Dział III

EKONOMETRIA

XX-lecie Zakładu Ekonometrii zbiegło się z jubileuszowym sześćdziesiątym rokiem Akademii Ekonomicznej w Poznaniu. Dało to powód do zorganizowania konferencji, której motywem przewodnim były refleksja nad kierunkiem dalszego rozwoju dyscyplin którymi się ten Zakład zajmuje.

Zapoczątkowany wcześniej, a szczególnie ożywiony po II wojnie światowej ilościowy rozwój badań matematyczno-statystyczno-ekonomicznych natrafił w ostatnich latach na jakościową barierę. W sferze badań ekonometrycznych ciągle aktualne jest pytanie kiedy model ekonometryczny jest dostatecznie dobry by można się nim posługiwać do celów prognostycznych. W sferze badań operacyjnych, w związku z ogromną złożonością obliczeniową praktycznych zagadnień optymalizacyjnych powstaje problem jaki jest najlepszy kompromis pomiędzy złożonością obliczeniową algorytmów a dokładnością uzyskanych przy ich pomocy rozwiązań. Próbą odpowiedzi na te pytania poświęcona była konferencja, której obrady toczyły się w dwóch sekcjach. W pierwszej na temat:
„Jakości modeli ekonometrycznych" wygłoszono dziewięc referatów, a w drugiej zajmującej się „Modelami i algorytmami optymalizacji dyskretnej" wygłoszono ich czternaście. Sześć referatów drukujemy w tej części Zeszytu. Poza nimi przedstawiono i przedyskutowano na konferencji następujące referaty:

Doc. J.Błażewicz, „Złożoność obliczeniowa problemów szeregowania zadań z uwzględnieniem dodatkowych zasobów",

Doc. S.Chanas, „O pewnych problemach w dyskretnej optymalizacji rozmytej",

Mgr E.Danecka, „Zastosowanie metody Little'a dla zadania komiwojażera z ograniczeniami kolejnościowymi i liniami krytycznymi",

Doc. E.Ignasiak, „Optymalizacja harmonogramów przedsięwzięć inwestycyjnych",

Dr J.Kamburowski, „O pewnych nowych wynikach badań w planowaniu sieciowym",

Dr W.Ostasiewicz, „Modele podziału zasobów",

Dr T.Różański, „Wyznaczanie rozwiązań niezdominowanych na zbiorach dyskretnych",

Dr W.Sikora, „Zastosowanie metody generowania kolumn do wyznaczenia tras przejazdów",

Doc. R.Słowiński, „Modele wielokryterialnego rozdziału zasobów",

Dr B.Soniewicki, „Oszacowanie dokładności prostego algorytmu heurystycznego w sieciowym planowaniu przedsięwzięć",

Doc. M.Sysło, „O pewnym istotnym wykorzystaniu łukowych reprezentacji zbiorów uporządkowanych",

Doc. S.Wolukiewicz, „Zagadnienia załadunku i jego uogólnienia",

Mgr A.Welfe, „Modelowanie popytu konsumpcyjnego - problem zmiennych nieobserwowalnych",

Prof. W.Welfe, „Rola analiz symulacyjnych w doskonaleniu modeli systemów ekonomicznych",

Prof. J.Węglarz, „Algorytmy rozwiązywania problemów kombinatorycznych i ich efektywność".

Ryszard Antoniewicz

METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW DLA FUNKCJI UWIKŁANYCH

1. Wstęp. Śmiało można powiedzieć, że prawie 200 lat, które upłynęło od odkrycia metody najmniejszych kwadratów przez C.Gaussa (1794-95) [1] i niezależnie A.Legendre'a (1805-06)* jest jednym okresem jej wielkiego tryumfu na polu nauk przyrodniczych. Obecnie metoda ta jest szeroko wykorzystywana w wielu dziedzinach nauki. Bez wątpienia metoda najmniejszych kwadratów jest jedną z najprostszych metod racjonalnego wyboru z danej klasy funkcji, funkcji w pewnym sensie najbliższej do zbioru danych eksperymentalnych, opisujących badaną zależność funkcyjną. Jednak w przyrodzie, obok zależności typu funkcyjnego występują powszechnie zależności typu relacji, funkcji wieloznacznych, funkcji uwikłanych, zależności stochastyczne. Zastosowanie klasycznej metody najmniejszych kwadratów w tych przypadkach nastręcza duże trudności (na ten temat patrz [3], [4], [5]). W tym artykule podamy nowe sformułowanie metody najmniejszych kwadratów, które w znacznym stopniu obejmuje wymienione typy zależności.

2. Miara odchylenia wykresu równania od zbioru. Niech $f: D\subset R^n \to R$. Figura $F = \{x: f(x) = 0,\ x\in D\subset R^n\}$ jest wykresem równania $f(x) = 0$, $x\in D\subset R^n$. O równaniu $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, gdzie $(x_1,\ldots,x_n)\in D\subset R^n$ będziemy mówili, że określa zależność uwikłaną zmiennych $x_1,\ldots,x_n$. Niech $A\subset D\subset R^n$, symbolem $(A, \mathcal{A}_\sigma, u)$ oznaczymy przestrzeń mierzalną, gdzie $\mathcal{A}_\sigma$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru A, u jest miarą. Niech funkcja f obcięta do zbioru A będzie funkcją mierzalną. Liczbę

$$\Delta(F,A) = \int_A f^2(x)u(dx), \tag{1}$$

nazywamy odchyleniem figury F od zbioru A.

---

*Matematiczeskaja enciklopedia, Moskwa 1977.

Oczywiste są własności odchylenia Δ:

$\Delta 1$. $\Delta(F,A) > 0$ dla $F \neq A$,

$\Delta 2$. $\Delta(F,F) = 0$.

W szczególnym przypadku, gdy $A = \{a^1,\ldots,a^k\} \subset R^n$, tzn. gdy A jest skończonym zbiorem punktów przestrzeni R^n wzór (1) przyjmuje postać

$$(2) \qquad \Delta(F,A) = \sum_{i=1}^{k} f^2(a^i)\cdot w_i,$$

gdzie $w_i = u(\{a^i\})$, $i = 1,\ldots,k$.

3. Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów. Symbolem $\mathcal{F} = \{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ oznaczymy rodzinę figur będących wykresami równań $f_\gamma(x) = 0$, $x \in D_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ tzn. F_γ jest wykresem równania o indeksie $\gamma \in \Gamma$.
Niech $(A,\mathcal{A}_0,u)$ będzie przestrzenią mierzalną i $A \subset D_\gamma \subset R^n$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$. Zakładamy też, że dla każdego $\gamma \in \Gamma$ funkcja f_γ obcięta do zbioru A jest mierzalna. Liczba $\Delta(F_\gamma,A)$ jest odchyleniem figury F_γ od zbioru A.
Powiemy, że figura $F_\beta \in \mathcal{F}$ aproksymuje zbiór A w klasie $\mathcal{F}$ jeżeli

$$(1) \qquad \min_{F_\gamma \in \mathcal{F}} \Delta(F_\gamma,A) = \Delta(F_\beta,A).$$

W szczególnym przypadku, gdy zbiór A jest skończonym układem punktów przestrzeni R^n i spełniona jest równość (1) powiemy, że figura F_β aproksymuje (wygładza) w klasie $\mathcal{F}$ układ punktów $A = \{a^1,a^2,\ldots,a^k\}$ [7].

4. Stosunek do klasycznej metody najmniejszych kwadratów.

a. Nich $A = (a^i_j)_{\substack{i \leqslant k \\ j \leqslant n}}$ będzie skończonym układem punktów przestrzeni R^n i każdy punkt $a^i \in A$ niech ma wagę $w(a^i) = 1$. Niech funkcja h będzie zadana jawnie wzorem $x_n = h(x_1,\ldots,x_{n-1})$, przyjmując $f(x_1,\ldots,x_n) = x_n - h(x_1,\ldots,x_{n-1})$ mamy $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ i zgodnie z wzorem 1.2

$$\Delta(F,A) = \sum_{i=1}^{k} f^2(a^i_1,\ldots,a^i_n) = \sum_{i=1}^{k} \left(a^i_n - h(a^i_1,\ldots,a^i_{n-1})\right)^2,$$

gdzie F jest wykresem równania $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ a jednocześnie wykresem funkcji h. Jak widać, w tym przypadku uogólniona metoda najmniejszych pokrywa się z klasyczną [1], [2].

b. Jeżeli równanie $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ opisujące zależność uwikłaną daje się jednoznacznie rozwikłać w obszarze D względem zmiennej x_n to oczywiście $f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n)(x_n - h(x_1,\ldots,x_{n-1})$, gdzie $g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ $(x_1,\ldots,x_n) \in D$. Mamy wówczas

$$\Delta(F,A) = \sum_{i=1}^{k} f^2(a^i_1,\ldots,a^i_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(a^i_n - h(a^i_1,\ldots,a^i_{n-1})\right)^2 g^2(a^i_1,\ldots,a^i_n)w(a^i_1,\ldots,a^i_n)$$

gdzie F jest wykresem równania $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ i jednocześnie wykresem funkcji h a zbiór $A = (a^i_j)^{i\leqslant k}_{j\leqslant n}$ jest układem k punktów przestrzeni R^n i każdy punkt $a^i \in A$ ma wagę $w(a^i)$, $i = 1,\ldots,k$. Również w tym przypadku uogólniona metoda najmniejszych kwadratów pokrywa się z klasyczną metodą najmniejszych kwadratów z wagami $w^*(a^i) = g^2(a^i)w(a^i)$, $i = 1,\ldots,k$ [1], [2]. Należy zwrócić uwagę, że taki szczęśliwy przypadek, że równanie daje się jednoznacznie rozwikłać w całym obszarze D zdarza się rzadko. Najczęściej dla jednych wartości x równanie nie daje się rozwikłać, dla innych wartości x daje się rozwikłać ale jako funkcja wieloznaczna a nawet nieskończenie wieloznaczna.

c. Niech równanie $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, $(x_1,\ldots,x_n) \in D$ daje się rozwikłać w obszarze D względem zmiennej x_n jako r-znaczna funkcja, tj. $x_n = h_j(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $j = 1,2,\ldots,r$.
Mamy wówczas

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_1,\ldots,x_n)\prod_{j=1}^{r}\left(x_n - h_j(y_1,\ldots,y_{n-1})\right),$$

gdzie $g(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ dla $(x_1,\ldots,x_n) \in D$.
Stąd jeżeli $A = (a^i_j)^{i\leqslant k}_{j\leqslant n}$ jest układem k punktów w przestrzeni R^n z wagami $w(a^i)$, $i = 1,\ldots,k$ to zgodnie z wzorem 1.2 mamy

$$(F,A) = \sum_{i=1}^{k} f^2(a^i_1,\ldots,a^i_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} g^2(a^i_1,\ldots,a^i_n)\prod_{j=1}^{r}\left(a^i_n - h_j(a^i_1,\ldots,a^i_{n-1})\right)^2 w(a^i_1,\ldots,a^i_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{r}\left(a^i_n - h_j(a^i_1,\ldots,a^i_{n-1})\right)^2 w^*(a^i_1,\ldots,a^i_n).$$

5. Szczególna rola klasy figur algebraicznych. Wielomianem n-zmiennych stopnia m nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k_1+\ldots+k_n\leqslant m} \alpha_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, gdzie $k_i \in \{0,1,2,\ldots\}$ dla $i=1,2,\ldots,n$.
Figurę będącą wykresem równania $f(x_1,\ldots,x_n) = 0$, gdzie f jest wielomianem n-zmiennych stopnia m, nazywamy figurą algebraiczną stopnia m przestrzeni R^n [6]. Z następującego twierdzenia widać, że z punktu widzenia uogólnionej metody najmniejszych kwadratów figury algebraiczne odgrywają szczególną rolę.
Twierdzenie. Dla dowolnej figury $F = \{x: f(x) = 0,\ x \in D \subset R^n\}$ gdzie $f: D \subset R^n \to R$ jest funkcją ciągłą dla $x \in D$ a obszar D jest zbiorem zwartym, istnieje ciąg F_n figur algebraicznych, że

$$\Delta(F_n,F) \to 0.$$

Dowód. Ponieważ f jest funkcją ciągłą na zbiorze zwartym to na podstawie twierdzenia Weierstrassa [7] można tę funkcję jednostajnie aproksy-

mować na tym zbiorze ciągiem wielomianów w_n. Stąd i z twierdzenia o zamianie kolejności operacji całkowania i brania granicy dla ciągu funkcji zbieżnego jednostajnie mamy:

$$\lim \triangle(F_n,F) = \lim \int_F w_n^2 u(dx) = \int_F \lim w_n^2 u(dx) =$$

$$= \int_F f^2 u(dx) = \triangle(F,F) = 0.$$

6. Przykłady aproksymacji figurami algebraicznymi układu punktów na płaszczyźnie.

Będziemy szukać figury aproksymującej układ punktów $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$ na płaszczyźnie, w podzbiorach zbioru figur algebraicznych. Okaże się, że parametry figury aproksymującej wyrażają się wówczas przez momenty tego układu punktów.

Momentem rs-tym układu punktów $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$ na płaszczyźnie, nazywamy liczbę

$$m_{rs} = \sum_{i=1}^{k} x_i^r y_i^s, \qquad r,s = 0,1,2,\ldots$$

Stwierdzenie 1. W rodzinie wszystkich stożkowych, których równanie ma postać $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey - 1 = 0$, gdzie parametry A,B,C,D,E są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, jedynie stożkowa, której parametry spełniają równanie

$$\begin{pmatrix} m_{40} & m_{22} & m_{31} & m_{30} & m_{21} \\ m_{22} & m_{40} & m_{12} & m_{12} & m_{03} \\ m_{31} & m_{13} & m_{22} & m_{21} & m_{12} \\ m_{30} & m_{12} & m_{21} & m_{20} & m_{11} \\ m_{21} & m_{03} & m_{12} & m_{11} & m_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{20} \\ m_{02} \\ m_{11} \\ m_{10} \\ m_{01} \end{pmatrix}$$

aproksymuje układ punktów $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Stwierdzenie 2. W rodzinie wszystkich okręgów na płaszczyźnie jedynie okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$,

gdzie $a = \frac{1}{2} \frac{RC - BS}{AC - B^2}$,

$b = \frac{1}{2} \frac{AS - BR}{AC - B^2}$,

$c = \frac{1}{k} \left(2am_{10} + 2bm_{01} - (m_{20} + m_{02}) \right)$,

$A = m_{20}k - m_{10}^2$,

$B = m_{11}k - m_{01}m_{10}$,

$$C = m_{02}k - m_{01}^2,$$

$$R = k(m_{30} + m_{12}) - (m_{20} + m_{02})m_{10},$$

$$S = k(m_{21} + m_{03}) - (m_{20} + m_{02})m_{01}$$

aproksymuje układ punktów $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$.

Stwierdzenie 3. W rodzinie figur o równaniu $(y - Ax - B)(y - Cx - D) = 0$, gdzie A,B,C,D są dwolnymi liczbami rzeczywistymi (dwie proste), figura, której parametry spełniają układ równań

$$\begin{aligned} &AC^2m_{40} + AD^2m_{20} + C^2Bm_{30} + BD^2m_{10} + 2CBDm_{20} + 2ADCm_{30} - \\ &- C^2m_{31} - D^2m_{11} - 2ACm_{31} - 2BCm_{21} - 2DCm_{21} - 2BDm_{11} - 2ADm_{21} + \\ &+ Am_{22} + 2Cm_{22} + 2Dm_{12} + Bm_{12} - m_{13} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &BC^2m_{20} + BD^2 + AC^2m_{30} + AD^2m_{10} + 2ACDm_{20} + 2BCDm_{10} - \\ &- 2ADm_{11} - 2BCm_{11} - 2CDm_{11} - 2BDm_{01} - D^2m_{01} - C^2m_{21} - 2ACm_{21} + \\ &+ Bm_{02} + 2Dm_{02} + 2Cm_{12} + Am_{12} - m_{03} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A^2Cm_{40} + CB^2m_{20} + A^2Dm_{30} + B^2Dm_{10} + 2ABDm_{20} + 2ABCm_{30} - \\ &- 2ACm_{31} - 2ABm_{21} - 2ADm_{21} - B^2m_{11} - 2BDm_{11} - A^2m_{31} - 2BCm_{21} + \\ &+ 2Am_{22} + Cm_{22} + 2Bm_{12} + Dm_{13} - m_{13} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A^2Dm_{20} + B^2D + A^2Cm_{30} + CB^2m_{10} + 2CBAm_{20} + 2ABDm_{10} - \\ &- 2ACm_{21} - 2ABm_{11} - 2ADm_{11} - 2BCm_{11} - 2BDm_{01} - A^2m_{21} - B^2m_{01} + \\ &+ 2Am_{12} + 2Bm_{02} + Dm_{02} + Cm_{12} - m_{03} = 0, \end{aligned}$$

aproksymuje układ punktów $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$.

Stwierdzenie 4. Owal o równaniu $(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4$,

gdzie $c = \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{k(m_{42}-m_{24})+k(m_{60}-m_{06})-(m_{40}+m_{04}+2m_{22})(m_{20}-m_{02})}{k(m_{40}+m_{04}-2m_{22})-(m_{20}-m_{02})^2}}$,

$$ka^4 = kc^2 - 2c(m_{20}-m_{02})+m_{40}+m_{04}+2m_{22}$$

aproksymuje układ punktów $\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix}$ w rodzinie wszystkich owali Cassiniego [6].

7. Przykłady zastosowania uogólnionej metody najmniejszych kwadratów.

a. Wygładzenie empirycznych danych liczbowych. W pracach [3], [4], [5] podano wiele przykładów danych empirycznych, do których nie można dopasować żadnej rozsądnej funkcji. Oznacza to, że badane zmienne nie są związane zależnością typu funkcyjnego lecz zachodzi między nimi związek typu funkcji wieloznacznej lub uwikłanej. W każdym z tych przypadków uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów można znaleźć figurę wygładzającą dane empiryczne.

b. Wyznaczanie widma i śladu rozkładu. Zdefiniowane przez Hellwiga [3], [4], [5] niezwykle pożyteczne charakterystyki rozkładu - widmo i ślad, nie łatwo jest wyznaczyć na podstawie danych empirycznych. Metoda Hellwiga wyznaczania śladu oparta jest na pojęciu zmiennej losowej dystansowej [5]. Spróbujemy do wyznaczania tych charakterystyk wykorzystać uogólnioną metodę najmniejszych kwadratów. Niech układ punktów A_0 przedstawia dane empiryczne, ustalamy rodzinę figur $\mathcal{F}$, które posłużą do aproksymacji. Przyjmujemy, że oszacowaniem śladu rozkładu jest figura $F_0 \in \mathcal{F}$ aproksymująca zbiór A_0. Następnie wykreślamy ze zbioru A_0 punkty leżące na zewnątrz figury F_0, otrzymujemy zbiór A_1. Znajdujemy figurę $F_1 \in \mathcal{F}$ aproksymującą zbiór A_1, itd. Ciąg figur $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_r$ nazywamy widmem układu punktów. Za oszacowanie widma rozkładu przyjmujemy widmo układu punktów.

c. Dyskreminacja zbioru. Ograniczymy się do przykładu płaskiego. Równanie $\sum_{k_1+k_2 \leq m} \alpha_{k_1 k_2} x^{k_1} y^{k_2} = 0$, gdzie k_1, k_2 są nieujemnymi liczbami całkowitymi dla m=2 przedstawia kwadryki (krzywe stożkowe) dla m=3 kubiki, a w przypadku m=4,6,8,... owale [6]. Udowodniono, że figura stopnia m=4, 6,8,... rozpada się na $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)+1$ owali (1876, Harnak). W przypadku m=4 i m=6 wzajemne położenie tych owali zostało dokładnie zbadane (Gudkow, 1970). W ogólnym przypadku zadanie to nie jest jeszcze rozwiązane (16 problem Hilberta, 1900).

Dobrze znane są tzw. owale Cassiniego (1625-1712), których równanie ma postać [6]

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4.$$

Równanie to przedstawia [6]:

1) okrąg, jeżeli $c = 0$,

2) wypukły owal, jeżeli $0 < c \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$,

3) wklęsły owal (z talią), jeżeli $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$,

4) lemniskatę Bernoulliego, jeżeli $c = a$,

5) dwa owale, jeżeli $c > a$.

Niech A będzie dowolnym zbiorem punktów na płaszczyźnie. Przypuśćmy, że naszym zadaniem jest rozbicie tego zbioru na co najwyżej dwa podzbiory. W tym celu, uogólnioną metodą najmniejszych kwadratów aproksymujemy zbiór A owalem Cassiniego. Jeżeli teraz dla tego owalu $c > a$ to zbiór A rozpada się na dwie części, jeżeli $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$ powiemy, że pojawiła się tenden-

cja do rozpadu zbioru A na dwie części, jeżeli $0 < c < \frac{a}{\sqrt{2}}$ to zbiór składa się z jednej części.

Ten dwuwymiarowy przykład naturalnie uogólnia się na przypadek dyskryminacji na więcej niż dwa podzbiory leżące w wielowymiarowej przestrzeni.

d. Rozpoznawanie obrazów. Uogólnioną metodę najmniejszych kwadratów można zastosować do rozpoznawania tylko takich figur lub ich kształtu, które dane są równaniem. Od czasów Kartezjusza (1637) wiadomo, że każde równanie przedstawia pewną figurę. Zadanie odwrotne, gdzie dana jest figura i trzeba znaleźć jej analityczne równanie zostało rozwiązane nie tak dawno przez ukraińskiego matematyka Rwaczowa (1967) [8]. Niech w przestrzeni R^n będzie dana rodzina figur, oznaczmy tę rodzinę symbolem $\mathcal{F} = \{F_\delta\}_{\delta \in \Gamma}$. Zakładamy, że każdą z tych figur potrafimy opisać analitycznym równaniem. Niech A będzie układem punktów jednej z tych figur, ale obarczonych błędem losowym. Aby rozpoznać, do której figury należą te punkty, dla każdej figury $F_\delta \in \mathcal{F}$ obliczamy wartość odchylenia $\Delta(F_\delta, A)$. Przyjmujemy, że układ punktów A należy do figury, która najmniej odchyla się od niego.

Tak ze względów praktycznych, jak i teoretycznych ważniejsze jest zadanie rozpoznawania kształtu figury. Zanim to zadanie sformułujemy, wpierw określimy co tutaj rozumiemy przez kształt figury. W tym celu zakładamy, że w zbiorze $\mathcal{F}$ określona jest dowolna relacja równoważności, którą będziemy nazywać relacją podobieństwa figur. Relacja ta rozbija zbiór wszystkich figur na klasy figur podobnych. Kształtem figury F będziemy nazywali klasę figur do niej podobnych. Ważnym praktycznie przykładem relacji podobieństwa figur jest relacja generowana przez grupę przekształceń. Niech G będzie dowolną grupą przekształceń $g: R^n \to R^n$. Mówimy, że figura F_1 jest podobna do figury F_2 jeżeli istnieje takie przekształcenie g, że $g(F_1) = F_2$. Oczywiście tak określona relacja podobieństwa jest relacją równoważności. Jeżeli relację podobieństwa figur oznaczymy symbolem $\sim$ a symbolem $k(F_\delta)$ oznaczymy kształt figury F_δ to mamy

$$k(F_\delta) = \{ F: F \in \mathcal{F} \text{ i } F \sim F_\delta \}.$$

Jeżeli kształt jest określony przez grupę G przekształceń to

$$k(F_\delta) = \{ F: F = g(F_\delta),\ g \in G \}.$$

Oczywiście $\mathcal{F} = \bigcup_{\delta \in \Gamma} k(F_\delta)$, gdzie składniki tej sumy są rozłączne. Niech A będzie układem punktów nieznanej figury $F \in \mathcal{F}$, obciążonych błędami przypadkowymi. Aby znaleźć kształt tej figury w każdej z komponent $k(F_\delta)$, na które rozbiliśmy zbiór $\mathcal{F}$ znajdujemy figurę $F(k(F_\delta), A)$, która najmniej odcyhla się od zbioru A i obliczamy wartości odchylenia tej figury od zbioru A. Przyjmujemy, że układ punktów A reprezentuje ten kształt, dla którego odchylenie jest najmniejsze.

Literatura

[1] Linnik J.W.: Metod najmienszych kwadratow i asnowy teorii abrabotki nabliudenij. Moskwa 1962.
[2] Mazmiszwili A.J.: Spasob najmienszych kwadratow. Moskwa 1968.
[3] Hellwig Z.: Regresja liniowa i jej zastosowanie w ekonomii. Warszawa 1960.
[4] Hellwig Z.: Przyczynek do teorii regresji. Zeszyty Naukowe WSE. Wrocław 1961.
[5] Hellwig Z.: Aproksymacja stochastyczna. Warszawa 1965.
[6] Stark M.: Geometria analityczna. Warszawa 1970.
[7] Smoluk A.: Podstawy teorii aproksymacji i s-funkcje. Warszawa 1974.
[8] Rwaczew W.L.: Geometriczeskije priłożenija algebry logiki. Kijów 1967.