Grażyna TRZPIOT*

MULTIFUNKCJE W MODELACH RÓWNOWAGI EKONOMICZNEJ PRZEGLĄD

Od przeszło 30 lat odwzorowania wielowartościowe (multifunkcje) stały się standardowym narzędziem analitycznym w różnych obszarach zastosowań matematyki i w nowych gałęziach nauki. Obserwując ten trend, nie jest niespodzianką, że język multifunkcji odpowiednio interpretowany jest nowym i bardzo ważnym składnikiem w języku teoretycznej ekonomii.

Artykuł jest przeglądem modeli równowagi ekonomicznej zapisanych w tym języku.

Koncepcja systemu ekonomicznego lub modelu ekonomii była formułowana wiele razy. Różnice były w przyjmowanych założeniach dotyczących zbiorów wejściowych, w proponowanym stopniu abstrakcji, w podejściu statycznym lub dynamicznym.

Praca zawiera przykłady modeli formułowanych w różnym czasie – poczynając od modeli Warlasa i Arrow'a - Debreu'a, poprzez ich modyfikacje aż do modelu Makarowa. Wszystkie wykorzystują pojęcie funkcji użyteczności definiowanych dla uczestników systemu. Kolejny przykład to rozwinięcie modelu definiowanego przez Hildebranda i opisującego ekonomię poprzez relację preferencji. Przegląd kończy przykład dynamicznego modelu równowagi pochądzącego od Połterowicza.

Modele te przedstawiono, eksponując w ich sformułowaniu multifunkcje.

1. POJĘCIE RÓWNOWAGI

Równowaga ekonomiczna jest pojęciem niejednoznacznie ujętym w koncepcjach różnych szkół prowadzących badania nad gospodarką wolnorynkową.

* Akademia Ekonomiczna w Katowicach

Badając wspólne cechy tych zróżnicowanych znaczeń, można zauważyć, że każdorazowo pojęcie to oznacza zgodność – równowagę pewnych wielkości ekonomicznych, przy spełnieniu dodatkowych warunków.

Początków rozważań na ten temat można doszukiwać się w pracach F. Quesnay'a (tablica ekonomiczna). Znacznie bardziej zaawansowane rozważania przedstawił w XIX wieku francuski ekonomista L. Warlas. Prace nad tym zagadnieniem były kontynuowane w ramach ekonomii matematycznej, a także w teorii makroekonomii. Dla przykładu R.S.D. Allen w klasycznej pracy z tej dziedziny pisze: "w równowadze statystycznej wymagamy, aby zmienne równoważyły się bez nadwyżki lub deficytu w pewien określony sposób" (2). Równowagę ekonomiczną zapisuje tak:

$$D = D(P),\ S = S(P) \qquad \text{(warunki)}$$

$$D(P) - S(P) = 0 \qquad \text{(kryterium równowagi)}$$

gdzie: D – opisuje popyt, S – podaż i obie te wielkości zależą od cen (P). (1) Zadanie sprowadza się do poszukiwania takich cen P, dla których spełnione jest kryterium równowagi.

Rozwój badań wokół pojęcia równowagi i związanych z nim wielkości dotyczył szczegółowych opisów kształtowania się popytu i podaży. Zakładano różne modele zachowania się konsumentów i producentów, decydujących o popycie i podaży, uwzględniając zróżnicowany zestaw warunków ograniczających ich decyzje.

Przykładowo, już w początkach badań zakładano, że konsument wyznacza swój popyt (jego strukturę i rozmiary) kierując się, jak zapisano wyżej, cenami towarów, ale ponadto określoną hierarchią swoich potrzeb i ma ograniczony budżet.

Konkretnie sformułowania zadania zapisywano, używając różnego aparatu matematycznego, zwykle funkcji. Dokładniejsza analiza wskazuje, że użycie funkcji daje tylko przybliżenie realnych sytuacji (krzywa popytu), a ponadto dla uzyskania rozwiązywalności zadania rozważane są nieliczne klasy funkcji. Pewnych założeń i sytuacji nie można opisać bez użycia multifikacji.

Wracając do wyżej opisanego modelu zachowania się konsumenta przy zadanym budżecie, cenach i hierarchii potrzeb, maksimum zaspokojenia tych potrzeb, w zadanych warunkach, może być realizowane przez zbiór wektorów towarów.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

W punkcie tym określimy pojęcie multifunkcji oraz podamy podstawowe definicje wykorzystywane w pracy. Czytelnikowi zainteresowanemu szerzej tematem polecamy pracę C. Berge'a [8].

Przejdziemy do podania definicji.

Dla dowolnych niepustych zbiorów X i Y multifunkcją nazwiemy odwzorowanie $\varphi: X \to 2^Y$, gdzie 2^Y oznacza rodzinę niepustych podzbiorów Y.

Dla tak zdefiniowanego odwzorowania określimy

$$\text{gr } \varphi := \{(x, y) \in X \times Y: y \in \varphi(x)\}$$

Multifunkcję nazwiemy wypukło-wartościową gdy $\varphi(x)$ jest zbiorem wypukłym, dla każdego $x \in X$.

Powiemy, że multifunkcja jest półciągła z góry (p.c.g.) w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla każdego zbioru V, takiego że $\varphi(x_0) \subset V$, istnieje U, takie że $x_0 \in U$ oraz dla każdego $x \in U$, $\varphi(x) \subset V$.

Mówimy, że φ jest p.c.g., gdy jest p.c.g. w każdym punkcie $x \in X$.

3. MODEL RÓWNOWAGI Z NIEJEDNOZNACZNIE OKREŚLONYM POPYTEM I PODAŻĄ

Punktem wyjścia jest cytowany wcześniej zapis modelu równowagi podany przez R.S.D. Allena.

Zakładamy klasycznie, że popyt zależy od decyzji konsumenta. Konsument ma ograniczony budżet (K) i określona na zbiorze towarów (X) funkcję użyteczności u: $X \to R$, którą stara się maksymalizować przy wyborze towarów ze zbioru X.

Podaż kształtują producenci, kierując się maksymalizacją swoich dochodów, wybierając dopuszczalne procesy technologiczne.

Zadanie poszukiwania równowagi polega na wyznaczeniu takich cen, dla których popyt jest równy podaży.

Zapiszmy tak postawione zadanie. Określając popt konsument rozwiązuje zadanie

$$\max u(x)$$

$$< p, x > = K$$
$$x \geqslant 0$$

gdzie p – ceny, K – dysponowany budżet. Wystarczy, aby funkcja użyteczności nie była silnie wypukła, a powyższe zadanie ma niejednoznaczne rozwiązanie.

Oznaczając zbiór możliwych wyborów towarów przy cenach $p \in P \subset R^n_+$ i budżecie K

$$\hat{X}(p) = \{x \in X, < p, x > \leqslant K\},$$

otrzymujemy, że popyt określa multifunkcja $\varphi: P \to 2^X$ określona następująco

$$\varphi(p) = \begin{cases} x,\ u(x) = \max\limits_{y \in \hat{X}(p)} u(y) \\ \varnothing,\ \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

W przypadku, gdy zbiór $\hat{X}(p)$ jest nieograniczony, nie potrafimy wyznaczyć maksimum funkcji u (bez względu na jej własności). Aby uniknąć, należy przyjąć założenie, że oceny są różne od zera ($p_i \neq 0$).

Podaż również może być zbiorem produktów, zapisanym za pomocą multifunkcji. Producent dostarcza zbiór towarów, który opiszemy odwzorowaniem technologicznym $\Gamma: R^n_+ \to 2^{R^+}$. Dowolny punkt $(x, y) \in \text{gr}\,\Gamma$ opisuje proces technologiczny. Niech całość produkcji dzielą między siebie konsumenci. Przy cenach p i procesie produkcyjnym (x, y) uzyskiwany dochód jest równy $< y-x, p>$. Producent chce uzyskać maksymalny dochód ze swej działalności.

Stąd podaż opisze multifunkcja $\psi: P \to 2^Y$

$$\psi(p) = \{t \in Y,\ <t, p> = \max_{z \in Y} <z, p>\}$$

gdzie $Y = \{y-x: (x, y) \in \text{gr}\,\Gamma\}$

Jeżeli elementy zbioru Y nazwiemy planami (różnica między produkcją i nakładami), to zbiór $\psi(p)$ będzie zbiorem optymlnych dla producenta planów

Przy wprowadzonych definicjach ostatnie równanie podane przez Allena będzie różnicą dwóch multifikacji

$$\varphi(p) \backslash \psi(p) = \Lambda(p) = \varnothing$$

Ogólnie $\Lambda(p)$ nazywa się nadwyżką popytu.

W konkretnych modelach przyjmuje się różne założenia dotyczące zbiorów X i Y.

Przejdziemy do opisu wybranych modeli równowagi, w których w różnym stopniu wykorzystano przedstawiono powyżej pojęcia i rozważania.

4. MODEL WARLASA

W modelu mamy m – producentów, l – konsumentów i n – produktów. Każdy konsument ma funkcję dochodu $K_i(p)$ i odwzorowanie popytu $\varphi_i(p)$ $(i = 1, 2, ..., l)$.

Producenta opisuje zbiór $Y_k \subset R^n$ – planów produkcyjnych i odwzorowanie podaży $\psi_k(p)$ $(k = 1, 2, ..., m)$. Zakładamy, że Y_k są zbiorami zwartymi.

Uważa się, że kapitał konsumenta zależy od zapasu towarów b_i i dochodów wynikających z udziału w produkcji – $J_i(p)$. tak więc

$$K_i(p) = <b_i, p> + J_i(p)$$

Ogólnym zbiorem technologicznym nazwiemy zbiór $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Y_k$

Zakłada się, że dochód producentów dzielą między siebie konsumenci, czyli

$$\sum_{i=1}^{l} J_i(p) = \langle y, p \rangle \quad y \in Y$$

Wektor $(y_1^*, \ldots, y_m^*, x_1^*, \ldots, x_l^*, p^*)$ nazwiemy punktem równowagi, jeżeli

$$y_k^* \in \psi_k(p^*) \qquad k = 1, \ldots, m$$

$$x_i^* \in \varphi_i(p^*) \qquad i = 1, \ldots, l$$

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \geqslant \sum_{i=1}^{l} x_i^*$$

$$\langle p^*, \sum_{k=1}^{m} y_i^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \rangle = \langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \rangle$$

wektor p^* – nazywa się ceną równowagi.

Wprowadza się odwzorowania: ogólnego popytu $\varphi(p) = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(p)$ oraz ogólnej podaży

$$\psi(p) = b + \sum_{k=1}^{m} \psi_k(p), \; b = \sum_{i=1}^{l} b_1,$$

które są związane następującą nierównością

$$\langle p, x \rangle \leqslant \langle p, y \rangle, \; x \in \varphi(p), \; y \in \psi(p)$$

noszącą nazwę warunku Warlasa w szerokim znaczeniu. (Jeżeli zastąpić ją równością, mówimy o warunku Warlasa w wąskim znaczeniu.)

Warunki występujące w pojęciu punktu równowagi można sformułować następująco: popyt nie może przewyższyć podaży oraz wartość kupionych towarów równa jest wartości sprzedanych.

Wykorzystując definicje $\varphi(p)$ i $\psi(p)$, można powiedzieć, że punktem równowagi nazywamy wektor (y^*, x^*, p^*) taki, że

$$y^* \in \psi(p^*), \; x^* \in \varphi(p^*$$

$$x^* \leqslant y^*$$

$$\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$$

5. MODEL ARROW'A–DEBREU'A

Model jest zbliżony w strukturze do modelu Warlasa. Zasadnicza różnica zawarta jest w konkretnym zapisie funkcji dochodu konsumenta $J(p)$.

Przy zachowaniu oznaczeń z poprzedniego rozdziału, dla każdego konsumenta $i, 1 \leqslant i \leqslant l$, zakłada się:

– dochód $K_i(p) = <p, b_i> + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} <p, y_j>$

gdzie:

b_i – zapas początkowy towarów,

α_{ij} – część dochodu j-tego producenta, którą otrzymuje i-ty konsument,

y_j – plan j-tego producenta,

$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} = \mathrm{i}$

Kapitał składa się więc z zapasu i udziału w sektorze produkcji (np. jako akcjonariusza lub robotnika najemnego).

– Zbiór $X_i \subset R_+^n$, na którym określona jest funkcja użyteczności u_i jest wypukły, domknięty i nieograniczony, przy czym z tego, że w ciągu $x^k \in X_i$ $(k = 1, 2, \ldots,)$ dowolna współrzędna $x_j^k \to \infty$ wynika, że pozostałe też dążą do nieskończoności.

– Funkcja $u_i(x)$ jest ciągła i wklęsła na X_i.

– Dla każdego i istnieje taki wektor $\bar{x}_i \in X_i$, że $\bar{x}_i < b_i$.

– Każdy konsument jest nienasycony.

Z przedostatniego założenia wynika, że każdy konsument posiada różny od zera zapas towarów.

Dla sektora produkcyjnego założymy, że zbiory Y_k - planów k-tego producenta są silnie wypukłe, zwarte i $0 \in Y_k$.

Twierdzenie. (21) W modelu Arrow'a - Debreu'a istnieje punkt równowagi.

Lemat. (7) Odwzorowania φ i ψ są p.c.g., a zbiory $\varphi(p)$ i $\psi(p)$ są niepuste, wypukłe i domknięte.

6. MODEL GWARANTUJĄCY DOCHODY

Przedstawiam wariant modelu Arrow'a - Debreu'a, w którym przyjmuje się dodatkowo istnienie socjalnego systemu zabezpieczenia państwowego.

Przyjmiemy oznaczenia:

$$\Pi_j(p) = \max_{y \in Y_j} <\mathrm{p}, \mathrm{y}> \quad \mathrm{j} = 1, \ldots, m$$

$$\Pi(p) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(p)$$

Liczba $d = \Pi(p)/l$ – to średni poziom dochodu. Przedsięwzięcie j-te nazwiemy

rentownym, jeżeli przy cenach p, $\Pi_j(p) > 0$. Numery wszystkich rentownych przedsięwzięć oznaczamy przez $J_1(p)$ oraz $J_2(p) = \{1, 2, ..., m\} \setminus J_1(p)$.

Przy wyznaczeniu cen p, określamy liczbę d i wybiera się liczbę $\mu \in [0, 1]$. Liczba μd jest minimalnym poziomem dochodu..

Aby każdy uczestnik systemu miał zapewniony minimalny dochód, państwo pobiera od każdego przedsiębiorstwa podatek $(1-\mu)$.

Tak więc realny dochód określony jest jako

$$\bar{\Pi}_j(p) = \mu \Pi_j(p) \qquad j \in J_1$$

$$\bar{\Pi}_j(p) = 0 \qquad j \in J_2$$

Dochód konsumenta będzie równy

$$K_i(p) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \bar{\Pi}_j(p) + \max\{0, \mu d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \bar{\Pi}_j(p)\}$$

Należy tak dobrać wartość μ, aby spełniony był warunek Warlasa w wąskim znaczeniu

$$\sum_{i=1}^{l} K_i(p) = \Pi(p)$$

stąd

$$\mu = \Pi(p)\left[\sum_{j \in J_1} \Pi_j(p) + \sum_{i=1}^{l} \max\left\{0, d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \bar{\Pi}_j(p)\right\}\right]^{-1}$$

Wielkość $\max\left\{0, \mu d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \bar{\Pi}_j(p)\right\}$ jest wypłacana każdemu konsumentowi, jeżeli dochód $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \bar{\Pi}_j(p)$ płynący z uczestnictwa w sektorze jest mniejszy niż d.

Oznaczamy przez $\gamma(p) = 1 - \mu(p)$ wielkośyć podatku, wtedy odwzorowanie całkowitego popytu $\varphi(p, \gamma(p))$.

Stanem równowagi nazywamy czwórkę $(x^*, y^*, p^*, \gamma^*)$ taką, że

$$x^* \in \varphi(p^*, \gamma^*), y^* \in \psi(p^*)$$

$$x^* \leqslant y^*, <p^*, x^*> = <p^*, y^*>$$

Twierdzenie. (7) Jeżeli spełnione są następujące założenia:

1. Zbiór $X_i \subseteq R_+^n$ jest wypukły i domknięty oraz dla $x^s \in X_i$, jeżeli $\|x^s\| \to \infty$, $s \in N$, to $x_j^s \to \infty$, $j = 1, ..., n$.
2. Funkcja $u_i(x)$ jest ciągła i wklęsła na X_i.
3. $0 \in X_i$.
4. Każdy konsument jest nienasycony.
5. Zbiór Y_j jest zwarty, a zbiór $Y = \bigcup_{j=1}^{l} Y_j$ jest wypukły.

6. istnieje $y \in Y$, że $y > 0$.

Wtedy w modelu gwarantującym dochody istnieje stan równowagi taki, że $K_i(p) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

7. MODEL Z USTALONYMI DOCHODAMI

Rozpatrzymy model ogólnej równowagi, w którym nie uściśla się sposobu formowania dochodu konsumentów. Przyjmujemy, że dochód każdego konsumenta jest wielkością stałą, niezależną od cen.

Funkcja użyteczności u_i jest określona na zbiorze $X_i \subseteq R^n_+$. Sektor produkcyjny zadany jest ogólnym zbiorem technologicznym Y. Każdy uczestnik chce maksymalizować swoją funkcję użyteczności z udziałem ograniczeń budżetowych. To oznacza, że odwzorowanie popytu $\varphi_i(p)$ jest zbiorem rozwiązań zadania

$$\max u_i(x)$$

$$<p, x> \leqslant K_i$$

$$x \in X_i$$

Odwzorowanie podaży $\psi(p)$ jest rozwiązaniem zadania

$$\max <p, y>$$

$$y \in Y$$

Twierdzenie. (20) Załóżmy, że

1. Funkcje u_i są ciągłe i wklęsłe na X_i.
2. Zbiory X_i są domknięte i wypukłe oraz $0 \in X_i$.
3. Liczby $K_i > 0$.
4. $Y \subseteq R^n_+$ jest wypukły i zwarty oraz istnieje $y \in Y$, że $y > 0$.

Wtedy istnieje stan równowagi w modelu z ustalonymi dochodami.

Porównując ten model z modelem rozważanym w rozdziale 5, widzimy, że nie ma założeń dotyczących struktury zbiorów X_i, nie zakłada się nienasyconości konsumentów, ale pojawia się dodatkowe założenie, że $Y \subseteq R^n_+$.

8. MODEL MAKAROWA

W modelu Makarowa nie ma rozróżnienia na konsumentów i producentów, każdy z uczestników systemu może występować w dwóch rolach. Mamy więc l-uczestników systemu oraz n-towarów. Każdemu uczestnikowi odpowiada zbiór $X_i \subseteq R^n$, będący jego strategiami jako konsumenta, oraz zbiór $Y_i \subseteq R^n$, stanowiący jego możliwości jako producenta.

Możliwości działania i-tego uczestnika przedstawia zbiór $Z_i = X_i \times Y_i$. Oznaczmy przez $P \subseteq R^n$ zbiór dopuszczalnych cen.

Dowolny stan ekonomii określi wektor $(z_1, z_2, ..., z_l, p) \in Z$, gdzie $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_l \times P$.

Interesy i-tego uczestnika opisuje odwzorowanie $G_i: Z \to 2^Z$, gdzie $G_i(z) \subseteq Z$ interpretuje się jako realny zbiór wszystkich możliwych stanów $z' \in G_i(z)$, które są dla danego uczestnika korzystniejsze niż z.

W odróżnieniu od poprzednich modeli dopuszcza się, że interesy i-tego uczestnika zależą nie tylko od tego co otrzymuje, ale również od wybranej strategii $y_i \in Y_i$, czyli od wyników i wkładanych wysiłków. Odwzorowanie G_i zależy od zbioru Z, *czyli od* $z_j, j \neq i$. Każdy w swoim działaniu bierze pod uwagę zachowanie innych partnerów.

Dochód opisuje funkcja $r_i: Z \to R, r_i(z)$ to dochód w stanie z. Niech $\bar{z} = (z_1, z_2, ..., \bar{z}_i, ..., z_l, p)$, wtedy ograniczenie budżetowe i-tego uczestnika opisze multifunkcja $B_i: Z \to 2^{Z_i}$

$$B_i(z) = \{\bar{z}_i \in Z_i: <\bar{x}_i, p> \leqslant r_i(\bar{z})\}$$

Odwzorowanie nadwyżki popytu zapisuje się następująco:

$$\Lambda(z) = \sum_{i=1}^{l} x_i - \sum_{i=1}^{l} y_i$$

Stan jest zbilansowany, jeżeli $\Lambda(z) = 0$.

Stanem równowagi nazywamy wektor z^* taki, że

$$B_i(z^*) \cap G_i|_{Z_i}(z^*) = \varnothing$$

$$z_i^* \in B_i(z^*)$$

$$\Lambda(z^*) = 0$$

Przedostatnia równość mówi, że wybór jest z poparciem zbioru budżetowego, czyli że dochody przewyższają wydatki. Równość pierwsza zapewnia uczestnikowi najkorzystniejszą dla siebie sytuację. Uczestnik nie może jej poprawić zamieniając z^* na $\bar{z}$ i wybierając $\bar{z}_i$, jeżeli inni pozostawią swoje strategie niezmienione.

Twierdzenie. (19) Niech

1) Zbiór P będzie wypukły i zwarty oraz $0 \in \text{int } P$.
2) Zbiory X_i i Y_i będą wypukłe i zwarte.
3) Funkcje r_i ciągłe i wypukłe względem z oraz $r_i(z) = 0$ dla $p = 0$.
4) Zbiór $A_i = \{(z, z_i): z \in Z, z_i \in G_i(z)\}$ – otwarty.
5) Wypełniony jest warunek Warlasa w wąskim znaczeniu.
6) Jeżeli $p \neq 0$, to dla każdego $z \in Z$ istnieje $\bar{x}_i \in X_i$, że $<\bar{x}_i, p> < r_i(z)$.
7) Każdy uczestnik jest nienasycony.

Wówczas istnieje stan równowagi.

9. MODEL HILDENBRANDA

Zbiór uczestników systemu określamy trójką (A, α, ν) – gdzie A jest zbiorem uczestników systemu, α – jest δ-algebrą – opisuje wszystkie możliwe koalicje uczestników, a zadana atomowa miara ν na α jest informacją o frakcji konsumentów będących w koalicji. Zbiór uczestników systemu jest skończony.

Przestrzeń Euklidesowa R^l_+ opisuje zbiór towarów. Każdy towar ma określoną cenę $p_i \geqslant 0$ $i = 1, 2, \ldots, l$ $(P = \{p \in R^l_+ \; p \geqslant 0\})$.

Każdy konsument posiada zbiór konsumpcyjny realizowany przez multifunkcję X: $A \to 2^{R^l_+}$. Podzbiór $X(a) \subseteq R^l_+$ reprezentuje wszystkie możliwe plany konsumpcji dla konsumenta $a \in A$. Wektor początkowych zapasów opisuje funkcja k: $A \to R^l_+$, dla $a \in A$ wartość $k(a) \in X(a)$.

O zbiorze $X(a)$ założymy, że jest domknięty, wypukły, ograniczony z dołu przez wektor b i ma niepusty przekrój z ustalonych zwartym podzbiorem $K \subseteq R^l$. Konsument wybiera plany konsumpcji posługując się relacją preferencją $\succ_a$. Niech Q będzie zbiorem wszystkich możliwych relacji. Wybór jednej wiązki towarowej jest możliwy tylko w przypadku, gdy relacja preferencji jest ściśle wypukła. Często wybieramy więc ze zbioru alternatywnych propozycji realizujących maksymalnie poziom satysfakcji konsumenta.

Odwzorowaniem budżetowym nazwiemy multifunkcję B: $A \to 2^{R^l}$

$$B(a) = \{x \in X(a): px \leqslant w(a)\},$$

gdzie w jest wartością wiązki a.

Odwzorowaniem popytu nazwiemy multifunkcję φ: $A \to 2^{R^l}$

$$\varphi(a) = \{z \in B(a): \text{nie istnieje } x \in B(a) \text{ taki, że } x \succ_a z\}$$

Odwzorowaniem popytu określiliśmy maksymalne elementy ze zbioru budżetowego dla konsumenta a.

Sektor produkcji opisuje przeliczalnie-addytywna, wypukło-wartościowa multifunkcja Y: $\alpha \to 2^{R^l}$. Multifunkcja Y przyporządkowuje każdej koalicji $S \in \alpha$ zbiór $Y(S)$ – reprezentuje on plan produkcyjny koalicji S.

Rozpatrzymy prostą wymianę towarów. Oznaczmy całkowity zapas modelu

$$K = \sum_{a \in A} k(a)$$

Po przejściu do nowego stanu mamy nowy podział zapasów $L = (l(a): a \in A)$.

Całkowita równowaga (Warlasa) dla cen oraz podziału zasobów l ma miejsce gdy

$$l(a) \in \varphi(a), \; a \in A$$

$$\sum_{a \in A} l(a) = \sum_{a \in A} k(a)$$

Pierwszy warunek zapewnia maksymalną satysfakcję z wybranych działań, a drugi zapewnia równowagę podaży i popytu.

Twierdzenie. (13) Jeżeli

1) $\varphi(a)$ jest niepustym, zwartym i wypukłym zbiorem,

2) multifunkcja φ jest jednorodna stopnia zero względem p (tzn. $d(a, \lambda p) = \lambda d(a, p), \lambda > 0$) i p.c.g.,

3) niech $\{p_k\}$ – ciąg cen i $\|x\|$ – jest normą $\sum_{i=1}^{l} x_i$, jeżeli $pk(a) > 0$ wtedy $\inf\{\|x\| \in R, x \in \varphi(a, p_n)\} \to \infty$,

4) $K > 0$,

wtedy istnieje równowaga w sensie Warlasa (l^*, p^*).

Przyjmijmy, że podział l jest funkcją całkowalną oraz podział l ma wartości takie, że $l(a) \in X(a)$. Powiemy, że jest on osiągany jeżeli

$$\int_A l\,dv = \int_A k\,dv$$

Koalicja $S \in \alpha$ wprowadzająca podział r ulepszy podział l jeżeli

$$r(a) \succ_a l(a),\ a \in A$$

$$\int_S r\,dv = \int_S k\,dv \qquad v(S) > 0$$

Jądrem modelu nazwiemy zbiór wszystkich możliwych podziałów najkorzystniejszych dla wszystkich koalicji w α.

Twierdzenie. (17) Jądro modelu pokrywa się ze zbiorem punktów równowagi.

10. MODEL RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ

Rozpatrujemy system ekonomiczny z n-typami produktów, w pewnym okresie podzielonym na pewne odcinki $[0,1], [1,2], \ldots, [t, t+1]$

Produkcyjny sektor w okresie $[t, t+1]$ opisuje zbiór technologiczny $Z_t \subset R_+^{2n}$, elementy $(x, y) \in Z_t$ są procesem produkcyjnym (produkcja $y \in R_+^n$ przy nakładach $x \in R_+^n$).

Konsumpcyjny sektor opisujemy multifunkcją całkowitego popytu φ_t: $R_+ \to 2^{R_+^n}$ przyporządkowującą każdemu wektorowi cen $p_t \in R_+^n$ na towary (w przedziale $[t, t+1]$) zbiór $\varphi_t(p_t)$ najbardziej przydatnych produktów dla konsumenta.

Dochód z procesu technologicznego $(x, y) \in Z_t$ określamy jako $< p_{t+1}, y > - < p_t, x >$.

Sektor konsumpcyjny, obserwując ceny w danym przedziale, tworzy popyt $c_t \in \varphi_t(p_t)$.

Sektor produkcji maksymalizuje dochód ze swej działalności, poszukuje

$$\max_{(x,y) \in Z_t} (< p_{t+1}, y > - < p_t, x >)$$

Trajektorią równowagi z początkiem w y_0 nazwiemy czwórkę $\{p_t, c_t, x_t, y_t\}$ taką, że

1) $c_t \in \varphi_t(p_t), t = 0, 1, 2, \ldots, T$

2) $(x_t, y_{t+1}) \in Z_t, t = 0, 1, \ldots, T-1$

3) $< p_{t+1}, y_{y+1} > - < p_t, x_t > \geqslant < p_{t+1}, y'_{t+1} > - < p_t, x'_t >$
$\forall (x'_t, y'_{t+1}) \in Z_t, t = 0, 1, \ldots, T-1$

4) $c_t \leqslant y_t - x_t, t = 0, 1, \ldots, T$

5) $< p_t, c_t > = < p_t, y_t - x_t > t = 0, 1, \ldots, T$

6) $< p_T, x_T > = 0$

Trzy pierwsze warunki opisują działania uczestników systemu. czwarty i piąty ukazują regulującą funkcję cen równowagi – ceny powinny być takie, aby popyt x_t sektora produkcji nie przewyższał zapasu towarów y_t wyprodukowanych w poprzednim okresie (warunek 4), ponieważ $c_t \geqslant 0$), oraz ogólny popyt $x_t + c_t$ też nie może przekroczyć produkcji y_t w danym przedziale $[t, t+1]$. Warunek 5 jest dynamicznym odpowiednikiem równowagi w sensie Warlasa.

Słowne sformułowanie trajektorii równowagi jest następujące: w przedziale $[t, t+1]$ mamy zapas towarów y_t, uczestnicy systemu dzielą go na dwa składniki: x_t – nakłady na produkcję w następnym okresie i $s_t = y_t - x_t$ konsumpcję. Jednocześnie określa się popyt c. Ceny równowagi powinny zapewnić bilans materiałowy i wartościowy.

Twierdzenie. (20) Jeżeli spełnione są arunki:

1) Odwzorowania $\varphi_t(p)$ są p.c.g., a zbiory $\varphi_t(p)$ są wypukłe i ograniczone przy $p \in R^n_+$,

2) istnieje liczba $\beta > 0$, że $< p, c > \leqslant \beta$ dla $p \in R^n_+$, $c \in \varphi_t(p)$ $t = 0, 1, 2, \ldots$,

3) Z_t są domkniętymi, wypukłymi, ograniczonymi zbiorami w R^{2n}_+, $(0, 0) \in Z_t$;

4) istnieje ciąg $(\bar{x}_t, \bar{y}_{t+1}) \in Z$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, dla którego $\bar{y}_t - \bar{x}_t \geqslant \bar{s} > 0$, gdzie $\bar{s}$ dowolny wektor;

5) $y_0 > 0$,

to dla dowolnego $T < \infty$ istnieje trajektoria równowagi z początkiem w y_0

11. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione powyżej modele równowagi zapisane są różnym językiem, z innym poziomem ogólności. W każdym z nich multifunkcja jest narzędziem pozwalającym na realniejsze opisy przedstawionych stytuacji. Rezygnacja z aparatu multifunkcji prowadziłaby do przyjęcia upraszczających założeń o zachowaniu się wszystkich uczestników przedstawionych modeli równowagi.

BIBLIOGRAFIA

[1] Allen R.S.D.: Ekonomia matematyczna. Warszawa PWN 1961.
[2] Allen R.S.D.: Teoria makroekonomiczna. Warszawa PWN 1975
[3] Arrow K.J., Debreu G.: Existence of equilibrium of the competitive economy. "Econometrica" 22(1954), 265-290.
[4] Arrow K.J., Intrilligator M.D.: Handbook of mathematical economics. N.-H. Amsterdam 1981.
[5] Aszmanow C.A.: Matiematiczeskije modieli i metody w ekonomikie. Moskwa Mir 1980.
[6] Aszmanow C.A.: Wwiedienie w matiematiczieskuju ekonomiku. Moskwa Nauka 1984.
[7] Auman R.J.: Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders. Econometrica 34,1(1966).
[8] Berge C.: Espaces topologique. Paris 1959.
[9] Czerwiński Z.: Matematyczne modelowanie procesów ekonomicznych. Warszawa PWN 1982.
[10] Debreu G.: Theory of value. New York J. Wiley 1959.
[11] Gale D.: A mathematical theory of Economics Development. Bull. Am. Math. Soc. 74,2(1968), 207-233.
[12] Hildenbrand W.: Core equilibria of Large Economy. Princenton Univ. Press, Princenton, New Jersey 1974.
[13] Hildenbrand W.: Introduction to Equilibrium Analysis, N.H.-Amsterdam, Oxford. New York 1976.
[14] Nikaido H.: Wypukłyje struktury i matiematiczeskaja ekonomika, Moskwa Mir 1972.
[15] Ichischi T.: Game theory for economic analysis. New York, Academic Press 1983.
[16] Klein E.: Mathematical methods in theoretical economics. Topological and vector spaces foundations of equilibrium analysis. New York 1973.
[17] Klein E.: Theory of correspondences. Including Applications to Mathematical Economics. New York, C.M.S., 1984.

[18] Makaraow W.L., Rubinow A.M.: Matiematiczeskaja teoria ekonomiczieskoj dinamiki i rawnowiesja. Moskwa Mir 1973.

[19] Makaraow W.L.: Ekonomiczieskije rawnowiesie: suszczestwowanie i ekstiemalnoje swojstwo. Itogi Nauki i techniki T. 19, 22-57, 1981.

[20] Połterowicz W.M.: Rawnowiesnyje trajektorii ekonomiczieskowo rosta. W: Metody funkcjonalnowo analiza w matiematiczieskoj ekonomikie. Nauka Moskwa, 1978, 56-97.

[21] Trzpiot G.: Zastosowanie gier z wymuszeniami w modelu równowagi ekonomicznej. Praca magisterska, Katowice US, 1982.