Krzysztof Piasecki

PROPOZYCJE SKŁADNIKÓW PORTFELA FINANSOWYCH PROCESÓW LOSOWYCH

1. Problem badawczy

Istotą inwestowania jest ponoszenie kosztów w imię spodziewanych w przyszłości korzyści. Stąd omawiając jakikolwiek proces inwestycyjny nie sposób pominąć zależności analizowanych wartości finansowych od upływu czasu. Dodatkowo należy zwrócić tutaj uwagę na fakt, że zainwestowane środki przynoszą korzyści dopiero po pewnym czasie od podjęcia inwestycji. W tej sytuacji oczekiwania inwestora co do przyszłych korzyści są obarczone niepewnością. Skojarzenie konieczności wyznaczenia upływu czasu z potrzebą uwzględnienia niepewności prowadzi do częstego i owocnego modelowania ewolucji wartości kapitałowych za pomocą procesów stochastycznych (porównaj na przykład [4], [5]).

W tym nurcie badawczym mieści się praca [1], gdzie przedstawiono propozycję takiego portfela aktywów i pasywów finansowych, w którym każdy składnik jest przedstawiony jako geometryczny ruch Browna (porównaj [5]).

Niniejsza praca nawiąże do przedstawionych tam wyników formalnych, które zostaną porównane z kolejnymi modelami procesów losowych proponowanych jako składniki portfela Markowitza. Ze względu na studyjny charakter pracy ograniczono się do najbardziej przejrzystego modelu portfela dwuskładnikowego.

2. Statyczny model portfela

Analizujemy proces inwestycyjny w bieżącym momencie czasu $t = 0$. Załóżmy, że w momencie tym dysponujemy kapitałem C, który w pełni zamierzamy zainwestować w instrumenty finansowe P_i i P_2. Na zakup instrumentu finansowego P_1 przeznaczamy $\alpha \cdot C$ posiadanego kapitału, zaś na zakup instrumentu P_2 $(1 - \alpha) \cdot C$ posiadanego kapitału. Nic nie stoi tutaj na przeszkodzie, abyśmy dopuścili możliwość krótkiej sprzedaży, co oznacza rezygnację z założenia $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$. W tej sytuacji w momencie $t = 0$ dysponujemy instrumentem finansowym P_1 o wartości

$$X_1 = \alpha \cdot C \tag{2.1}$$

oraz instrumentem finansowym P_2 o wartości

$$X_1 = (1 - \alpha) \cdot C. \tag{2.2}$$

Łącznie z instrumentów P_1 i P_2 utworzyliśmy portfel inwestycyjny P o wartości początkowej

$$\Pi(0) = X_1 + X_2 = C. \tag{2.3}$$

3. Dynamiczny model portfela. Przypadek ogólny

Jak wiemy, wartość nabytego instrumentu P_i ewoluuje w czasie, przy czym każda z jego przyszłych wartości jest obarczona pewną dozą niepewności. Skłania to nas do opisania zmian zgromadzonego instrumentu P_i jako procesu losowego $X_i : T \times \Omega \to R$, gdzie symbol T oznacza zbiór rozpatrywanych momentów czasowych, zaś symbol Ω zbiór stanów świata zewnętrznego rozumiany jako zbiór zdarzeń elementarnych. Zgodnie z założeniami statystycznego modelu portfela dla każdego $\omega \in \Omega$ mamy

$$X_i(0, \omega) = X_i. \tag{3.1}$$

Wzajemne relacje pomiędzy zmiennymi losowymi $X_i(t,\cdot)$ opisywać będziemy za pomocą:

- wartości oczekiwanej

$$E(X_i(t,\cdot)) = m_i(t); \tag{3.2}$$

- wariancji

$$\text{var}(X_i(t,\cdot)) = v_i(t); \tag{3.3}$$

- kowariancji

$$\text{cov}(X_i(t,\cdot); X_2, (t,\cdot)) = k_{12}(t). \tag{3.4}$$

Konsekwencją takiego podejścia jest zdefiniowanie dynamicznego portfela jako procesu losowego $\Pi : T \times \Omega \to R$ danego warunkami

$$\Pi(t, \omega) = X_1(t, \omega) + X_2(t, \omega), \tag{3.5}$$

$$\Pi(0, \omega) = C. \tag{3.6}$$

Mamy wtedy oczywiście

$$E(\Pi(t,\cdot)) = m_1(t) + m_2(t), \tag{3.7}$$

$$\text{var}(\Pi(t,\cdot)) = v_1(t) + k_{12}(t) + v_2(t). \tag{3.8}$$

Każda procedura optymalizacji portfela $\Pi(t,\cdot)$ oznaczać będzie dążenie do maksymalizacji wartości oczekiwanej $E(\Pi(t,\cdot))$ opisującej oczekiwane korzyści przy równoczesnej minimalizacji wariancji var $(\Pi(t,\cdot))$ opisującej ryzyko.

4. Procesy Wienera – wybrane własności

Z formalnego punktu widzenia przedmiotem naszej analizy będzie za każdym razem proces losowy $A : T \times \Omega \to R$ rozumiany jako indeksowana parametrem czasu rodzina zmiennych losowych $A(t,\cdot) : \Omega \to R$. W sytuacji gdy nie będą nas interesowały konkretne realizacje zmiennej losowej $A(t,\cdot)$ oznaczać ją będziemy skróconym symbolem

$$\tilde{A}(t) = A(t,\cdot). \tag{4.1}$$

Do opisu instrumentów finansowych będziemy używać danej pary współzależnych procesów losowych Wienera $(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2)$ (porównaj [5] s. 172) spełniających warunki:

$$d\tilde{W}_i \sim N(0, dt), \tag{4.2}$$

$$\text{cov}(d\tilde{W}_1, d\tilde{W}_2) = \rho dt, \tag{4.3}$$

$$\tilde{W}_i(0) = 0. \tag{4.4}$$

Mamy wtedy (na podstawie [5] s. 165)

$$\tilde{W}_i(t) \sim N(0, t), \tag{4.5}$$

$$\operatorname{cov}(\widetilde{W}_1(t), \widetilde{W}_2(t)) = \rho t. \tag{4.6}$$

Dodatkowo w dalszych rozważaniach wykorzystamy wyniki poniższych lematów. Proste rachunki – uzasadniające zaprezentowane tutaj tezy – zostały przeprowadzone z użyciem sugestii pochodzących z [2] i [3].

Lemat 4.1: Każdą parę współzależnych procesów Wienera $(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2)$ spełniających warunki (4.2) i (4.3) można przedstawić jako kombinację liniową.

$$d\widetilde{W}_i = a_{i1} d\widetilde{V}_1 + a_{i2} d\widetilde{V}_2, \tag{4.7}$$

gdzie para $(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2)$ jest dwuwymiarowym procesem Wienera, to znaczy

$$d\widetilde{V}_i \sim N(0, dt), \tag{4.8}$$

$$\operatorname{cov}(dV_1, dV_2) = 0. \tag{4.9}$$

Zbiór liczb a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} jest ograniczony warunkami:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \tag{4.10}$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \tag{4.11}$$

$$a_{11} a_{21} + a_{12} \cdot a_{22} = \rho. \tag{4.12}$$

Dowód: Możliwość przedstawienia pary $(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2)$, jak i kombinacji (4.7), wynika wprost z twierdzenia o reprezentacji wektora zmiennych losowych mających łączny wielowymiarowy rozkład normalny (patrz [2] s. 521).

Rozważmy zbiór wszystkich liczb $a_{ij} = (i = 1,2; j = 1,2)$ spełniających równanie (4.7). Z (4.8) i (4.9) otrzymujemy wtedy

$$a_{i1} d\widetilde{V}_1 + a_{i2} d\widetilde{V}_2 \sim N(0, (a_{i1}^2 + a_{i2}^2) dt).$$

Ostatni wniosek wraz z (4.2) dowodzi konieczności spełnienia przez liczby a_{ij} ograniczeń (4.10) i (4.11). Ponadto z (4.7) wraz z (4.3) i (4.9) mamy

$$\rho\, dt = \operatorname{cov}(d\widetilde{W}_1, d\widetilde{W}_2) = \operatorname{cov}(a_{11}d\widetilde{V}_1 + a_{12}d\widetilde{V}_2, a_{21}d\widetilde{V}_1 + a_{22}d\widetilde{V}_2) = a_{11}a_{21}dt + a_{12}a_{22}dt,$$

co wprost prowadzi do (4.12). Układ równań (4.10) i (4.11), (412) posiada rozwiązania (np. $a_{11} = \sqrt{1-\rho^2}, a_{12} = \rho, a_{21} = 0, a_{22} = 1$), co kończy dowód lematu.

Lemat 4.2: Dla dowolnych funkcji $b_i : T \to R$ istnieje proces Wienera spełniający warunek

$$b_1(t)d\widetilde{W}_1 + b_2(t)d\widetilde{W}_2 = \sqrt{b_1^2(t) + 2\rho b_1(t)b_2(t) + b_2^2(t)}\, d\widetilde{W}^*. \tag{4.13}$$

Dowód: Z lematu 4.1 mamy

$$\begin{aligned} b_1(t)d\widetilde{W}_1 + b_2(t)d\widetilde{W}_2 &= (b_1(t)\cdot a_{11} + b_2(t)\cdot a_{21})d\widetilde{V}_1 + (b_1(t)\cdot a_{12} + b_2(t)\cdot a_{22})d\widetilde{V}_2 = \\ &= \sqrt{(b_1(t)a_{11} + b_2(t)a_{21})^2 + (b_1(t)a_{12} + b_2(t)a_{22})^2}\, d\widetilde{W}^* = \\ &= \sqrt{b_1^2(t)(a_{11}^2 + a_{12}^2) + 2b_1(t)b_2(t)(a_{11}\cdot a_{21} + a_{12}a_{22}) + b_2^2(t)(a_{21}^2 + a_{22}^2)}\, d\widetilde{W}^* = \\ &= \sqrt{b_1^2(t) + 2\rho b_1(t)\cdot b_2(t) + b_2^2(t)}\, d\widetilde{W}^*. \end{aligned}$$

Lemat 4.3: Dla dowolnych funkcji $b_i : T \to R$ istnieje proces Wienera $\widetilde{W}^*$ spełniający warunek

$$b_1(t)\cdot\widetilde{W}_1(t) + b_2(t)\cdot\widetilde{W}_2(t) = \sqrt{b_1^2(t) + 2\rho\, b_1(t)b_2(t) + b_2^2(t)}\cdot\widetilde{W}^*(t). \tag{4.14}$$

Dowód: Przebiega identyczne jak dowód lematu 4.2.

Lemat 4.4: Niech będą dane procesy losowe $\widetilde{A}_i$ $(i = 1,2)$ opisane przez różniczki Itô

$$d\widetilde{A}_i = a_i(t)dt + b_i(t)d\widetilde{W}_i, \tag{4.15}$$

gdzie $a_i : T \to R$ i $b_i : T \to R$ (porównaj z [3]). Mamy wtedy

$$\begin{aligned} &E(\widetilde{A}_1(t)\cdot\widetilde{A}_2(t)) = \\ &= \int_0^t a_1(s)\cdot \mathrm{E}(\widetilde{A}_2(s)) + a_2(s)\cdot \mathrm{E}(\widetilde{A}_1(s)) + \rho\, b_1(s)\cdot b_2(s)ds + A_1(0)\cdot A_2(0) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dowód: Z wielowymiarowej wersji wzoru Itô (porównaj [3] s. 132), dzięki lematowi 4.1 otrzymujemy

$$d(\widetilde{A}_1 \cdot \widetilde{A}_2) = [a_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t) + a_2(t) \cdot \widetilde{A}_1(t) + b_1(t) \cdot b_2(t)(a_{11} \cdot a_{21} + a_{12} \cdot a_{22})]dt +$$
$$+ b_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t)(a_{11} d\widetilde{V}_1^2 + a_{12} d\widetilde{V}_2) + b_2(t) \cdot \widetilde{A}_1(t)(a_{21} d\widetilde{V}_1 + a_{22} d\widetilde{V}_2) =$$
$$= [a_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t) + a_2(t) \cdot \widetilde{A}_1(t) + \rho\, b_1(t) \cdot b_2(t)]dt +$$
$$+ [a_{11} b_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t) + a_{21} b_2(t) \cdot \widetilde{A}_1(t)]d\widetilde{V}_1 + [a_{12} b_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t) + a_{22} b_2(t) \cdot \widetilde{A}_1(t)]dV_2^2.$$

Całkując obustronnie, uzyskujemy

$$\widetilde{A}_1(t) \cdot \widetilde{A}_2(t) - \widetilde{A}_1(0) \cdot \widetilde{A}_2(0) = \int_0^t a_1(s) \cdot \widetilde{A}_2(s) + a_2(s) \cdot \widetilde{A}_1(s) +$$
$$+ \rho\, b_1(s) \cdot b_2(s)ds + \int_0^t a_{11} b_1(s) \cdot \widetilde{A}_2(s) + a_{21} b_2(s) \cdot \widetilde{A}_1(s) d\widetilde{V}_1(s) +$$
$$+ \int_0^t a_{12} b_1(s) \cdot \widetilde{A}_2(s) + a_{22} b_2(s) \cdot \widetilde{A}_1(s) d\widetilde{V}_2(s).$$

Z ostatniej zależności, dzięki twierdzeniu o wartości oczekiwanej całki stochastycznej (można znaleźć w [3] s. 124) otrzymujemy bezpośrednio (4.16).

Lemat 4.5: Niech będą dane procesy losowe $\widetilde{A}_i$ $(i = 1,2)$ opisane przez różniczkę Itô (4.15). Mamy wtedy

$$E(\widetilde{A}_i^2(t)) = \int_0^t 2a_i(s)\mathrm{E}(\widetilde{A}_i(s)) + b_i^2(s)ds + \widetilde{A}_i^2(0). \tag{4.17}$$

Dowód: Z podstawowego wzoru Itô (porównaj [3] str. 129) otrzymujemy

$$d\widetilde{A}_i^2(t) = [2a_i(t) \cdot \widetilde{A}_i(t) + b_i^2(t)]dt + 2b_i(t) \cdot \widetilde{A}_i(t) d\widetilde{W}_i.$$

Całkując obustronnie, uzyskujemy

$$\widetilde{A}_i^2(t) - \widetilde{A}_i^2(0) = \int_0^t 2a_i(s)\widetilde{A}_i(s) + b_i^2(s)ds + 2\int_0^t b_i(s)\widetilde{A}_i(s) d\widetilde{W}_i(s).$$

Z ostatniej zależności, dzięki cytowanemu już twierdzeniu o wartości oczekiwanej całki stochastycznej, otrzymujemy bezpośrednio (4.17).

5. *Dynamiczny model portfela – arytmetyczny ruch Browna*

W rozdziale tym założymy, że ewolucja wartości zgromadzonego instrumentu finansowego P_i przebiega w sposób opisany przez proces losowy $\widetilde{S}_i$ scharakteryzowany przez różniczkę Itô

$$d\widetilde{S}_i = \mu_i X_i st + \sigma_i X_i d\widetilde{W}_i, \tag{5.1}$$

$$\widetilde{S}_i(0) = X_i. \tag{5.2}$$

gdzie:
X_i – wartość początkowa instrumentu P_i opisana w części 2;
μ_i – stopa przesunięcia (dryfu);
σ_i – współczynnik zmienności.
Proces $\widetilde{S}_i$ w literaturze przedmiotu jest klasyfikowany jako arytmetyczny ruch Browna (porównaj [5] s. 166).

Całkując obustronnie uzyskujemy

$$\widetilde{S}_i(t) = X_i + \mu_i X_i t + \sigma_i X_i \widetilde{W}_i(t) = X_i(1 + \mu_i t + \sigma_i \widetilde{W}_i(t)). \tag{5.3}$$

Własności rozkładu normalnego pozwalają bezpośredni stwierdzić

$$E(\widetilde{S}_i(t)) = X_i(1 + \mu_i t). \tag{5.4}$$

Twierdzenie 5.1:

$$\mathrm{var}(\widetilde{S}_i(t)) = X_i^2 \sigma_i^2 t. \tag{5.5}$$

Dowód: Dzięki (5.4) i Lematowi 4.5 mamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\widetilde{S}_i(t)) &= E(\widetilde{S}_i^2(t)) - [E(\widetilde{S}_i(t))]^2 = \\
&= \int_0^t 2\mu_i X_i \cdot X_i(1 + \mu_i s) + X_i^2 \sigma_i^2 ds + X_i^2 - [X_i(1 + \mu_i t)]^2 = \\
&= 2\mu_i X_i^2 \int_0^t (1 + \mu_i s) ds + X_i^2 \sigma_1^2 t - 2X_i^2 \mu_i t - X_i^2 \mu_i^2 t^2 = \\
&= 2X_i^2 \mu_i t + X_i^2 \mu_i t^2 + X_i^2 \sigma_1^2 t - 2X_i^2 \mu_i t - X_i^2 \mu_i^2 t^2 = X_i \sigma_i^2 t.
\end{aligned}$$

Twierdzenie 5.2:

$$\mathrm{cov}(\widetilde{S}_1(t), \widetilde{S}_2(t)) = \rho\, X_1 X_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 t. \tag{5.6}$$

Dowód: Dzięki (5.4) i Lematowi 4.4 mamy

$$\operatorname{cov}(\widetilde{S}_1(t),\widetilde{S}_2(t)) = E(\widetilde{S}_1(t)\cdot\widetilde{S}_2(t)) - E(\widetilde{S}_1(t))\cdot E(\widetilde{S}_2(t)) =$$
$$= \int_0^t X_1\mu_1 X_2(1+\mu_2 s) + X_2\mu_2 X_1(1+\mu_1 s) + \rho\, X_1X_2\sigma_1\sigma_2 ds +$$
$$+ X_1X_2 - X_1X_2(1+\mu_1 t)(1+\mu_2 t) =$$
$$= X_1X_2[\int_0^t \mu_1+\mu_2+2\mu_1\mu_2 s+\rho\sigma_1\sigma_2 ds + 1-(1+\mu_1 t)(1+\mu_2 t)] =$$
$$= \rho X_1X_2\sigma_1\cdot\sigma_2 t.$$

Przejdźmy do ustalenia podstawowych własności portfela

$$\widetilde{\Pi}(t) = \widetilde{S}_1(t) + \widetilde{S}_2(t). \tag{5.7}$$

Twierdzenie 5.3: Proces losowy $\widetilde{\Pi}$ opisujący portfel zdefiniowany za pomocą tożsamości (5.7) jest arytmetycznym ruchem Browna wyznaczonym zależnościami (3.6) i $\widetilde{\Pi}(t) = C(1+(\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2)t + \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2+2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\cdot\sigma_2+(1-\alpha)^2\sigma_2^2}\widetilde{W}(t))$, (5.8)
gdzie $d\widetilde{W} \sim N(0,dt)$ i $\widetilde{W}(0)=0$.
Dowód: Dzięki Lematowi 4.2 z (5.3) i (5.7) otrzymujemy

$$\widetilde{\Pi}(t) = X_1 + X_2 + (X_1\mu_1 + X_2\mu_2)t + \sqrt{X_1^2\sigma_1^2+2\rho X_1X_2\sigma_1\sigma_2+X_2^2\sigma_2^2}\widetilde{W}(t) =$$
$$= C(1+(\alpha\,\mu_1+(1-\alpha)\mu_2)t + \sqrt{\alpha^2\sigma_1^2+2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2+(1-\alpha)^2\sigma_2^2}\widetilde{W}(t)).$$

Teraz już bezpośrednio z (5.8) otrzymujemy

$$E(\widetilde{\Pi}(t)) = c(1+(\alpha\,\mu_1+(1-\alpha)\mu_2)t), \tag{5.9}$$

$$\operatorname{var}(\widetilde{\Pi}(t)) = c^2(\alpha^2\sigma_1^2+2\rho\,\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2+(1-\alpha)^2\sigma_2^2). \tag{5.10}$$

Uderzająca w tym przypadku jest wierność, z jaką uzyskane powyżej wyniki powtarzają dobrze znane elementy statystycznej analizy portfelowej.

Bardzo korzystnym z formalnego punktu widzenia jest też fakt, że w przypadku składników będących arytmetycznymi ruchami Browna uzyskujemy portfel także będący arytmetycznym ruchem Browna o parametrach interpretowanych w ten sam sposób co parametry procesów opisujące składniki portfela.

Ta formalna i interpretacyjna zamkniętość operacji składania portfela pozwala na owocne rozwijanie teorii analizy portfelowej. Wymieniając zalety tego podej-

ścia, nie należy zapominać o przytaczanych przez wielu autorów (porównaj np. [5] s. 167) wadach stosowania arytmetycznego ruchu Browna. Dlatego należy uznać, że ostateczne rozstrzygnięcia o aplikacyjnej przydatności zaproponowanego powyżej podejścia do problemu dynamiczne modelu są uzależnione od wyników empirycznych aproksymacji.

6. Dynamiczny model portfela – pseudogeometryczny ruch Browna

W rozdziale tym założymy, że ewolucja wartości zgromadzonego instrumentu finansowego P_i przebiega w sposób opisany przez proces losowy $\widetilde{Y}_i$ scharakteryzowany przez różniczkę Itô

$$d\widetilde{Y}_i = \mu_i E(\widetilde{Y}_i(t))dt + \sigma_i E(\widetilde{Y}_i(t))d\widetilde{W}_i, \tag{6.1}$$

$$\widetilde{Y}_i(0) = X_i, \tag{6.2}$$

gdzie symbole X_i, μ_i, σ_1 przyjmują te same znaczenia co w części 5.

Antycypując wyniki zebrane w tej i następnej części, proces $\widetilde{Y}_i$ nazywać będziemy pseudogeometrycznym ruchem Browna.

Twierdzenie 6.1:

$$E(\widetilde{Y}_i(t)) = X_i \cdot \exp\{\mu_i t\}. \tag{6.3}$$

Dowód: Całkując obustronnie (6.1) otrzymujemy

$$\widetilde{Y}_i(t) - \widetilde{Y}_i(0) = \int_0^t \mu_i E(\widetilde{Y}_i(s))ds + \int_0^t \mu_i E(\widetilde{Y}_i(s))d\widetilde{W}_i(s),$$

co razem z twierdzeniem o wartości oczekiwanej całki stochastycznej daje

$$E(\widetilde{Y}_i(t)) - X_i = \mu_i \int_0^t E(\widetilde{Y}_i(s))ds.$$

Jedynym rozwiązaniem powyższego równania z niewiadomą $E(\widetilde{Y}_i(t))$ jest (6.3).

Twierdzenie 6.2: Proces $\widetilde{Y}_i(t)$ opisany różniczką Itô (6.1) ma trajektorię opisaną warunkiem początkowym (6.2) i tożsamością

$$\widetilde{Y}_i(t) = X_i \exp\{\mu_i t\} \cdot (1 + \sigma_i \widetilde{W}_i(t)) = E(\widetilde{Y}_i(t)) \cdot (1 + \sigma_i \widetilde{W}_i(t)). \tag{6.4}$$

Dowód: Zestawiając (6.1) z (6.3), otrzymujemy kolejną różniczkę Itô

$$d\mu_i = \mu_i X_i \exp\{\mu_i t\} dt + \sigma_i X_i \exp\{\mu_i t\} d\widetilde{W}_i . \tag{*}$$

Całkując obustronnie uzyskujemy

$$\widetilde{Y}_i(t) - X_i = X_i \exp\{\mu_i t\} - X_i + \sigma_i X_i \int_0^t \exp\{\mu_i s\} d\widetilde{W}_i(s).$$

Stosując do powyższej całki stochastycznej metodę całkowania przez części (porównaj [3] s. 122) oraz uwzględniając (4.4) stwierdzamy, że

$$\widetilde{Y}_i(t) = X_i \exp\{\mu_i t\}(1 + \sigma_i \cdot \widetilde{W}_i(t)) - X_i \sigma_i \mu_i \int_0^t \exp\{\mu_i s\} \widetilde{W}_i(s) ds . \tag{**}$$

Z drugiej strony rozważmy podstawienie

$$\widetilde{U}_i(t) = \widetilde{Y}_i(t) \exp\{-\mu_i t\}.$$

Podstawiając do (**) otrzymujemy

$$U_i(t) = X_i(1 + \sigma_i \widetilde{W}_i(t)) - X_i \sigma_i \mu_i \int_0^t \exp\{\mu_i (s-t)\} \cdot \widetilde{W}_i(s) ds . \tag{***}$$

Różniczka Itô procesu losowego $\widetilde{U}_i$ dana jest (porównaj [3] s. 182) zależnością

$$d\widetilde{U}_i = (-\mu_i \widetilde{U}_i(t) + X_i \mu_i) dt + X_i \sigma_i d\widetilde{W}_i .$$

Całkując obustronnie powyższą różniczkę, otrzymujemy

$$\widetilde{U}_i(t) - \widetilde{U}_i(0) = -\mu_i \int_0^t \widetilde{U}_i(s) ds + X_i \mu_i t + X_i \sigma_i \widetilde{W}_i(t)$$

$$\widetilde{U}_i(t) = X_i(1 + \sigma_i W_i(t)) + X_i \mu_i t - \mu_i \int_0^t \widetilde{Y}_i(s) \cdot \exp\{-\mu_i s\} ds \tag{****}$$

Porównując (***) i (****) stwierdzamy, że

$$-X_i \sigma_i \mu_i \int_0^t \exp\{\mu_i (s-t)\} \cdot \widetilde{W}_i(s) ds = X_i \mu_i t - \mu_i \int_0^t \widetilde{Y}_i(s) \exp\{-\mu_i s\} ds,$$

co prowadzi do

$$X_i \mu_i \int_0^t 1 + \sigma_i \exp\{\mu_i (s-t)\} \widetilde{W}_i(s) ds = \mu_i \int_0^t \widetilde{Y}_i(s) \exp\{-\mu_i s\} ds.$$

Dla $\mu_i \neq 0$ mamy wtedy

$$X_i(1+\sigma_i \exp\{\mu_i(t-t)\}\widetilde{W}_i(t)) = \widetilde{Y}_i(t)\cdot\exp\{-\mu_i t\},$$

co ostatecznie daje (6.4). W przypadku $\mu_i = 0$ zgodnie z (6.3) $E(\widetilde{Y}_i(t)) = X_i$, co powoduje, że proces losowy $\widetilde{Y}_i$ redukuje się do arytmetycznego ruchu Browna z zerową stopą dryfu. Dzięki (5.3) mamy wtedy

$$\widetilde{Y}_i(t) = X_i(1+\sigma_i\widetilde{W}_i(t)) = x_i \exp\{0\cdot t\}\cdot(1+\sigma_i\cdot\widetilde{W}_i(t)).$$

Ostatnia teza kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 6.3:

$$\operatorname{var}(\widetilde{Y}_i(t)) = \frac{X_i^2\cdot\sigma_i^2}{2\mu_i}(\exp\{2\mu_i t\}-1). \tag{6.5}$$

Dowód: Dzięki (6.3) i lematowi 4.5 mamy

$$\operatorname{var}(\widetilde{Y}_i(t)) = E(\widetilde{Y}_i(t)) - [E(\widetilde{Y}_i(t))]^2 =$$

$$= \int_0^t 2\mu_i X_i^2 \exp\{2\mu_i s\} + X_i^2\sigma_i^2 \exp\{2\mu_i s\}ds + X_i^2 - X_i^2\exp\{2\mu_i t\} =$$

$$= x_i^2\left(\frac{2\mu_i+\sigma_i^2}{2\mu_i}(\exp\{2\mu_i t\}-1)+1-\exp\{2\mu_i t\}\right) = \frac{X_i^2\sigma_i^2}{2\mu_i}(\exp\{2\mu_i t\}-1).$$

Twierdzenie 6.4:

$$\operatorname{cov}(\widetilde{Y}_1(t),\widetilde{Y}_2(t)) = \frac{X_1\cdot X_2\rho\sigma_1\sigma_2}{\mu_1+\mu_2}(\exp\{(\mu_1+\mu_2)t\}-1). \tag{6.6}$$

Dowód: Dzięki (6.3) i lematowi 4.4 uzyskujemy całkę oznaczoną Riemmana, którą całkując elementarnie uzyskujemy (6.6).

Przyjdźmy teraz do ustalenia podstawowych własności portfela

$$\widetilde{\Pi}(t) = \widetilde{Y}_1(t) + \widetilde{Y}_2(t). \tag{6.7}$$

Twierdzenie 6.5: Proces losowy $\widetilde{\Pi}$ opisujący portfel zdefiniowany za pomocą tożsamości (6.7) jest pseudogeometrycznym ruchem Browna wyznaczonym zależnościami (3.6) i

$$\tilde{\Pi}(t) = E(\tilde{\Pi}(t)) \cdot (1 + s(t) \cdot \tilde{W}(t)), \tag{6.8}$$

gdzie $d\tilde{W} \sim N(0, dt)$ i $\tilde{W}(0) = 0$ oraz

$$\mathrm{E}(\tilde{\Pi}(t)) = c(\alpha \exp\{\mu_1 t\} + (1-\alpha)\exp\{\mu_2 t\}), \tag{6.9}$$

$$s(t) = \sigma_2 \frac{\sqrt{\alpha^2 g^2(t) + 2\rho\alpha(1-\alpha)g(t) + (1-\alpha)^2}}{\alpha \frac{\sigma_2}{\sigma_1} g(t) + (1-\alpha)}, \tag{6.10}$$

$$g(t) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \exp\{(\mu_1 - \mu_2) \cdot t\}.$$

Dowód: Wszystkie powyższe zależności uzyskujemy z (6.3), (6.4), (6.7) oraz lematem 4.2, stosując elementarne przekształcenia algebraiczne.

Ostatnie twierdzenie informuje nas, że także w przypadku użycia pseudogeometrycznego ruchu Browna jako modelu składników portfela operacja składania portfela okazuje się – z formalnego punktu widzenia – operacją zamkniętą. Operacja składania portfela daje także i w tym przypadku model portfela o parametrach interpretowanych identycznie jak analogiczne parametry modeli składników. Nie są to jedyne zalety modelu pseudogeometrycznego ruchu Browna. Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że trajektoria wartości oczekiwanej pseudogeometrycznego ruchu Browna jest identyczna z trajektorią wartości oczekiwanej geometrycznego ruchu Browna (zobacz [5] s. 167). To właśnie spostrzeżenie stanowiło przesłankę do nazwania procesów $\tilde{Y}_i$ pseudogeometrycznymi ruchami Browna. Z aplikacyjnego punktu widzenia dostrzeżona identyczność wartości oczekiwanych powinna być istotną zaletą proponowanego modelu, gdyż wskazuje na istotne podobieństwo do modelu geometrycznego ruchu Browna powszechnie akceptowanego jako model ewolucji wartości instrumentów finansowych.

Fakt ten, jak wydaje się, zachęca do dalszych studiów formalnych i empirycznych modelu pseudogeometrycznego ruchu Browna .

7. *Dynamiczny model portfela – geometryczny ruch Browna*

W [1] rozważono użycie geometrycznego ruchu Browna $\tilde{Z}_i$ jako modelu ewolucji składników P_i portfela instrumentów finansowych. Wspomniany proces losowy jest opisany za pomocą różniczki Itô

$$d\tilde{Z}_i = \mu_i \tilde{Z}_i(t)dt + \sigma_i \tilde{Z}_i d\tilde{W}_i, \tag{7.1}$$

$$\tilde{Z}_i(0) = X_i, \tag{7.2}$$

gdzie interpretacja symboli μ_i, σ_i, X_i jest identyczna z ich interpretacją w części 5. Jak już wspomniano, mamy wtedy między innymi

$$E(\tilde{Z}_i(t)) = X_i \exp\{\mu_i t\}. \tag{7.3}$$

Wartość oczekiwana (7.3) jest identyczna z wartością oczekiwaną (6.3), podczas gdy trajektoria geometrycznego ruchu Browna

$$\tilde{Z}_i(t) = X_i \exp\left\{\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)t + \sigma_i \tilde{W}_i(t)\right\} \tag{7.4}$$

jest różna od trajektorii (6.4) pseudogeometrycznego ruchu Browna.

Geometryczny ruch Browna jest powszechnie akceptowany jako model zmian wartości pojedynczych instrumentów finansowych. W [1] podjęto próbę wyznaczenia trajektorii portfela

$$\tilde{\Pi}(t) = \tilde{Z}_1(t) + \tilde{Z}_2(t). \tag{7.5}$$

Różniczka Itô powyższego procesu jest dana zależnością

$$\begin{aligned} d\Pi = {} & [\mu_1 \tilde{Z}_1(t) + \mu_2 \tilde{Z}_2(t)]dt + [\sigma_1 a_{11} \tilde{Z}_1(t) + \sigma_2 a_{21} \tilde{Z}_2(t)]d\tilde{V}_1 + \\ & + [\sigma_1 a_{12} \tilde{Z}_1(t) + \sigma_2 a_{22} \tilde{Z}_2(t)]d\tilde{V}_2, \end{aligned} \tag{7.6}$$

gdzie para $(\tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$ jest dwuwymiarowym procesem Wienera opisanym wraz z parametrami a_{ij} w lemacie 4.1. Trajektorię portfela wyznaczono wprost z (7.5) i uzyskano

$$\tilde{\Pi}(t) = c\left[\alpha \exp\left\{\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 \tilde{W}_1(t)\right\} + (1-\alpha)\exp\left\{\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_2 \tilde{W}_2(t)\right\}\right]. \tag{7.7}$$

Wartość oczekiwana portfela

$$E(\tilde{\Pi}(t)) = c[\alpha \exp\{\mu_1 t\} + (1-\alpha)\exp\{\mu_2 t\}] \tag{7.8}$$

jest identyczna z wartością oczekiwaną (6.9).

W [1] zgromadzono więcej wyników formalnych opisujących ewolucję portfela (7.5). Przedstawiony powyżej wybór ogranicza się do zależności istotnych dla rozważań prowadzonych w tej pracy. Otóż pobieżna analiza zależności (7.7) i (7.8) pozwala stwierdzić, że proces losowy opisujący portfel (7.5) nie jest geometrycznym ruchem Browna. Fakt, że zbiór geometryczny ruchów Browna nie jest zamknięty ze względu na operację składania portfela, poważnie – jak wydaje się –

BIBLIOTEKA AE W Poznaniu

dyskredytuje przydatność tej klasy procesów losowych do modelowania ewolucji wartości składników portfeli instrumentów finansowych.

8. Zakończenie

Przeprowadzone rozważania wskazują na niedogodność stosowania geometrycznego ruchu Browna jako modelu składników portfela. Z drugiej strony stwierdzona pełna zgodność wartości oczekiwanych zarówno składników jak i całych portfeli wskazuje na pseudogeometryczny ruch Browna jako na narzędzie znajdujące swe zastosowanie w budowie dynamicznych modeli portfeli.

Za pseudogeometrycznym ruchem Browna przemawia też że klasa tych procesów losowych jest zamknięta ze względu na operację składania portfeli. Rodzi to postulat podjęcia dalszych studiów formalnych i badań empirycznych nad pseudogeometrycznymi ruchami Browna.

Interesujące mogą też być badania nad możliwościami modelowania dynamicznego portfela przy użyciu arytmetycznych ruchów Browna. Także i ta klasa procesów losowych jest zamknięta ze względu na operację składania portfeli. Kuszące są też tutaj wyraziste nawiązania do metod statystycznej analizy portfelowej oraz matematyki finansowej. Oznacza to, że i dynamiczne modelowanie portfeli przy użyciu arytmetycznych ruchów Browna ma wyraziste powiązania z teoriami dogłębnie zweryfikowanymi empirycznie.

Literatura

[1] Piasecki K., Kliber P., *O portfelu procesów losowych*, w: *Rynek kapitałowy – skuteczne inwestowanie*, red. W. Tarczyński, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2000.

[2] Rao C.R., *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.

[3] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa 1996.

[4] Tarczyński W., Zwolankowski M., *Inżynieria finansowa instrumenty, strategie, zarządzanie ryzykiem*, Agencja Wydawnictwa Placet, Warszawa 1999.

[5] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998.