Alicja GOŁĘBIEWSKA
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

INWESTOWANIE W ŚRODOWISKU α-STABILNYCH STÓP ZWROTU

Wprowadzenie

Wykorzystywanie założenia, że zmienna losowa opisująca na przykład rozkład stóp zwrotu ma rozkład normalny, jest w wielu sytuacjach kwestią wygody. Istnieje bowiem bogata literatura oraz dobrze rozwinięty aparat matematyczny poświęcone modelom, które oparte są na tym założeniu. Tymczasem prace takich badaczy jak: E. F. Fama (1965), M. Richardson i T. Smith (1993), S. Mittnik, S. Rachev i M. Paollela (1997) wskazują, że grubość ogona rozkładu empirycznego stóp zwrotu często różni się od grubości ogona rozkładu gaussowskiego. Również na rynku polskim występuje zjawisko grubych ogonów, co potwierdzają badania przedstawione w [3]. Rozwiązaniem w tej sytuacji mogą okazać się rozkłady α-stabilne.

Na to, żeby zmienna losowa X miała rozkład α-stabilny, potrzeba i wystarcza, żeby logarytm jej funkcji charakterystycznej można było przedstawić w poniższej postaci [5], [6]:

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t - c^{\alpha}|t|^{\alpha}\left[1 + i\lambda \frac{t}{|t|}\omega(t,\alpha)\right], \tag{1}$$

gdzie

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha & \text{dla} \quad \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{dla} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

$\gamma \in \Re$ jest parametrem przesunięcia, $\lambda \in [-1, 1]$ jest parametrem skośności, $c > 0$ jest parametrem skali. Parametr α nazywany jest wykładnikiem charakterys-

tycznym rozkładu α-stabilnego lub indeksem stabilności. Jeżeli $\alpha=2$, to zmienna losowa X ma rozkład normalny. Natomiast dla $\alpha \in (0,2)$ otrzymujemy rozkłady o ogonach grubszych niż gaussowskie.

W przedstawionym artykule wykorzystano modele oparte na rozkładach α-stabilnych do analizy portfela oraz do analizy ryzyka. Pojawia się w niej próba odpowiedzi na pytanie, czy zastosowanie hipotezy α-stabilnej implikuje lepsze wyniki od modelu gaussowskiego.

1. Analiza ryzyka – Value at Risk

VaR (*Value at Risk*) jest miarą zagrożenia, określającą prawdopodobieństwo straty z inwestycji. Do wyznaczenia tej oceny wykorzystujemy jednorodny szereg czasowy stóp zwrotu $\{R_t\}_{t=1}^{n}$.

Przy założeniu że stopy zwrotu mają rozkład $N(0,\sigma)$ VaR możemy wyznaczyć, wykorzystując estymator zaproponowany w [4]:

$$\mathrm{VaR}_p^{(2)} = z_p^{(2)} \hat{\sigma}, \tag{2}$$

gdzie:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(R_t - \bar{R})^2}, \tag{3}$$

$\bar{R}$ – średnia stopa zwrotu,
$z_p^{(2)}$ – kwantyl standaryzowanego rozkładu normalnego.

Przy założeniu że stopy zwrotu mają rozkład α-stabilny, VaR możemy wyznaczyć, wykorzystując poniższy estymator [4]:

$$\mathrm{VaR}_p^{(\alpha)} = z_p^{(\alpha)} \sqrt{2}\hat{\delta}, \tag{4}$$

gdzie:

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{R}_{75} - \hat{R}_{25}}{\varphi(\alpha)} \tag{5}$$

i $\varphi(\alpha)$ jest wartością ustalonej funkcji [4]. Użyta we wzorze (5) wartość

$$\hat{R}_p = \frac{R_{(i)} + R_{(j)}}{2} \tag{6}$$

jest $100p$-procentowym $(0<p<1)$ percentylem rozkładu stóp zwrotu. Indeksy:

$$(i)=\lfloor p(n+1)\rfloor, \tag{7}$$

$$(j)=\lceil p(n+1)\rceil \tag{8}$$

wyznaczamy, wykorzystując funkcje $\lfloor x\rfloor$ (podłoga) i $\lceil x\rceil$ (sufit) zdefiniowane dla dowolnego $x\in R$ w następujący sposób:

$\lfloor x\rfloor$ – największa liczba całkowita $\leqslant x$,

$\lceil x\rceil$ – najmniejsza liczba całkowita $\geqslant x$.

Dla $p=0{,}99$ wartości $z_{.99}^{(\alpha)}$ oraz wartości funkcji $\varphi(\alpha)$ wyznaczył McCulloch (1986). W tabeli 1 zaprezentowano $z_{.99}^{(\alpha)}$ oraz $\varphi(\alpha)$ dla wybranych α:

Tabela 1. Wartości $z_{.99}^{(\alpha)}$ oraz wartości funkcji $\varphi(\alpha)$

α	$z_{.99}^{(\alpha)}$	$\varphi(\alpha)$
2	2,33	1,908
1,9	2,59	1,914
1,8	3,02	1,921
1,7	3,64	1,927
1,6	4,44	1,933
1,5	5,47	1,939
1,4	6,83	1,946
1,3	8,71	1,955
1,2	11,43	1,965
1,1	15,61	1,908

Źródło: S. Huschens, J.R. Kim [4].

2. Analiza ryzyka – wyniki badań empirycznych

Analizę ryzyka przeprowadzono dla akcji wszystkich spółek notowanych na GPW w ciągu lat 1995-2002 oraz dla indeksu giełdowego WIG. Wartości VaR przy założeniu normalności oraz α-stabilności tygodniowych stóp zwrotu zaprezentowano w tabeli 2. Skupiono tutaj swoją uwagę na tygodniowych stopach zwrotu, traktując ten wybór jako wybór pilotażowy, poprzedzający badania szerszego spektrum czasowego stóp zwrotu.

Tabela 2. VaR dla tygodniowych stóp zwrotu z okresem obserwacji 1995-2002

Spółki i indeksy giełdowe	$VaR^{(2)}_{.99}$	Oszacowana grubość ogona rozkładu	$VaR^{(\alpha)}_{.99}$
Amerbank	0,16	1,3	0,39
BIG BG	0,19	1,5	0,32
BRE	0,15	1,77	0,17
Dębica	0,11	1,43	0,31
Elektrim	0,24	1,58	0,31
Irena	0,16	1,66	0,18
Jelfa	0,17	1,36	0,31
Kable	0,18	1,65	0,23
Kredyt Bank	0,14	1,48	0,23
Krosno	0,15	1,43	0,32
Mostostal Export	0,17	1,55	0,29
Mostostal Zabrze	0,18	1,65	0,27
Okocim	0,14	1,67	0,19
Optimus	0,22	1,42	0,42
Polifarb C – W	0,17	1,62	0,22
Prochem	0,15	1,57	0,20
Rolimpex	0,18	1,58	0,25
Sokołów	0,16	1,49	0,26
Stalexport	0,21	1,41	0,41
Swarzędz	0,17	1,64	0,25
Vistula	0,14	1,66	0,20
Wólczanka	0,14	1,45	0,27
Żywiec	0,13	1,41	0,24
WIG	0,10	1,66	0,12

Przy wyznaczaniu tygodniowej stopy zwrotu zastosowano formułę: piątek – piątek. Wykorzystano poniższy wzór [7]:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{9}$$

gdzie:

P_t – cena akcji osiągnięta w okresie t,

P_{t-1} – cena akcji osiągnięta w okresie $t-1$.

W ten sposób uzyskano dla każdego z badanych instrumentów finansowych szereg czasowy kolejnych rzeczywistych tygodniowych stóp zwrotu. Oszacowana grubość ogona dla rozkładu tygodniowych stóp zwrotu została zaczerpnięta z wcześniejszej pracy [3].

Wyznaczona wartość parametru α dla rozkładu tygodniowych stóp zwrotu jest mniejsza od 2 i większa od 1 dla wszystkich objętych analizą spółek oraz dla indeksu giełdowego WIG. Wartości estymatora wskazują na dużo grubsze ogony od rozkładu gaussowskiego. Występowanie grubych ogonów powoduje, że pojawiają się różnice pomiędzy $\mathrm{VaR}_{.99}^{(2)}$ i $\mathrm{VaR}_{.99}^{(\alpha)}$. Co więcej, we wszystkich przypadkach ryzyko wyznaczone przy założeniu α-stabilności stóp zwrotu przewyższa ryzyko obliczone przy założeniu, że stopy zwrotu mają rozkład normalny. Najmniejszą rozpiętość uzyskano dla spółki Irena (12,5%), a największą dla Amerbanku (143,75%).

3. Analiza portfela

Instrumentem powszechnie stosowanym w zarządzaniu portfelem jest model CAPM. Został on wprowadzony przez Sharpa (1964) i Linntnera (1965). Model ten zakłada, że rozkłady stóp zwrotu aproksymowane są rozkładem normalnym, co w wielu wypadkach nie potwierdza się. Idea uogólnienia gaussowskiej wersji modelu CAPM wersją α-stabilną została rozwinięta przez Gamrowskiego i Racheva (1994). Dowiedli oni, że α-stabilny model CAPM można zapisać w postaci:

$$E(r_i)-r_f=\beta^{(\alpha)}(E(r_m)-r_f), \tag{10}$$

gdzie r_f i r_m są odpowiednio stopą zwrotu portfela pozbawionego ryzyka i stopą zwrotu portfela rynkowego. Natomiast estymator parametru $\beta^{(\alpha)}$ wyznaczamy ze wzoru [6]:

$$\hat{\beta}^{(\alpha)}=\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{it}-\bar{R}_i)|R_{mt}-\bar{R}_m|^{\frac{1}{\alpha-1}}\operatorname{sign}(R_{mt}-\bar{R}_m)}{\sum_{t=1}^{n}|R_{mt}-\bar{R}_m|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}. \tag{11}$$

W powyższym wzorze R_{it} jest stopą zwrotu na akcję i w chwili t, R_{mt} oznacza stopę zwrotu na portfel rynkowy m w chwili t. Natomiast $\bar{R}_i$, $\bar{R}_m$ to średnie stopy zwrotu, odpowiednio z akcji i rynku.

Dla stóp zwrotu o rozkładzie normalnym współczynnik β estymujemy na podstawie wzoru:

$$\hat{\beta}^{(2)}=\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{mt}-\bar{R}_m)(R_{it}-\bar{R}_i)}{\sum_{t=1}^{n}(R_{mt}-\bar{R}_m)^2}. \tag{12}$$

Parametr β pojawiający się w modelu CAPM może być wykorzystany jako miara ryzyka zarówno w przypadku normalnym, jak i α-stabilnym. Możemy jednak zastanowić się nad tym, czy pojawia się istotna z punktu widzenia inwestora różnica w interpretacji ryzyka, przy użyciu modelu α-stabilnego i gaussowskiego.

4. Analiza portfela – wyniki badań empirycznych

Jako portfel rynkowy przyjęto WIG. Konieczne do wyznaczenia współczynnika β tygodniowe stopy zwrotu R_{it} oraz R_{mt} wyznaczono ze wzoru (6). Natomiast wartości α, wyliczone na podstawie estymatora kwantylowego, pochodzą z [3].

Badania dowodzą, że wraz z wydłużaniem się okresu obserwacji rośnie niezmienność współczynnika β w czasie. Pojawiają się w związku z tym

Tabela 3. Współczynnik $\hat{\beta}$ dla tygodniowych stóp zwrotu

Spółki	$\hat{\beta}^{(2)}$	Oszacowana grubość ogona rozkładu α	$\hat{\beta}^{(\alpha)}$
Amerbank	0,5047	1,30	0,6029
BIG BG	1,1411	1,50	1,1270
BRE	0,9058	1,77	0,8899
Dębica	0,4015	1,43	0,7613
Elektrim	1,4132	1,58	1,4154
Irena	0,7240	1,66	0,7668
Jelfa	0,9587	1,36	1,3687
Kable	0,6921	1,65	0,7347
Kredyt Bank	0,8898	1,48	0,9251
Krosno	0,7160	1,43	0,8074
Mostostal Export	0,9894	1,55	1,0889
Mostostal Zabrze	0,9192	1,65	0,9348
Okocim	0,6869	1,67	0,6961
Optimus	1,0911	1,42	1,0159
Polifarb C – W	0,9234	1,62	1,0006
Prochem	0,7144	1,57	0,7160
Rolimpex	0,9456	1,58	1,0453
Sokołów	0,7986	1,49	0,7760
Stalexport	1,0169	1,41	0,9958
Swarzędz	0,7050	1,64	0,6900
Vistula	0,5869	1,66	0,6050
Wólczanka	0,5562	1,45	0,6130
Żywiec	0,5665	1,41	0,5653

propozycje, aby do szacowania β wykorzystywać dane z co najmniej 36- do 120-miesięcznego okresu [8]. Dlatego też dla wszystkich spółek notowanych na GPW w latach 1995-2002, estymator parametru β wyznaczono na podstawie danych z całego okresu.

Wartości β przy założeniu normalności oraz stabilności tygodniowych stóp zwrotu zaprezentowano w tabeli 3. Można zaobserwować, że pojawiają się różnice pomiędzy uzyskanymi $\hat{\beta}^{(2)}$ oraz $\hat{\beta}^{(\alpha)}$. Dla spółek: Jelfa, Mostostal Export, Polifarb C – W, Rolimpex współczynnik $\hat{\beta}^{(2)}$ jest mniejszy od jedynki i wskazuje na to, że akcje tych spółek są defensywne, natomiast $\hat{\beta}^{(\alpha)}$ większy od jedynki sugeruje, że mamy do czynienia z akcjami agresywnymi. W przypadku spółki Stalexport interpretacja jest odwrotna. Z drugiej strony jednak wszystkie wyróżnione powyżej współczynniki $\hat{\beta}^{(2)}$ i $\hat{\beta}^{(\alpha)}$ mają wartości zbliżone do jedności. Trudna zatem kategorycznie twierdzić, że zastąpienie rozkładu gaussowskiego rozkładem α-stabilnym zmienia podział akcji na defensywne i agresywne.

Zakończenie

Wyniki uzyskane z modeli α-stabilnych są dokładniejsze od wyników pochodzących z modeli gaussowskich, ponieważ opierają się na rzeczywistej grubości ogona rozkładu stóp zwrotu. Przeprowadzone badania wskazują między innymi na to, że wyznaczanie VaR przy założeniu normalności stóp zwrotu powoduje niedoszacowanie ryzyka. Chcąc więc uniknąć zaniżania prawdopodobieństwa występowania ekstremalnych stóp zwrotu, należy estymację VaR połączyć z badaniem grubości ogona rozkładu. Wyniki te oznaczają, że stosowanie rozkładów α-stabilnych przy nieodrzuconej hipotezie o rozkładzie normalnym stóp zwrotu pozwala na bardziej wiarygodne oszacowanie ryzyka obciążającego poszczególne instrumenty finansowego. Z drugiej strony stwierdzana grubość ogonów rozkładów nieprzekraczająca jedności dowodzi istnienia wartości oczekiwanej rozkładu stóp zwrotu. Daje to teoretyczną przesłankę do prognozowania przyszłych wartości stóp zwrotu.

Powstałe odchylenia współczynników $\hat{\beta}^{(2)}$ i $\hat{\beta}^{(\alpha)}$ są niewielkie i nie powodują dużych zmian w interpretacji ryzyka akcji. Różnice te mogą jednak wpływać między innymi na dokładność dopasowania prostej regresji do danych empirycznych. Dlatego też kolejnym etapem badań powinno być wyznaczenie dokładności dopasowania prostej przy zastosowaniu współczynnika determinacji. Na przeszkodzie w przeprowadzeniu tutaj pełnego wnioskowania statystycznego może jednak stanąć stwierdzany brak wariancji rozkładu stóp zwrotu. W tej sytuacji będzie konieczne zaplanowanie pełnych badań porównawczych

dla różnych trendów rynkowych. Uzyskane wyniki sugerują, że nie można wykluczyć braku podstaw do odrzucenia hipotezy zakładającej, że zmienność poszczególnych przyszłych stóp zwrotu jest lepiej wyjaśniana za pomocą modelu CAPM, opartego na założeniu o normalności rozkładu stóp zwrotu. Do wykorzystywania w praktyce modelu α-stabilnego może natomiast skłaniać wyższa efektywność estymatora $\hat{\beta}^{(\alpha)}$, która została wykazana w pracy [4].

Literatura

[1] K. Andrzejczak, *Statystyka elementarna z wykorzystaniem systemu Statgraphics*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997

[2] G. Gotzenberger, S.T. Rachev, E. Schwarz, *Performance Measurements: the Stable Paretian Approach*, w: G.A. Anastassiou (red.) *Applied Mathematics Reviews*, vol.1 World Scientific, Sigapore 2000

[3] A. Gołębiewska A., *Analiza grubości ogona rozkładu stóp zwrotu*, w: E. Panek (red.) *Matematyka w ekonomii*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2004

[4] S. Huschens, J.R.Kim, *Measuring Risk in Value at Risk in the Presence of Infinite Variance*, Technical report, 25/98, Department of Statistics, Technical University of Dresden, 1998

[5] S. Huschens, J.R. Kim, *BLUE for β in CAPM with Infinite Variance*, Technical report, 26/99, Department of Statistics, Technical University of Dresden, 1999

[6] S. Huschens, J.R. Kim, *A Stable CAPM in the Presence of Heavy – Tailed Distributions*, w: J. Franke, et al. (eds) *Measuring Risk in Complex Stochastic System*, New York, NY: Springer. Lect. Notes Stat. 147, 2000

[7] K. Jajuga, *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego, Wrocław 2000

[8] F.K. Reilly, K.C. Brown, *Analiza inwestycji i zarządzanie portfelem*, PWE, Warszawa 2001

INVESTMENT-MAKING IN ENVIRONMENT OF PARETO STABLE INTEREST RATES

Summary

The main goal of this paper is a comparison between some elements of portfolio analysis under Gaussian distribution and analogous one under Pareto stable distribution. Pareto stable CAPM is discussed here.