez:

a_i – podaż dostawcy i,
b_j – popyt odbiorcy j,
c_{ij} – jednostkowy koszt transportu dla trasy $\langle i, j \rangle$,
x_{ij} – wielkość przewozu od dostawcy i do odbiorcy j, czyli na trasie $\langle i, j \rangle$ (zmienna decyzyjna).

Oczywiście w ZZT musi być spełnione założenie, że

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Problem ten można zapisać w postaci następującego modelu. Znajdź takie wartości zmiennych x_{ij}, aby:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,\ldots,m), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,\ldots,n), \tag{3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \tag{4}$$

Jeżeli warunek (2) pomnożymy przez (-1), to możemy utworzyć następujące zadanie dualne (zob. [3], s. 35-38; [1], s. 153-169):

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j-\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i \Rightarrow \max, \tag{5}$$

$$\beta_j-\alpha_i\leqslant c_{ij} \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Zadanie (1)–(4) rozwiązujemy metodą potencjałów. Składa się ona z trzech procedur:

- wyznaczania rozwiązania początkowego, które jest bazowe i dopuszczalne,
- sprawdzania optymalności rozwiązania,
- poprawy rozwiązania.

Istnieje wiele algorytmów wyznaczania rozwiązania początkowego. Jednym z najczęściej stosowanych jest metoda minimalnego elementu macierzy. Polega ona na tym, że stopniowo wybieramy trasy o minimalnym koszcie spośród tras jeszcze dopuszczalnych i na wybranej trasie lokujemy możliwie największy przewóz (por. [8], rozdz. 13).

Warunki optymalności ZZT wynikają wprost z warunku komplementarności zadania pierwotnego i dualnego. Aby rozwiązanie dopuszczalne X zadania ZZT było rozwiązaniem optymalnym, muszą być spełnione następujące warunki (np. [3], s. 195-198):

$$\beta_j-\alpha_i=c_{ij}, \quad \langle i,j\rangle\in B, \tag{7}$$

$$\beta_j-\alpha_i\leqslant c_{ij}, \quad \langle i,j\rangle\in N, \tag{8}$$

gdzie:

B – zbiór tras bazowych,

N – zbiór tras niebazowych.

Ponieważ tras bazowych jest $(m+n-1)$, więc układ (7) nie ma jednoznacznego rozwiązania. Aby takie otrzymać, przyjmujemy, że $\alpha_1=0$. Tak wyznaczone wartości zmiennych dualnych nie zawsze dają potrzebne w analizie postoptymalizacyjnej informacje. Aby uzyskać niezbędne przy zmianie podaży lub popytu informacje, dokonujemy standaryzacji wartości zmiennych dualnych według następującego schematu:

$$\alpha_i'=\alpha_i-\alpha, \quad \beta_j'=\beta_j-\alpha \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n), \tag{9}$$

gdzie:

$$\alpha=\min_i\{\alpha_i\},$$

$$\alpha_i''=\beta-\alpha_i', \quad \beta_j''=\beta-\beta_j' \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n), \tag{10}$$

gdzie:

$$\beta=\max_j\{\beta_j'\}.$$

Warunek optymalności (8) wygodnie jest zapisać w postaci

$$w_{ij}=c_{ij}+\alpha_i-\beta_j\geqslant 0 \qquad \langle i,j\rangle\in N, \tag{11}$$

gdzie w_{ij} to wskaźnik kryterium optymalności dla trasy $\langle i,j\rangle$.

W procedurze poprawy rozwiązania najważniejszym elementem jest schemat zmiany rozwiązania w postaci cyklu, który określa trasy, na jakich na przemian zwiększamy bądź zmniejszamy przewozy.

Przykład. Koncern energetyczny posiada 2 kopalnie i 3 elektrownie. W tabeli 1 podano tygodniową podaż węgla w kopalniach (w tys. ton), tygodniowy popyt elektrowni (w tys. ton) oraz koszty transportu dla poszczególnych tras (w tys. zł/tys. ton). Należy ustalić plan dostaw, minimalizujący koszt transportu.

W tabeli 2 wyznaczono rozwiązanie początkowe X^1, ustalono wartości zmiennych dualnych α_i, β_j oraz wskaźniki optymalności w_{ij}. Koszt transportu, wskaźnik kryterium optymalności i przewóz w każdym polu zapisujemy zgodnie ze schematem podanym pod tabelą 1. Ponieważ dla obydwu tras

Tabela 1

	E1	E2	E3	a_i
K1	6	8	4	*10*
K2	3	2	5	*10*
b_j	*5*	*7*	*8*	

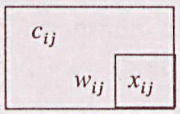


Tabela 2

a_i \ b_j	*5*	*7*	*8*	$\alpha_i=\alpha'_i$	α''_i
10	6 **2**	8 **3**	4 **8**	*0*	*6*
10	3 **3**	2 **7**	5 **4**	*3*	*3*
$\beta_j=\beta'_j$	*6*	*5*	*4*		
β''_j	*0*	*1*	*2*		

niebazowych ($\langle 1, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$) wskaźniki są dodatnie, więc rozwiązanie X^1 jest także rozwiązaniem optymalnym.

Łączny koszt transportu wynosi

$$K(X^1)=6\cdot 2+4\cdot 8+3\cdot 3+2\cdot 7=67 \text{ tys. zł.}$$

Ponieważ $\alpha=\min\{\alpha_i\}=0$, więc standaryzacja pierwszego rodzaju nie zmienia wartości zmiennych dualnych, czyli $\alpha'_i=\alpha_i$, $\beta'_j=\beta_j$. Standaryzacja drugiego rodzaju zmienia wartości zmiennych dualnych, gdyż $\beta=\max\{\beta'_j\}=6$. Wartości te podano w ostatniej kolumnie i ostatnim wierszu tabeli 2.

2. Dopuszczalne przedziały zmian kosztu

Znając już rozwiązanie optymalne, często stawiamy sobie podstawowe pytanie. Dla jakich zmian kosztu na określonej trasie rozwiązanie optymalne nie ulega zmianie.

Na to pytanie łatwo odpowiedzieć w przypadku trasy niebazowej, gdyż zmiana kosztu wpływa tylko na zmianę wskaźnika optymalności na tej samej trasie.

Niech c'_{ij} oznacza nowy koszt transportu na trasie $\langle i, j\rangle$, a w'_{ij} – nową wartość wskaźnika optymalności dla trasy $\langle i, j\rangle$. Wówczas mamy:

$$c'_{ij}=c_{ij}+\Delta c_{ij},$$
$$w'_{ij}=\alpha_i+c_{ij}+\Delta c_{ij}-\beta_j=w_{ij}+\Delta c_{ij}\geqslant 0.$$

Z ostatniego warunku uzyskujemy następującą zależność:

$$-w_{ij}\leqslant\Delta c_{ij}\leqslant\infty, \qquad \langle i, j\rangle\in N. \tag{12}$$

W naszym przykładzie:

$$-3\leqslant\Delta c_{12}\leqslant\infty,$$
$$-4\leqslant\Delta c_{23}\leqslant\infty.$$

Jeżeli zmieniamy koszt na trasie bazowej, to zmieniają się wartości zmiennych dualnych, a tym samym i wartości wskaźników optymalności.

Rozważmy trasę bazową $\langle 1, 1\rangle$, dla której

$$c'_{11}=6+\Delta c_{11}.$$

Mamy wówczas nowe wartości zmiennych dualnych:

$$\alpha_1=0, \qquad \beta_1=6+\Delta c_{11}, \qquad \beta_3=4,$$
$$\alpha_2=6+\Delta c_{11}-3=3+\Delta c_{11},$$
$$\beta_2=3+\Delta c_{11}+2=5+\Delta c_{11}.$$

Nowe wartości wskaźników

$$w_{12}=0+8-(5+\Delta c_{11})=3-\Delta c_{11}\geqslant 0\Rightarrow\Delta c_{11}\leqslant 3,$$
$$w_{23}=3+\Delta c_{11}+5-4=4+\Delta c_{11}\geqslant 0\Rightarrow -4\leqslant\Delta c_{11}.$$

Podobnie postępując, można ustalić te przedziały dla wszystkich tras bazowych:

$$-4 \leqslant \Delta c_{11} \leqslant 3,$$
$$-\infty \leqslant \Delta c_{13} \leqslant 4,$$
$$-3 \leqslant \Delta c_{21} \leqslant 4,$$
$$-\infty \leqslant \Delta c_{22} \leqslant 3.$$

W przypadku gdy ZZT ma duże rozmiary i ustalamy te przedziały dla wszystkich tras bazowych, wtedy powyższa procedura ich ustalania jest bardzo uciążliwa. Możemy je wyznaczyć, korzystając z następującego wzoru:

$$\max_{\langle k,l\rangle \in S_{ij}^{+}} \{-w_{k,l}\} \leqslant \Delta c_{ij} \leqslant \min_{\langle k,l\rangle \in S_{ij}^{-}} \{w_{k,l}\}, \quad \langle i,j\rangle \in B, \tag{13}$$

gdzie:

S_{ij}^{+} – zbiór tras niebazowych, które w swoich schematach zmiany mają ten sam znak, co trasa bazowa $\langle i, j\rangle$,

S_{ij}^{-} – zbiór tras niebazowych, które w swoich schematach zmiany mają przeciwny znak do znaku trasy bazowej $\langle i, j\rangle$.

Wzór (13) nie jest wzorem operatywnym, gdyż nie znamy zbiorów S_{ij}^{+} oraz S_{ij}^{-}. Najszybciej te przedziały można ustalić, startując od trasy niebazowej o minimalnej wartości wskaźnika optymalności i przypisując tę wartość górnym przedziałom, o ile w schemacie zmiany rozwiązania tej trasie niebazowej mamy dla danej trasy bazowej znak „−", lub dolnym przedziałom, jeżeli w schemacie zmiany wybranej trasy niebazowej mamy dla danej trasy bazowej znak „+". Następnie wybieramy kolejną trasę niebazową i zgodnie z podanym schematem przydzielamy wartość wskaźnika przedziałom dolnym lub górnym, jeżeli wcześniej nie zostały one już ustalone.

Najlepiej połączyć procedurę wyznaczania przedziałów dla kosztów z wyznaczaniem przedziałów dla samych przewozów, co zostanie dokładniej omówione w punkcie 3.

Oznaczmy przez:

p_{ij}^{+} – górny przedział zmian kosztu na trasie $\langle i, j\rangle$,

p_{ij}^{-} – dolny przedział zmian kosztu na trasie $\langle i, j\rangle$,

$|p_{ij}^{-}|$ – moduł dolnego przedziału.

Zachodzi $S_{ij}^{+} = \emptyset \Rightarrow p_{ij}^{-} = -\infty$,

$S_{ij}^{-} = \emptyset \Rightarrow p_{ij}^{+} = \infty$.

Zarówno górny, jak i dolny przedział zmian kosztu dostarczają wielu cennych informacji o danym problemie decyzyjnym. Wyróżniamy trzy interpretacje:

(i) Górny przedział p_{ij}^{+} mówi nam, o ile można **maksymalnie zwiększyć koszt** na trasie $\langle i, j\rangle$ **nie zmieniając** rozwiązania optymalnego.

(ii) Górny przedział p_{ij}^{+} mówi nam, o ile co najmniej musi być **wyższy koszt**, aby racjonalne było **obniżenie** przewozu na trasie $\langle i, j\rangle$.

(iii) Górny przedział p_{ij}^{+} mówi nam, o ile **zwiększy się łączny koszt**, jeżeli **zmniejszymy** przewóz na trasie $\langle i, j\rangle$ o jednostkę.

Podobną interpretację możemy podać dla dolnych przedziałów, a dokładniej dla ich modułów.

(i′) Moduł dolnego przedziału $|p_{ij}^{-}|$ mówi nam, o ile można **maksymalnie zmniejszyć koszt** na trasie $\langle i, j\rangle$ **nie zmieniając** rozwiązania optymalnego.

(ii′) Moduł dolnego przedziału $|p_{ij}^{-}|$ mówi nam, o ile co najmniej musi być **niższy koszt** na trasie $\langle i, j\rangle$, aby racjonalne było **zwiększenie** przewozu na tej trasie.

(iii′) Moduł dolnego przedziału $|p_{ij}^{-}|$ mówi nam, o ile **zwiększy się łączny koszt**, jeżeli **zwiększymy** przewóz na trasie $\langle i, j\rangle$ o jednostkę.

Informacja wynikająca z interpretacji (iii) i (iii′) jest dokładna, jeżeli zmiana przewozu na trasie $\langle i, j\rangle$ mieści się w dopuszczalnych granicach. Odchodzimy od rozwiązania dotychczas optymalnego, stąd wzrost łącznego kosztu. Oczywiście zmiana przewozu na trasie $\langle i, j\rangle$ wymaga zbilansowanych zmian na odpowiednich trasach bazowych.

Opierając się na wyznaczonych górnych i dolnych przedziałach oraz podanej ich interpretacji, możemy odpowiedzieć na interesujące decydenta pytania:

1. Czy rozwiązanie optymalne ulegnie zmianie, jeżeli na trasie $\langle 1, 1\rangle$ koszt jednostkowy zwiększy się o 2 tys. zł?

Ponieważ $\Delta c_{11}=2\leqslant p_{11}^{+}=3$, więc rozwiązanie optymalne X^1 nie ulega zmianie (por. tabela 3), zwiększy się tylko łączny koszt o

$$\Delta K=2\cdot 2=4 \text{ tys. zł.}$$

Rzeczywiście $K'(X^1)=16+32+9+14=71$, $K(X^1)=67$, czyli $\Delta K=71-67=4$.

Tabela 3

a_i \ b_j	5	7	8	α_i
10	8 **2**	8 **5**	4 **8**	*0*
10	3 **3**	2 **7**	5 **6**	*5*
β_j	*8*	*7*	*4*	

Tabela 4

a_i \ b_j	5	7	8	α_i
10	6 **1**	8 **2**	4 **8**	*0*
10	3 **5**	6 **5**	5 **3**	*2*
β_j	*5*	*8*	*4*	

2. Czy wzrost kosztu na trasie $\langle 2, 2\rangle$ o 4 tys. zł spowoduje spadek przewozu na tej trasie?

Ponieważ $\Delta c_{22}=4>p_{22}^{+}=3$, więc zgodnie z interpretacją (ii) przewóz na trasie $\langle 2, 2\rangle$ ulegnie obniżeniu, co łatwo sprawdzić, jeżeli rozwiążemy nasze zadanie z nowym kosztem $c'_{22}=6$. Nowe rozwiązanie optymalne X^2 zawiera tabela 4. Łączny koszt transportu wynosi

$$K(X^2)=16+32+15+30=93, \qquad \Delta K=93-67=26,$$

a nowy przewóz

$$x'_{22}=5<x_{22}=7.$$

3. Dopuszczalne granice zmian przewozu

Interpretacja (iii) i (iii′) podaje dokładne informacje, o ile zmiana przewozu mieści się w dopuszczalnych granicach i są dokonane zbilansowane zmiany na odpowiednich trasach bazowych. Wówczas zmiana rozwiązania optymalnego jest przewidywalna (nie zmienia się jego struktura).

Oznaczmy przez:

r_{ij}^{+} – górną granicę zmiany przewozu na trasie $\langle i, j\rangle$,

r_{ij}^{-} – dolną granicę zmiany przewozu na trasie $\langle i, j\rangle$.

Ustalenie górnych (r_{ij}^{+}) i dolnych (r_{ij}^{-}) granic zmian wielkości przewozu na poszczególnych trasach jest problemem znacznie trudniejszym niż ustalenie przedziałów dla kosztów. Najłatwiej ustalić te granice dla tras niebazowych. Stosujemy w tym przypadku następujące wzory:

$$r_{ij}^{-}=0, \quad r_{ij}^{+}=\min_{\langle k,l\rangle\in B_{ij}^{-}}\{x_{k,l}\}, \quad \langle i,j\rangle\in N, \tag{14}$$

gdzie:

B_{ij}^{-} – zbiór tras bazowych mających cechę „−" w cyklu zmiany rozwiązania dla trasy niebazowej $\langle i, j\rangle$,

B_{ij}^{+} – zbiór tras bazowych mających cechę „+" w cyklu zmiany rozwiązania dla trasy niebazowej $\langle i, j\rangle$.

Cała procedura wyznaczania dolnych i górnych granic się upraszcza, jeżeli powiążemy ją z wyznaczaniem przedziałów dla poszczególnych tras. Dla każdej trasy będziemy mieli dwie pary: lewostronną $p_{ij}^{-}(r_{ij}^{+})$ oraz prawostronną $p_{ij}^{+}(r_{ij}^{-})$. Aby je wyznaczyć, wystarczy znać dla każdej trasy niebazowej schemat zmiany rozwiązania, czyli zbiory B_{ij}^{-} oraz B_{ij}^{+}.

Procedura ustalania lewostronnych i prawostronnych ograniczeń dla poszczególnych tras sprowadza się do realizacji następujących kroków:

(a) Jeżeli trasa bazowa $\langle k, l\rangle$ jest jedyną trasą bazową w wierszu k lub kolumnie i, to lewostronne ograniczenie

$$p_{kl}^{-}(r_{kl}^{+})=-\infty\,(0).$$

Jeżeli dla trasy bazowej $\langle k, l\rangle$ w wierszu k i kolumnie i nie ma żadnej trasy niebazowej, to prawostronne ograniczenie

$$p_{kl}^{+}(r_{kl}^{-})=\infty\,(0).$$

(b) Wybierz trasę niebazową $\langle i, j\rangle$ o minimalnym wskaźniku optymalności.

(c) Wybranej trasie przydziel ograniczenia zgodnie ze wzorami (12) i (14).

(d) Jeżeli trasa bazowa $\langle k, l\rangle\in B_{ij}^{+}$ i nie ma ograniczenia lewostronnego, to $p_{kl}^{-}(r_{kl}^{+})=p_{ij}^{-}(r_{ij}^{+})$ i idziemy do kroku (f).

(e) Jeżeli trasa bazowa $\langle k, l\rangle \in B_{ij}^-$ i nie ma ograniczenia prawostronnego, to $p_{kl}^+(r_{kl}^-) = -p_{ij}^-(-r_{ij}^+)$ i idziemy do kroku (f).

(f) Spośród tras niebazowych, niemających ograniczeń lewostronnych, ustal trasę o minimlanym wskaźniku optymalności i idź do kroku (c).

(g) Kończymy procedurę, jeżeli wszystkie trasy mają ustalone ograniczenia lewo- i prawostronne.

Stosując powyższy algorytm, dostajemy następujące ograniczenia dla poszczególnych tras:

$p_{ij}^-(r_{ij}^+)$ $p_{ij}^+(r_{ij}^-)$	$p_{ij}^-(r_{ij}^+)$ $p_{ij}^+(r_{ij}^-)$
$-4(3) \leqslant \Delta c_{11} \leqslant 3(-2)$	$-3(2) \leqslant \Delta c_{21} \leqslant 4(-3)$
$-3(2) \leqslant \Delta c_{12} \leqslant \infty(0)$	$-\infty(0) \leqslant \Delta c_{22} \leqslant 3(-2)$
$-\infty(0) \leqslant \Delta c_{13} \leqslant 4(-3)$	$-4(3) \leqslant \Delta c_{23} \leqslant \infty(0)$

Na podstawie ustalonych ograniczeń możemy odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Zmiejszono przewóz na trasie $\langle 2, 2\rangle$ o jednostkę, dokonując zbilansowanych przesunięć. Jakie będą skutki tej zmiany i jak się zmieni rozwiązanie optymalne?

Ponieważ $\Delta x_{22} = -1 \geqslant r_{22}^- = -2$, więc zmiana rozwiązania jest przewidywalna i potrafimy określić dokładnie jej skutki. Łączny koszt transportu wzrasta o $\Delta K = 3 \cdot 1 = 3$ tys. zł, a rozwiązanie optymalne zmienia się zgodnie ze schematem zmiany dla trasy niebazowej $\langle 1, 2\rangle$, czyli mamy ciąg $\langle 1, 2\rangle^+$, $\langle 1, 1\rangle^-$, $\langle 2, 1\rangle^+$, $\langle 2, 2\rangle^-$. Łatwo to sprawdzić, wyznaczając nowe rozwiązanie optymalne X^3 (por. tabela 5). Dla trasy $\langle 2, 2\rangle$ wprowadzamy ograniczenie na przepustowość $h_{22} = 6$. Sama trasa jest trasą niebazową o przewozie $x_{22} = 6$. Łączny koszt

$$K'(X^3) = 6 + 8 + 32 + 12 + 12 = 70.$$

$$\Delta K = 70 - 67 = 3.$$

Tabela 5

a_i \ b_j	5	7	8	β_i
10	6 **1**	8 **1**	4 **8**	*0*
10	3 **4**	2 **6** **−3** **6**	5 **4**	*3*
α_i	*6*	*8*	*4*	

Tabela 6

a_i \ b_j	5	7	4(4)	β_i
10	6 **5**	8 **1**	4 **4**	*0*
6(4)	3 **3**	2 **6**	5 **7**	*3*
α_i	*6*	*8*	*4*	

2. Zwiększamy przewóz na trasie $\langle 2, 3\rangle$ o 4 jednostki. Jakie będą skutki tej zmiany?

Ponieważ $\Delta x_{23}=4>r_{23}^{+}=3$, zmiana rozwiązania nie jest przewidywalna. Możemy tylko podać, że łączny koszt wzrasta co najmniej o

$$\Delta K\geqslant(-p_{23}^{-})\Delta x_{23}=4\cdot 4=16 \text{ tys. zł.}$$

Łatwo to można sprawdzić, wyznaczając nowe rozwiązanie optymalne X^4, zawarte w tabeli 6. Zapis $a_2=6(4)$, $b_3=4(4)$ oznacza, że dla trasy $\langle 2, 3\rangle$ mamy dodatkowy przesądzony przewóz $x'_{23}=4$. Łączny koszt wynosi

$$K'(X^4)=6\cdot 5+8\cdot 1+4\cdot 4+2\cdot 6+5\cdot 4=86$$

$$\Delta K=86-67=19>16.$$

4. Zmiana wielkości podaży lub popytu

Gdy dokonujemy zmiany wielkości podaży i popytu, interesuje nas, jak wpływa to na łączny koszt oraz czy wynikająca stąd zmiana samego rozwiązania jest przewidywalna.

Możemy w tej sytuacji wyróżnić sześć przypadków:

(a) $\Delta a_i=1\wedge\Delta b_j=1\Rightarrow\Delta K=\beta_j-\alpha_i$,

(b) $\Delta a_i=-1\wedge\Delta b_j=-1\Rightarrow\Delta K=-(\beta_j-\alpha_i)$,

(c) $\Delta a_i=1\Rightarrow\Delta K=-\alpha'_i$,

(d) $\Delta b_j=-1\Rightarrow\Delta K=-\beta'_j$,

(e) $\Delta a_i=-1\Rightarrow\Delta K=-\alpha''_i$,

(f) $\Delta b_j=1\Rightarrow\Delta K=-\beta''_j$.

Zmienne dualne, standaryzowane podają nam istotne informacje:

- Zmienna dualna $\alpha_i'(\alpha_i'')$ mówi nam, o ile **zmniejszy się łączny koszt,** jeżeli **zwiększymy (zmniejszymy)** podaż dostawcy i o jednostkę.
- Zmienna dualna $\beta_j'(\beta_j'')$ mówi nam, o ile **zmniejszy się łączny koszt**, jeżeli **zmniejszymy (zwiększymy)** popyt odbiorcy j o jednostkę.

W przypadku (a) zmiana jest zbilansowana, przewóz wzrasta o jednostkę, więc łączny koszt na ogół wzrasta.

W przypadku (b) zmiana jest zbilansowana, przewóz spada o jednostkę, więc łączny koszt na ogół także spada.

W przypadku (c) zwiększa się podaż. Aby zmiana była zbilansowana, wprowadzamy fikcyjnego odbiorcę (F.O), wielkość rzeczywistego przewozu się nie zmienia, ale zwiększa się swoboda wyboru, a więc koszt nie wzrasta.

Podobnie w przypadku (d) zmniejsza się popyt, a tym samym rzeczywisty przewóz o jednostkę. Łączny koszt maleje. Aby zadanie zbilansować, wprowadzamy F.O.

W przypadku (e) podaż spada, zmniejsza się przewóz o jednostkę, a tym samym spada łączny koszt. Aby zbilansować zadanie, wprowadzamy fikcyjnego dostawcę (F.D).

W przypadku (f) popyt rośnie. Aby zbilansować zadanie, wprowadzamy F.D, wzrasta swoboda wyboru, a tym samym nie zwiększa się łączny koszt.

Podane informacje o zmianie kosztu są prawdziwe dla zmian podaży lub popytu mieszczącego się w odpowiednich przedziałach. Te przedziały łatwo ustalić, jeżeli znamy schemat zmiany rozwiązania, wywołany jednostkową zmianą podaży lub popytu.

1. Zwiększamy podaż kopalni K1 i popyt elektrowni E2 o 2 tys. ton. Jak się zmieni łączny koszt i samo rozwiązanie optymalne?

Dla $\Delta a_1 = 1$, $\Delta b_2 = 1$, jest $\Delta K = (\beta_2 - \alpha_1) = 5 - 0 = 5$.

Jednostkowy schemat zmiany rozwiązania X^1 zawiera tabela 7. Łatwo sprawdzić, że koszt tej zmiany $\Delta K = 5$.

Tabela 7

		+1	
+1	+1		
	−1	+1	

$\Delta K = 6 - 3 + 2 = 5$

Tabela 8

a_i \ b_j	5	9	8	α_i
12	6 **4**	8 **3**	4 **8**	*0*
10	3 **1**	2 **9**	5 **4**	*3*
β_j	*6*	*5*	*4*	

Na podstawie tego schematu łatwo ustalić dopuszczalny podział zmian:

$$\max_{\langle i,j\rangle \in B^+} \{-x_{ij}\} = -2 \leqslant \Delta a_1 (\Delta b_2) \leqslant \min_{\langle i,j\rangle \in B^-} \{x_{ij}\} = 3,$$

gdzie:

B^- – zbiór tras bazowych mających w schemacie zmiany znak „−”,
B^+ – zbiór tras bazowych mających w schemacie zmiany znak „+”.

Jeżeli $\Delta a_1 = 2$ $\Delta b = 2$, to zmiana mieści się w dopuszczalnym przedziale, a tym samym zmiana rozwiązania optymalnego jest przewidywalna i nowe rozwiązanie optymalne X^5 zawiera tabela 8. Oczywiście $\Delta K = 5 \cdot 2 = 10$ tys. zł.

2. Zmniejszamy podaż kopalni K1 i popyt elektrowni E2 o 4 tys. ton. Jak się zmienia łączny koszt i rozwiązanie optymalne?

Ponieważ $\Delta a_1 = -4$, $\Delta b_2 = -4$, więc ta zmiana nie mieści się w dopuszczalnym przedziale. Tym samym zmiana rozwiązania optymalnego jest nieprzewidywalna, a łączny koszt zmniejszy się co najmniej o $(+5) \cdot 2 = 10$ tys. zł.

3. Zmniejsza się popyt elektrowni E1 o 2 tys. ton. Jak się zmieni łączny koszt dostawy i samo rozwiązanie.

Dla $\Delta b_1 = -1$ ustalamy jednostkowy schemat zmiany. Zawiera go tabela 9. Dopuszczalny przedział wynosi

$$\max_{\langle i,j\rangle \in B^-} \{-x_{ij}\} = -2 \leqslant \Delta b_1,$$

więc zmiana $\Delta b_2 = -2$ jest zmianą dopuszczalną i generuje przewidywalną zmianę rozwiązania. Zawiera je tabela 10. Łączny koszt zmniejsza się o $\Delta K = 6 \cdot 2 = 12$ tys. zł.

Tabela 9

−1			+1
−1			+1

$$\Delta K = -6 + 0 = -6$$

Tabela 10

a_i \ b_j	3	7	8	2	α_1
10	6 **0**	8 **3**	4 **8**	0 **2**	*0*
10	3 **3**	2 **7**	5 **4**	0 **3**	*3*
β_j	*6*	*5*	*4*	*0*	

Przypadki (c)–(f) wymagają pewnej modyfikacji, jeżeli analizowane zadanie zawiera już fikcyjnego dostawcę lub fikcyjnego odbiorcę, gdyż początkowe zadanie było otwarte.

Podsumowanie

Analiza postoptymalizacyjna składa się, jak widzimy z dwóch faz:

- analizy wrażliwości (analizy przedziałowej), gdy ustalamy dopuszczalne przedziały zmian kosztu, podaży lub popytu oraz samej zmiennej,
- analizy merytorycznej, która pozwala nam na podstawie ustaleń z pierwszej fazy oraz podanej interpretacji przedziałów i zmiennych dualnych, odpowiedzieć na wiele istotnych pytań, związanych ze zmiennością warunków działania nawet tak prostego problemu decyzyjnego jakim jest ZZT.

Analiza postoptymalizacyjna powinna być niezbędnym etapem rozwiązywania każdego problemu decyzyjnego.

Literatura

[1] J. Buga, I. Nykowski, *Zadania transportowe w programowaniu liniowym*, PWN, Warszawa 1972
[2] G.B. Dantzig, *Application of the Simplex to a Transportation Problem,* w: T.C. Koopmans, (red.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph, 13 Wiley, New York 1951
[3] D. Gale, *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1969
[4] F.L. Hitchcock, *Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, Journal of Mathematics and Physics 20, 1941
[5] W. Sikora, *Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr*, Zeszyty Naukowe AE nr 127, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1993
[6] W. Sikora, *Analiza postoptymalizacyjna*, w: B. Guzik (red.) *Ekonometria i badania operacyjne. Uzupełnienie z badań operacyjnych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1999
[7] W. Sikora, *Programowanie liniowe*, w: E. Ignasiak (red.) *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 2001
[8] W. Sikora, *Zagadnienia transportowe*, w: B. Guzik (red.), *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań 2002

SENSITIVITY ANALYSIS IN A CLOSED TRANSPORTATION PROBLEM

Summary

In the paper sensitivity analysis for a closed transportation problem was performed. Intervals for which optimal solution does not change or changes in a predictable way were set. The intervals were given for unit transportation costs, demands, supplies and flows. The information obtained on the basis of economic interpretation of upper and lower intervals of the parameters and dual variables was given.