Piotr DWORNICZAK
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

WYBRANE METODY PORÓWNYWANIA LICZB ROZMYTYCH

Wprowadzenie

W życiu codziennym, na różnego rodzaju urządzeniach, można coraz częściej spotkać napis *fuzzy logic* lub *fuzzy control*. Oznacza to, że dane związane z pracą tego urządzenia podane są lub przetwarzane w pewien szczególny sposób, przy wykorzystaniu teorii zbiorów rozmytych lub logiki rozmytej. Postacią tych danych mogą być liczby rozmyte, a operacją, którą należy wykonać – ich porównanie.

Porównywanie liczb rozmytych może być przydatne w zagadnieniach podejmowania decyzji w warunkach rozmytości w ujęciu zarówno statycznym, jak i dynamicznym (na przykład w wieloetapowym sterowaniu rozmytym, w którym stany wejścia-wyjścia mogą być wyrażone w postaci liczb rozmytych). Istotne jest wówczas porównanie ocen decyzji w celu optymalizacji. Może to przebiegać właśnie w ten sposób, że porównuje się wartości wyjścia dane w postaci liczb rozmytych. Standardową procedurą jest przy tym poddanie wartości rozmytych defuzzyfikacji i następnie porównanie otrzymanych liczb rzeczywistych. Często jednak gubi się w tym momencie pewne informacje, możliwe do odczytania z postaci rozmytej. Ponadto procedura defuzzyfikacyjna nie jest jednoznacznie określona, a zastosowanie różnych metod może prowadzić do różnych wniosków. Niestety jest to również cecha porównywania liczb rozmytych.

Najogólniej porównywanie liczb rozmytych sprowadza się do jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, czy liczba rozmyta A jest większa od liczby rozmytej B lub do podania pewnego stopnia $v \in [0, 1]$, w jakim liczba A jest większa od liczby B. Stopień ten jest interpretowany jako

stopień prawdziwości (w logice wielowartościowej) zdania „liczba rozmyta A jest większa od liczby rozmytej B", przy czym $v=1$ oznacza całkowitą prawdę, a $v=0$ całkowity fałsz powyższego zdania.

Porównywanie liczb rozmytych może być przeprowadzone w różny sposób. Podstawowe sposoby i komentarz do nich podane zostały poniżej.

Pierwszym problemem modelowania matematycznego jest sposób przedstawienia i rozumienia danych. W konkretnym zagadnieniu wiąże się to z określeniem pewnego uniwersum, którego elementami są dane. W najprostszym przypadku dane odzwierciedlają jedynie zwykłą jednoznaczną właściwość (atrybut), którą badany obiekt ma lub nie. Uniwersum może być utożsamiane wtedy ze zbiorem {TAK, NIE} lub {0, 1}.

Uniwersum może być również innym zbiorem skończonym. Obiektowi przypisany jest wówczas jeden element z tego zbioru. Mówi się wtedy o gradacji lub stopniowaniu własności.

Dalszym rozszerzeniem uniwersum może być zbiór nieskończony, taki jak zbiór liczb naturalnych, rzeczywistych, zbiór wektorów itp. Wtedy obiektowi przypisana jest tzw. obserwacja lub miara z tego zbioru.

Najogólniejszym sposobem określenia cechy obiektu jest „ocena eksperta" rozumiana jako dowolna wypowiedź w pewnym języku, odnosząca się do badanego obiektu. Uniwersum to w tym wypadku zbiór ocen, wypowiedzi, opinii, reguł, wniosków, konkluzji, które dotyczą badanego obiektu i jego jakiejkolwiek cechy. Przykładowo wypowiedziami takimi są: „spodziewana jest niska inflacja", „PKB powinien powoli rosnąć", „bezrobocie wynosi około 16%". Zdania te wyznaczają pewne zbiory rozmyte. Ostatnie zaś określa liczbę rozmytą. Uniwersum jest w tym przypadku rodziną zbiorów rozmytych.

1. Podstawowe oznaczenia i definicje

Zbiorem rozmytym Z określonym w pewnej przestrzeni $X \neq \emptyset$ nazywamy zbiór

$$Z=\{(x, \mu_Z(x)) : x \in X\},$$

gdzie $\mu_Z : X \to [0, 1]$ jest funkcją nazywaną funkcją przynależności zbioru rozmytego Z.

Szczególnym przypadkiem zbioru rozmytego jest liczba rozmyta A, definiowana jako zbiór rozmyty w R. Symbolicznie $A=\{(x, \mu_A(x)) : x \in R\}$.

Często zakłada się, że liczba rozmyta musi być zbiorem wypukłym i normalnym. Wypukłość oznacza tu, że

$$\forall x, y \in R,\ \forall \lambda \in [0, 1]:\ \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\},$$

natomiast normalność, że $\sup_{x \in R} \mu_A(x) = 1$. Założenia te obowiązują również w niniejszym artykule.

Nośnikiem (ang. *support*) liczby rozmytej A nazywamy zbiór liczb rzeczywistych określony jako $\text{supp}(A) = \{x \in R : \mu_A(x) > 0\}$.

Liczba rozmyta A nazywana jest dodatnią, gdy $\text{supp}(A) \subseteq R_+$.

Porównywanie parami lub porządkowanie ciągu liczb rozmytych jest zagadnieniem skomplikowanym. Można wyróżnić dwa ogólne sposoby podejścia do tego problemu. Pierwszy dopuszcza udział decydenta na różnych etapach procesu porównywania, a drugi takiego udziału nie bierze pod uwagę. Tu przedstawione zostanie tylko podejście drugie.

Czytelnikom zainteresowanym typem pierwszym polecamy prace Yagera i innych ([1], [8], [9], [12]). W porównywaniu liczb rozmytych bez udziału decydenta można wyróżnić dwie grupy rozwiązań. Jedna opiera się na stworzeniu pewnej funkcji przyporządkowującej liczbom rozmytym liczby rzeczywiste i ich porównaniu (uporządkowaniu). Druga natomiast polega na wyznaczeniu relacji większości bezpośrednio między liczbami rozmytymi. Wtedy dwóm liczbom rozmytym A i B przyporządkowuje się stopień (liczbę rzeczywistą $\nu \in [0, 1]$), w jakim liczba A jest uznana za większą od liczby B. Przyporządkowanie każdej parze liczb rozmytych liczby ν wyznacza pewną funkcję, nazywaną funkcją porównującą (ang. *comparison function*).

Poniżej przedstawiono wybrane metody porównywania liczb rozmytych.

2. Wybrane metody porównywania liczb rozmytych

2.1. Metoda Jaina

Metoda ta należy do grupy, pozwalającej uporządkować dodatnie liczby rozmyte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dzięki wprowadzeniu pewnej miary $\mu_c(A_i)$, przypisanej porównywanym liczbom. Aby ją wprowadzić, określamy najpierw rozmyty cel G, opisany zdaniem „liczba ma być możliwie największa". Zbiór G jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności

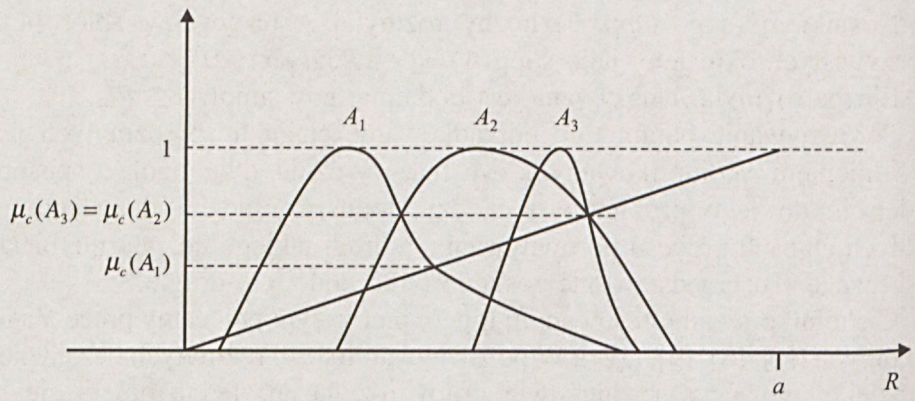
$$\mu_G(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^k, \quad \text{gdzie } x \in [0, a],\ k \in R_+, \text{ natomiast } a = \sup \bigcup_i \text{supp}(A_i).$$

Przy tych oznaczeniach Jain wprowadza stopień

$$\mu_c(A_i) = \sup_{x \in \text{supp}(A_i)} \min\{\mu_G(x), \mu_{A_i}(x)\},$$

który jest interpretowany jako miara zgodności liczby rozmytej A_i z celem rozmytym G. Porównanie i ustalenie rankingu polega na porównaniu wartości $\mu_c(A_i)$. Oczywiście $A_i \geqslant A_j \Leftrightarrow \mu_c(A_i) \geqslant \mu_c(A_j)$.

Porównanie metodą Jaina można zilustrować następująco:



Rys. 1. Porównanie liczb rozmytych metodą Jaina z parametrem $k = 1$

Jak wynika z określenia sposobu porównywania, metoda ta ma pewne wady. Nadaje się do porównywania liczb dodatnich o ograniczonych nośnikach, przy czym funkcja przynależności tych liczb musi być ciągła. Kolejną wadą jest to, że przy porównywaniu istotne są tylko wartości funkcji przynależności dla $x \in [x_0, \sup\{y: y \in \text{supp}(A)\}]$, gdzie x_0 jest punktem, dla którego $\mu_A(x_0) = 1$, natomiast zupełnie nieistotne są wartości funkcji przynależności dla $x \in [\inf\{y: y \in \text{supp}(A)\}, x_0]$. Na przykład stopnie $\mu_c(A_2)$ i $\mu_c(A_3)$ z rysunku 1 są równe, co prowadzi do wniosku, że liczby A_2 i A_3 są równe (lub równie „duże"), a to jest niezgodne z typowym określeniem równości zbiorów rozmytych i wątpliwe także intuicyjnie.

2.2. Metody Yagera

Metoda środka ciężkości. Jedna z kilku metod zaproponowanych przez Yagera nazywana bywa metodą środka ciężkości lub środka powierzchni. Autor podaje metodę tylko dla takiej liczby A, dla której $\text{supp}(A) \subseteq [0, 1]$. Określa on wartość rzeczywistą $F(A)$ formułą

$$F(A) = \frac{\int_0^1 g(x) \cdot \mu_A(x)\,dx}{\int_0^1 \mu_A(x)\,dx}.$$

Analogicznie przy ograniczonym nośniku stopień $F(A)$ może być określony formułą

$$F(A)=\frac{\int_a^b g(x)\cdot\mu_A(x)dx}{\int_a^b \mu_A(x)dx}, \tag{1}$$

gdzie $a=\inf\{y\colon y\in \mathrm{supp}(A)\}$, $b=\sup\{y\colon y\in \mathrm{supp}(A)\}$, a $g(x)$ jest pewną funkcją wagową. Gdy nośnik jest ograniczony, a funkcja przynależności ciągła, całki występujące we wzorze są zbieżne. W przeciwnym razie wartość $F(A)$ może nie istnieć.

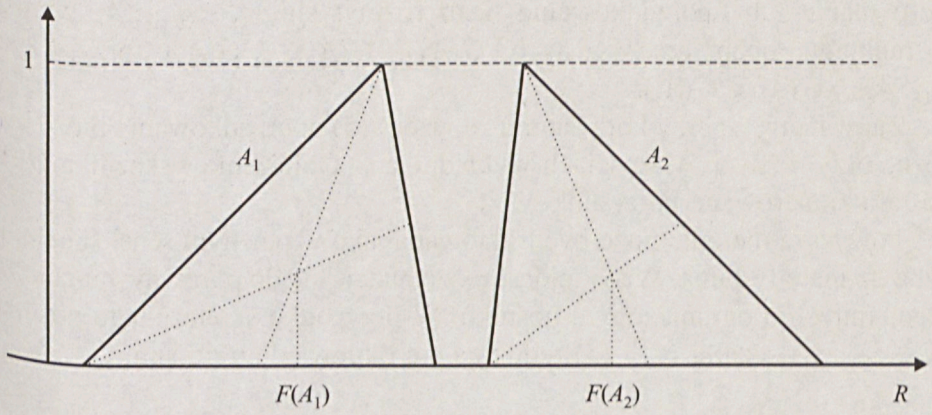
Najczęściej przyjmuje się funkcję wagową postaci $g(x)=x$. Wówczas

$$F(A)=\frac{\int_a^b x\cdot\mu_A(x)dx}{\int_a^b \mu_A(x)dx}. \tag{2}$$

Gdy nośnik jest zbiorem $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ wzór powyższy redukuje się do

$$F(A)=\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i\cdot\mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{k}\mu_A(x_i)}. \tag{3}$$

Porównywanie liczb rozmytych A_i i A_j sprowadza się do porównania wartości $F(A_i)$ i $F(A_j)$. Oczywiście $A_i\geqslant A_j\Leftrightarrow F(A_i)\geqslant F(A_j)$. Metodę tę można zobrazować na rysunku:



Rys. 2. Porównanie liczb rozmytych metodą środka ciężkości z funkcją wagową $g(x)=x$

Przedstawiona powyżej metoda pozwala na jednoznaczne stwierdzenie, w jakiej porządkowej relacji są ze sobą liczby rozmyte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Jednoznaczność ta bywa jednak w warunkach rozmytości krytykowana. Ponadto wadą tej metody jest to, że brana jest pod uwagę wyłącznie pierwsza współrzędna środka ciężkości. Zaletą jest możliwość porównywania dowolnych liczb (nie tylko liczb dodatnich).

Druga metoda Yagera polega na wyznaczeniu dla liczby rozmytej A, dla której $\text{supp}(A) \subseteq [0, 1]$, liczby rzeczywistej $G(A)$, określonej formułą

$$G(A) = \int_0^1 |x - \mu_A(x)|\, dx. \tag{4}$$

Liczba ta jest odległością Hamminga liczby rozmytej A od jej „prawdziwej wartości", przy czym „prawdziwa wartość" jest liczbą rozmytą P o funkcji przynależności $\mu_P(x) = x$.

Uważamy, że lepiej byłoby interpretować liczbę $G(A)$ jako odległość Hamminga od „dużej" ([14], s. 23) liczby rozmytej D określonej na nośniku $[0, 1]$ przez funkcję przynależności $\mu_D(x) = x^\alpha$, gdzie $\alpha > 0$ jest pewnym parametrem.

Dla ograniczonego nośnika $[0, a]$ funkcję przynależności można określić jako $\mu_D(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^\alpha$, $\alpha > 0$. Przy porównywaniu liczb rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n$, liczba $a = \sup\{x: x \in \text{supp}(A)\}$, natomiast wartością $G(A_i)$ jest

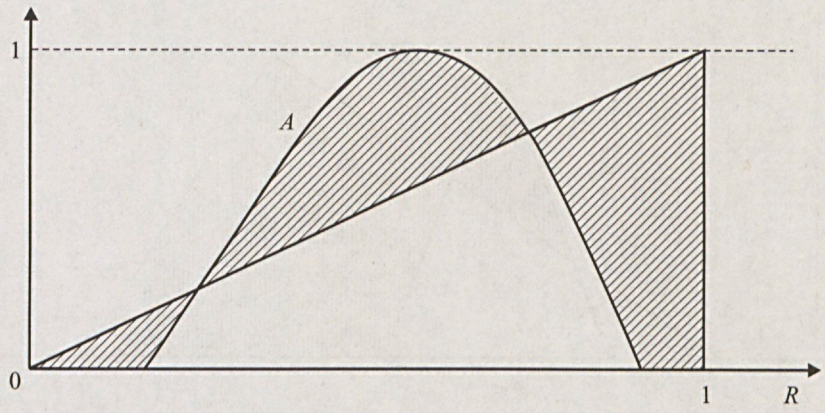
$$G(A_i) = \int_0^a |\mu_D(x) - \mu_{A_i}(x)|\, dx. \tag{5}$$

Porównanie lub uporządkowanie liczb rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wynika z rankingu liczb rzeczywistych $G(A_1), G(A_2), \ldots, G(A_n)$, przy czym $A_i \geqslant A_j \Leftrightarrow G(A_i) \leqslant G(A_j)$.

Zauważmy, że przy korzystaniu ze wzoru (5) uporządkowanie może być różne przy różnych wartościach wykładnika α. Obliczenie wskaźnika $G(A)$ zostało zilustrowane na rysunku 3.

Powyższa metoda może być traktowana jako w pewnym sensie analogiczna do metody Jaina. Wadą jej jest to, że nadaje się do porównywania liczb nieujemnych o ograniczonym nośniku. W przypadku skończonego nośnika $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ całki (4) i (5) redukują się odpowiednio do sum

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i - \mu_A(x_i)| \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{k} \left| \left(\frac{x_i}{a}\right)^\alpha - \mu_A(x_i) \right|.$$



Rys. 3. Porównanie liczb rozmytych metodą odległości Hamminga
Wskaźnik $G(A)$ jest miarą pola zakreskowanego obszaru

2.3. Metoda Kerre'a

Metoda ta podobna jest do zaprezentowanej drugiej metody Yagera z tym, że obliczana jest odległość $K(A)$ liczby rozmytej A od liczby „maksymalnej" z ciągu $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Maksymalną z dwóch liczb A i B jest liczba rozmyta M, określana standardowo za pomocą funkcji przynależności

$$\mu_M(x) = \sup_{x=\max(y,z)} \min\{\mu_A(y), \mu_B(z)\}.$$

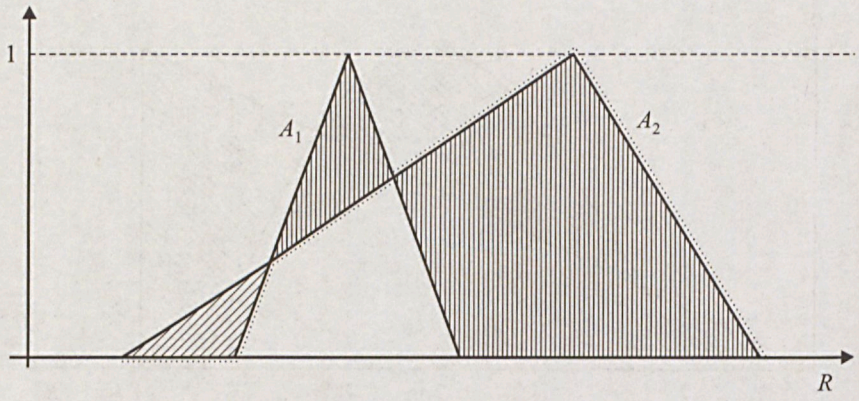
Liczbę maksymalną z ciągu liczb rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definiuje się indukcyjnie za pomocą funkcji przynależności

$$\mu_{M[A_1, A_2, \ldots, A_j]}(x) = \sup_{x=\max(y,z)} \min\{\mu_{A_j}(y), \mu_{M[A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}]}(z)\}.$$

Wskaźnik $K(A)$ ma zatem wartość

$$K(A) = \int_{\text{supp}(M)} |\mu_A(x) - \mu_M(x)|\, dx.$$

Oczywiście im mniejsza liczba $K(A)$, tym większa jest liczba rozmyta A. Identyczne uporządkowanie daje ranking oparty na odległościach $K'(A_i)$ liczb rozmytych A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, od minimalnej z tych liczb oznaczanej przez m. Wskaźnik $K'(A)$ określa się wzorem:



..... wykres funkcji $\mu_M(x)$, wartość wskaźnika $K(A_1)$, wartość wskaźnika $K(A_2)$

Rys. 4. Porównanie liczb rozmytych metodą Kerre'a

$$K'(A) = \int_{\text{supp}(m)} |\mu_A(x) - \mu_m(x)|\, dx,$$

gdzie $\mu_m(x)$ jest funkcją przynależności „minimalnej" z liczb rozmytych, określoną formułą

$$\mu_{m[A_1, A_2, \ldots, A_j]}(x) = \sup_{x = \min(y, z)} \min\{\mu_{A_j}(y),\ \mu_{m[A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}]}(z)\}.$$

Pamiętać przy tym należy, że liczba A_i jest tym większa, im większy jest wskaźnik $K'(A_i)$ (zob. rys. 4).

2.4. Metoda Watsona (Watsona, Weissa, McDonnella)

Na pytanie czy liczba rozmyta A_i jest większa (nie mniejsza) od liczby rozmytej A_j poprzednie metody dawały odpowiedź jednoznaczną. W warunkach rozmytości podejście to może wydać się niezadowalające, tym bardziej że powyższe metody nie są też pozbawione innych wad. Metoda Watsona i przedstawiona w punkcie 2.5 metoda Zadeha pozwalają podać stopień, będący liczbą rzeczywistą z przedziału [0, 1], w jakim jedna liczba rozmyta jest uznana za większą (nie mniejszą) od drugiej.

W przypadku metody Watsona porównywanie dwóch liczb rozmytych A_i i A_j opiera się na stwierdzeniu, jaką wartość w logice wielowartościowej ma implikacja:

$$(x_1 \text{ jest liczbą } A_i \text{ i } x_2 \text{ jest liczbą } A_j) \Rightarrow x_1 > x_2.$$

Poprzednikowi i następnikowi implikacji przypisane są wartości logiczne, wynikające z funkcji przynależności $\mu_{A_i}(x)$ i $\mu_{A_j}(x)$ oraz zastosowania odpowiedniego operatora koniunkcji i implikacji.

Watson przyjmuje klasyczną t-normę dla koniunkcji, co daje stopień poprzednika

$$\mu_p(x_1, x_2) = \min\{\mu_{A_i}(x_1), \mu_{A_j}(x_2)\}.$$

Stopień następnika to oczywiście

$$\mu_q(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x_1 > x_2, \\ 0, & \text{gdy} \quad x_1 \leqslant x_2. \end{cases}$$

Korzystając z implikacji Kleene'a-Dienesa, utożsamiamy wartość logiczną zdania $a \Rightarrow b$ z maksymalną wartością logiczną zdań $\neg a$ i b.

Ostatecznie stopień prawdziwości zdania „$A_i > A_j$" określony jest formułą

$$\begin{aligned} \tau(A_i > A_j) &= \sup_{x_1, x_2} \max\{1 - \mu_p(x_1, x_2), \mu_q(x_1, x_2)\} = \\ &= \sup_{x_1, x_2} \max\{1 - \min\{\mu_{A_i}(x_1), \mu_{A_j}(x_2)\}, \mu_q(x_1, x_2)\} = \\ &= 1 - \sup_{x_1 \leqslant x_2} \min\{\mu_{A_i}(x_1), \mu_{A_j}(x_2)\}. \end{aligned}$$

Reguła porównania liczb A_i i A_j jest następująca:

$$A_i \leqslant A_j \Leftrightarrow \tau(A_i > A_j) \leqslant \tau(A_j > A_i).$$

Jak widać, metoda ta pozwala porównywać ze sobą pary liczb. Na podstawie porównania parami można stworzyć uporządkowanie ciągu liczb rozmytych $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wyznaczając dla każdej pary (A_i, A_j) stopień $\tau(A_i > A_j)$, otrzymujemy tak naprawdę rozmytą relację większości T o funkcji przynależności $\mu_T(A_i, A_j) = \tau(A_i > A_j)$. Korzystając z zaostrzenia tej relacji, określonego jako $T^S = T \cap (T')^{-1}$, uzyskujemy stopnie niezdominowania liczb rozmytych A_i w relacji T. Przy klasycznych t-normie i negacji oraz określeniu funkcji przynależności relacji T' i $(T')^{-1}$ postaci

$$\mu_{T'}(x, y) = 1 - \mu_T(x, y) \qquad \text{oraz} \qquad \mu_{(T')^{-1}}(x, y) = \mu_{T'}(y, x)$$

stopnie niezdominowania określone są formułą

$$\mu_{T^S}^{nd}(A_i) = 1 - \sup_j \mu_{T^S}(A_j, A_i).$$

Ciąg stopni niezdominowania wyznacza ranking liczb, im większy stopień $\mu_{T^S}^{nd}(A_i)$, tym większa jest liczba rozmyta A_i.

Metoda Watsona może być krytykowana ze względu na złożoność obliczeniową. Obecnie nie jest to wada bardzo istotna. Ponadto wymagane jest tu wybranie postaci implikacji, co bywa trudne ze względu na mnogość rozwiązań tego zagadnienia ([6], s. 76).

2.5. Metoda Zadeha

Na podstawie zasady rozszerzania Zadeh wprowadził stopień v prawdziwości zdania „$A_i \geqslant A_j$" wyznaczony formułą

$$v(A_i \geqslant A_j) = \sup_{y \geqslant x} \min \{\mu_{A_i}(y),\ \mu_{A_j}(x)\}.$$

Zastosowanie powyższej reguły może być trudne obliczeniowo. Efektywne jest w przypadkach szczególnych typów liczb rozmytych, z których jeden typ to klasa liczb rozmytych o funkcji przynależności

$$\mu_A(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-m}{\alpha}\right)^2\right\}, \qquad \text{gdzie } \alpha \in R_+ \text{ i } m \in R \text{ są parametrami.}$$

Liczby te – nazywane często gaussowskimi – są szczególnym przypadkiem liczb klasy L-R. Są one szczególnie korzystne przy modelowaniu błędów przy zagadnieniach optymalizacyjnych ([10], s. 382).

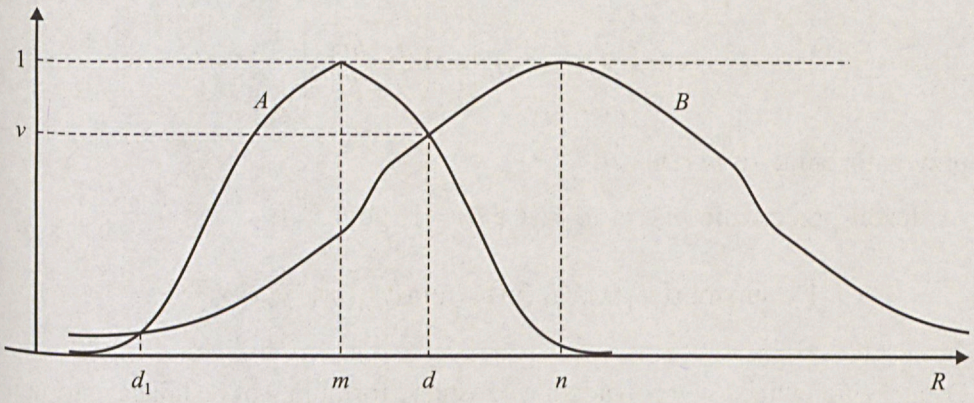
Zobaczmy, jak w łatwy sposób można porównywać tego typu liczby.

Niech A i B będą dwiema liczbami rozmytymi o funkcjach przynależności

$$\mu_A(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-m}{\alpha}\right)^2\right\} \qquad \text{oraz} \qquad \mu_B(x) = \exp\left\{-\left(\frac{x-n}{\beta}\right)^2\right\}.$$

Załóżmy, że $m < n$.

Można łatwo wykazać, że dwie różne liczby rozmyte – o funkcjach przynależności μ_A i μ_B jak powyżej – w przypadku gdy $\alpha = \beta$ mają dokładnie jeden punkt $d \in R$, w którym $\mu_A(d) = \mu_B(d)$, a gdy $\alpha \neq \beta$ dokładnie dwa różne punkty $d, d_1 \in R$, przy czym przyjmujemy, że $d_1 < d$. Ponadto dla dowolnych α i β punkt d należy do przedziału (m, n), a d_1 nie należy do (m, n).



Rys. 5. Porównanie gaussowskich liczb rozmytych

Korzystając ze ścisłej monotoniczności funkcji μ_A i μ_B w przedziałach $(-\infty, m)$, (m, ∞), $(-\infty, n)$, (n, ∞), otrzymujemy

$$v(A \geqslant B) = \mu_A(d) = \mu_B(d),$$

gdyż

$$\forall x, y \in (d, \infty): \mu_A(y) < \mu_A(d) \text{ i } \mu_B(x) > \mu_B(d) = \mu_A(d),$$

zatem

$$\min(\mu_A(y), \mu_B(x)) > \mu_A(d),$$

a stąd

$$\sup_{y \geqslant x} \min(\mu_A(y), \mu_B(x)) \leqslant \mu_A(d).$$

Analogiczne uzasadnienie można przedstawić dla $x, y \in (-\infty, d)$ oraz dla $x \in (-\infty, d)$ i $y \in (d, \infty)$.

Ponieważ punktem $d \in (m, n)$, w którym

$$\exp\left\{-\left(\frac{x-m}{\alpha}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\left(\frac{x-n}{\beta}\right)^2\right\}$$

jest

$$d = \frac{na + mb}{\alpha + \beta},$$

zatem

$$v(A \geqslant B) = \exp\left\{-\left(\frac{n-m}{\alpha+\beta}\right)^2\right\}$$

przy założeniu, że $m < n$.

Jeżeli przeciwnie $m \geqslant n$, to $v(A \geqslant B) = 1$, gdyż

$$1 \geqslant \sup_{x \geqslant y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \geqslant \min(\mu_A(m), \mu_B(n)) = 1.$$

Ostatecznie więc wyprowadzona została formuła, określająca stopień $v(A \geqslant B)$, w jakim liczba rozmyta A jest nie mniejsza od liczby rozmytej B

$$v(A \geqslant B) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{n-m}{\alpha+\beta}\right)^2\right\}, & \text{gdy } m < n, \\ 1, & \text{gdy } m \geqslant n. \end{cases}$$

Prześledźmy przedstawione powyżej rozumowanie dla liczb rozmytych o funkcjach przynależności charakteryzowanych przez pary (m, α) następująco:

$$A_1(2{,}3;\ 1{,}67), \quad A_2(2{,}7;\ 2{,}2), \quad A_3(3{,}8;\ 3{,}03), \quad A_4(3{,}75;\ 2{,}87).$$

Obliczamy stopnie v, które podajemy w macierzy T:

T	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	0,9894	0,9032	0,9030
A_2	1	1	0,9567	0,9580
A_3	1	1	1	1
A_4	1	1	0,9999	1

Zauważmy, że przedstawiona relacja podaje nam stopnie v, wyznaczone dla poszczególnych par liczb. Podobnie jak w przypadku metody Watsona uzyskujemy relację rozmytą i tak jak zaproponowano tam, możemy również tutaj określić stopnie niezdominowania poszczególnych liczb zgodnie z podanymi wcześniej formułami. W naszym przykładzie prowadzi to do zaostrzenia podanego w tabeli T^S.

T^S	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	0	0	0
A_2	0,0106	0	0	0
A_3	0,0968	0,0433	0	0,0001
A_4	0,0970	0,0420	0	0

Stopnie niezdominowania poszczególnych liczb rozmytych to

	A_1	A_2	A_3	A_4
μ_T^{nd}	0,9030	0,9567	1	0,9999

Ostatecznie na podstawie powyższych wartości otrzymujemy ranking liczb rozmytych

$$A_3 \geqslant A_4 \geqslant A_2 \geqslant A_1.$$

Zakończenie

Problem porównywania liczb rozmytych jest nadal otwarty w tym sensie, że nie ma żadnego podejścia zdecydowanie uznanego za dominujące. Jest tak zapewne dlatego, że każde z dotychczasowych rozwiązań charakteryzuje się pewnymi zaletami, ale i wadami. W związku z tym pojawiają się nowe propozycje, jak choćby parametryczne rodziny odległości liczb rozmytych przedstawione przez Grzegorzewskiego [3], albo wprowadzona przez Chenga [2] funkcja rankingowa, uzupełniająca metodę F Yagera. Oczywiście i te metody nie są wolne od usterek. Uważamy, że najbardziej obiecującym podejściem jest – zwłaszcza z punktu widzenia logiki rozmytej i teorii sterowania – rozwijanie metod F Yagera oraz Watsona i Zadeha przy różnym rozumieniu t-, s-norm i implikacji. Ponieważ jednak właściwe porównywanie liczb rozmytych jest nadal bardziej sztuką niż rzemiosłem uznaliśmy za celowe przedstawienie kilku koncepcji w tym artykule.

Literatura

[1] Buckley J. J., *Ranking Alternatives Using Fuzzy Numbers*, Fuzzy Sets and Systems 1985, no. 15.

[2]] Cheng Ch-H., *A New Approach for Ranking Fuzzy Numbers by Distance Method*, Fuzzy Sets and Systems 1998, no. 95.

[3] Grzegorzewski P., *Metrics and Orders in Space of Fuzzy Numbers*, Fuzzy Sets and Systems 1998, no. 97.
[4] Jain R., *Decision Making in the Presence of Fuzzy Variables*, IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. 1976, no. 6.
[5] Jain R., *A Procedure for Multiple Aspect Decision Making Using Fuzzy Sets*, Int. J. Syst. Sci. 1977, no. 8(1).
[6] Kacprzyk J., *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*, WNT, Warszawa 2001.
[7] Kerre E. E., *The Use of Fuzzy Sets Theory in Electrocardiological Diagnostics*, w: *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, red. M. M. Gupta, E. Sanchez, North-Holland, New York 1982.
[8] Mabuchi S., *An Approach to the Comparision of Fuzzy Subsets with an $\alpha-cut$ Dependent Index*, IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. vol. 18, 1988, no. 2.
[9] Nakamura K., *Preference Relations on a Set of Fuzzy Utilitiesas a Basis for Decision Making*, Fuzzy Sets and Systems 1986, no. 20.
[10] Piegat A., *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, AOW Exit, Warszawa 1999.
[11] Watson S. R., Weiss J. J., McDonnell M. L., *Fuzzy Decision Analysis*, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1979, no. 9.
[12] Yager R. R., *On Chosing Between Fuzzy Subsets*, Kybernetes 1980, no. 9.
[13] Yager R. R., *A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval*, Inf. Sci. 1981, no. 34.
[14] Zhu Q., Lee E.S.: *Comparison and Ranking of Fuzzy Numbers*, w: *Fuzzy Regresion Analysis*, red. J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, Omnitech Press Warszawa, Physica-Verlag, Heidelberg 1992.

SELECTED METHODS COMPARISON OF FUZZY NUMBERS

Summary

In this paper methods of comparison and ranking of fuzzy numbers introduced by Jain, Yager, Kerre, Watson and Zadeh are presented. At first, necessary basic definitions and concepts are given (there are various definitions of a fuzzy number). The quality, pros and cons of these approaches are discused. In the Watson and Zadeh method that enable comparison of a pair of fuzzy numbers, a rule has been given for defining a relation of order in a finite series of fuzzy numbers. The methods are ilustrated by simple examples. The comparison and ranking of fuzzy numbers is essential as far as decision-making in the fuzzy environment is concerned.