Emil PANEK
Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

DYNAMICZNA TEORIA POPYTU I STEROWANIE OPTYMALNE

Wstęp

W teorii preferencji standardowo zakłada się, że każdy konsument ma określoną, interesującą go przestrzeń towarów $X \subseteq R_+^n$ z ustaloną odległością $\rho_X(x, y)$ między jej dowolnymi elementami x, y, zwanymi koszykami towarów; n jest liczbą towarów dostępnych na rynku.

W przestrzeni towarów X definiuje się relację (słabej) preferencji $\succsim$, spełniającą dwa warunki (pełnego preporządku):

$$\forall x, y, z \in X\ (x \succsim y \wedge y \succsim z \Rightarrow x \succsim z) \text{ (aksjomat tranzytywności)},$$

$$\forall x, y \in X\ (x \succsim y \vee y \succsim x) \text{ (aksjomat zupełności)}.$$

Para $(X, \succsim)$ tworzy tzw. pole preferencji konsumenta. Zapis $x \succsim y$ czytamy: „koszyk x jest przez konsumenta przynajmniej słabo preferowany nad koszyk y" lub „koszyk x jest zdaniem konsumenta nie gorszy od koszyka y". Jeżeli koszyki $x, y \in X$ spełniają jednocześnie warunek $x \succsim y$ oraz warunek $y \succsim x$, to nazywamy je koszykami indyferentnymi (nierozróżnialnymi z punktu widzenia preferencji konsumenta, jednakowo dobrymi). Natomiast jeżeli koszyki x, y spełniają warunek $x \succsim y \wedge \neg(y \succsim x)$, to mówimy, że koszyk x jest przez konsumenta preferowany nad koszyk y lub że koszyk x jest zdaniem konsumenta lepszy od koszyka y. (Symbol $\neg$ jest znakiem negacji; zdanie $\neg P$ czytamy „nieprawda, że P").

Uzupełniając tę stosunkowo skromną aksjomatykę o kilka dalszych postulatów, w tym o fundamentalny aksjomat ciągłości relacji preferencji i tzw. aksjomat niedosytu, w ciągu minionego półwiecza ekonomiści

matematyczni stworzyli zręby dedukcyjnej teorii preferencji. W powszechnie akceptowanym kształcie teoria preferencji jest w swojej istocie statyczna. Wprawdzie pisze się tu i ówdzie w komentarzach, że przestrzeń towarów mogą tworzyć koszyki z różnych okresów (momentów) i wobec tego relacja preferencji konsumenta umożliwia ocenę (porównywanie) koszyków rozproszonych w przestrzeni i w czasie, ale w literaturze brak systematycznego ujęcia tej idei w języku matematycznym, tym bardziej próby wyciągnięcia stąd jakichkolwiek interesujących wniosków[1]. Zadanie to podejmujemy w tej pracy.

Załóżmy, że dana jest przestrzeń interesujących konsumenta towarów $X \subseteq R^n_+$ oraz horyzont czasu[2] $T=[0, t_1]$, $t_1 \leqslant +\infty$. Próba zdynamizowania teorii preferencji może iść zasadniczo w dwóch kierunkach. W pierwszym identyfikowana w czasie jest sama relacja preferencji $\succsim_t$. Aksjomaty tranzytywności i zupełności są wówczas wiążące dla koszyków towarów z tego samego momentu. W drugim ujęciu nie relacja preferencji, lecz koszyki towarów mają przypisane im indeksy czasu, co formalnie oznacza, że koszyki zanurzone są nie w n-wymiarowej przestrzeni towarów X, lecz w $(n+1)$-wymiarowej przestrzeni fazowej $X \times T$ towarów z przypisanymi im indeksami czasu. Podejście drugie jest ogólniejsze.

1. Relacja preferencji w przestrzeni fazowej towarów

Zamiast statycznej przestrzeni towarów $X \subseteq R^n_+$ będziemy rozpatrywać dynamiczną przestrzeń towarów (przestrzeń fazową) $X \times T \subseteq R^{n+1}_+$, gdzie $T=[0, t_1]$ jest ustalonym horyzontem czasu z momentem końcowym $t_1 \leqslant +\infty$. Dla porządku zakładamy, że określona jest miara odległości $\rho_{X \times T}(x, t; y, \tau)$ między dowolnymi elementami (x, t), (y, τ) przestrzeni $X \times T$.

Zakładamy, że w przestrzeni $X \times T$ określona jest relacja słabej preferencji $\succsim$, spełniająca następujące dwa warunki:

(I) $$\forall (x, t) \in X \times T,\ \forall (y, \tau) \in X \times T,\ \forall (z, \theta) \in X \times T$$
$$((x, t) \succsim (y, \tau) \wedge (y, \tau) \succsim (z, \theta) \Rightarrow (x, t) \succsim (z, \theta))$$

[1] Por. na przykład [3], rozdz. I, § 1.

[2] W całej pracy zakładamy, że czas zmienia się w sposób „ciągły" i przyjmuje wartości rzeczywiste z pewnego odcinka (przedziału domkniętego) $[0, t_1]$ lub przebiega półoś $[0, +\infty)$, gdy $t_1 = +\infty$.

(jeżeli w chwili t koszyk towarów x jest zdaniem konsumenta nie gorszy niż koszyk y w chwili τ, a ten z kolei jest nie gorszy niż koszyk z w chwili θ, to koszyk x w chwili t jest zdaniem konsumenta również nie gorszy niż koszyk z w chwili θ),

$$\textbf{(II)} \quad \forall (x, t) \in X \times T,\ \forall (y, \tau) \in X \times T\ \big((x, t) \gtrsim (y, \tau) \vee (y, \tau) \gtrsim (x, t)\big)$$

(biorąc dowolne dwa koszyki towarów, w dowolnych momentach, konsument zawsze jeden z nich potrafi zakwalifikować jako nie gorszy niż drugi).

Relacja preferencji $\gtrsim$ umożliwia porównywanie koszyków towarów z różnych momentów, dlatego nazywamy ją dynamiczną relacją preferencji konsumenta. Zamiast „koszyk x w chwili t" krótko piszemy „koszyk (x, t)". Parę $(X \times T, \gtrsim)$ nazywamy dynamicznym polem preferencji konsumenta.

Definicja 1

(i) Koszyki $(x, t) \in X \times T$, $(y, \tau) \in X \times T$ nazywamy indyferentnymi (nierozróżnialnymi z punktu widzenia relacji preferencji), jeżeli jednocześnie $(x, t) \gtrsim (y, \tau)$ oraz $(y, \tau) \gtrsim (x, t)$.

(ii) Koszyk $(x, t) \in X \times T$ nazywamy silnie preferowanym nad koszyk (y, τ) (lub koszykiem lepszym od (y, τ)), jeżeli $(x, t) \gtrsim (y, \tau) \wedge \neg((y, \tau) \gtrsim (x, t))$. ▲

Jeżeli koszyki (x, t), (y, τ) są indyferentne, to piszemy $(x, t) \sim (y, \tau)$. Jeżeli koszyk (x, t) jest lepszy zdaniem konsumenta niż koszyk (y, τ), piszemy $(x, t) \succ (y, \tau)$.

O zbiorze $K_{x,t} = \{(y, \tau) | (y, \tau) \sim (x, t)\}$ mówimy, że tworzy obszar obojętności w fazowej przestrzeni towarów $X \times T$.

Dynamiczna relacja preferencji ma m.in. następujące własności:

$$\neg \exists (x, t) \in X \times T((x, t) \succ (x, t))$$

oraz

$$\forall (x, t) \in X \times T,\ \forall (y, \tau) \in X \times T:$$

$$(x, t) \succ (y, \tau) \vee (y, \tau) \gtrsim (x, t),$$

$$(x, t) \gtrsim (y, \tau) \Leftrightarrow (x, t) \succ (y, \tau) \vee (x, t) \sim (y, \tau),$$

$$(x, t) \succ (y, \tau) \vee (y, \tau) \succ (x, t) \vee (x, t) \sim (y, \tau).$$

Ponadto

$$\forall (x, t) \in X \times T,\ \forall (y, \tau) \in X \times T,\ \forall (z, \theta) \in X \times T:$$

$$(x, t) \gtrsim (y, \tau) \wedge (y, \tau) \succ (z, \theta) \Rightarrow (x, t) \succ (z, \theta).$$

Dowód tych własności przebiega podobnie jak dowód lematu 1.1 w pracy [4], s. 21-22.

Definicja 2. Dynamiczną relację preferencji $\gtrsim$ nazywamy ciągłą w $X \times T$, jeżeli zbiór

$$G = \{((x, t), (y, \tau)) | (x, t) \succ (y, \tau);\ (x, t) \in X \times T,\ (y, \tau) \in X \times T\} \subseteq R_+^{2n+2} \quad (1)$$

jest otwarty w przestrzeni $(X \times T) \times (X \times T)$ z metryką

$$\rho_G((x^1, t_1; y^1, \tau_1); (x^2, t_2; y^2, \tau_2)) = \\ = \rho_{X \times T}(x^1, t_1; x^2, t_2) + \rho_{X \times T}(y^1, \tau_1; y^2, \tau_2).$$

Równoważny warunek głosi, że dynamiczna relacja preferencji jest ciągła w $X \times T$, gdy zbiór

$$\bar{G} = \{((x, t), (y, \tau)) | (y, \tau) \gtrsim (x, t);\ (x, t) \in X \times T,\ (y, \tau) \in X \times T\} \quad (2)$$

jest domknięty w $(X \times T) \times (X \times T)$. ▲

Klasę ciągłych w $X \times T$ relacji preferencji będziemy oznaczać symbolem $C^0(X \times T)$.

Niech M będzie dowolnym (niepustym) podzbiorem X. Ustalmy moment $t \in T$ oraz dowolny podzbiór czasu $T' \subseteq T$, zawierający moment t.

Definicja 3

(i) Koszyk towarów (x, t) nazywamy koszykiem preferowanym w zbiorze M w chwili t, jeżeli $x \in M$ oraz

$$\forall y \in M((x, t) \gtrsim (y, t)).$$

(ii) Koszyk towarów (x, t) nazywamy koszykiem preferowanym w zbiorze M w horyzoncie $T' \subseteq T$, jeżeli $(x, t) \in M \times T'$ oraz

$$\forall (y, \tau) \in M \times T'((x, t) \gtrsim (y, \tau)).$$ ▲

Twierdzenie 1

(1) *Jeżeli* $\gtrsim \in C^0(X \times T)$ *oraz* M *jest zwartym podzbiorem* X, *to w każdej chwili* $t \in T$ *istnieje koszyk towarów preferowany w zbiorze* M.

(2) *Jeżeli dodatkowo* T' *jest zwartym podzbiorem horyzontu* T, *to w zbiorze* M *istnieje koszyk towarów preferowany w horyzoncie* T'.

(3) *Zbiory preferowanych koszyków towarów, o których mowa w* (1), (2), *są zwarte.*

Dowód twierdzenia łatwo przeprowadzić, wzorując się na dowodzie twierdzenia 1.2 przedstawionego w [4], s. 25-26, zważywszy, że jeżeli M jest zbiorem zwartym, to $\forall t \in T$ zbiór $M \times \{t\}$ jest także zwarty. Podobnie, ze zwartości zbiorów M, T' wynika zwartość ich produktu kartezjańskiego $M \times T'$. ■

Definicja 4. Dynamiczne pole preferencji $(X \times T, \gtrsim)$ nazywamy:

(i) słabo wypukłym w chwili $t \in T$, jeżeli zbiór X jest wypukły oraz $\forall y \in X$ zbiór

$$F^1(y, t) = \{(x, t) | x \in X \wedge (x, t) \gtrsim (y, t)\}$$

jest wypukły,

(ii) słabo wypukłym, jeżeli zbiór X jest wypukły oraz $\forall y \in X$, $\forall \tau \in T$ zbiór

$$F^2(y, \tau) = \{(x, t) \in X \times T | (x, t) \gtrsim (y, \tau)\}$$

jest wypukły. ▲

Przyjmując w (ii) $\tau = t$, widzimy, że słaba wypukłość dynamicznego pola preferencji pociąga za sobą jego słabą wypukłość w dowolnym momencie horyzontu T.

Twierdzenie 2. *Dynamiczne pole preferencji $(X \times T, \gtrsim)$ jest słabo wypukłe wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest wypukły oraz*

$$\forall (x, t) \in X \times T, \forall (y, \tau) \in X \times T, \forall \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$$

$$((x, t) \gtrsim (y, \tau) \Rightarrow \alpha(x, t) + \beta(y, \tau) \gtrsim (y, \tau)).$$

Dowód

Konieczność

Załóżmy, że dynamiczne pole preferencji jest słabo wypukłe i weźmy dowolne dwa koszyki, spełniające warunek $(x, t) \gtrsim (y, \tau)$, zatem $(x, t) \in F^2(y, \tau)$ oraz, oczywiście, $(y, \tau) \in F^2(y, \tau)$. Zbiór $F^2(y, \tau)$ jest z założenia wypukły, czyli

$$\forall \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1 \ (\alpha(x, t) + \beta(y, \tau) \in F^2(y, \tau)),$$

tzn.

$$\alpha(x, t) + \beta(y, \tau) \gtrsim (y, \tau).$$

Dostateczność

Weźmy dowolny koszyk $(y, \tau) \in X \times T$. Niech $(x^1, t^1) \in F^2(y, \tau)$ oraz $(x^2, t^2) \in F^2(y, \tau)$. Wówczas $(x^1, t^1) \gtrsim (y, \tau)$ oraz $(x^2, t^2) \gtrsim (y, \tau)$. Zgodnie z aksjomatem (II) dynamicznej relacji preferencji albo $(x^1, t^1) \gtrsim (x^2, t^2)$, albo $(x^2, t^2) \gtrsim (x^1, t^1)$ (albo zachodzi jedno i drugie). Przyjmijmy, że $(x^1, t^1) \gtrsim (x^2, t^2)$, zatem

$$\alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \in X \times T \quad \text{oraz} \quad \alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \gtrsim (x^2, t^2)$$

dla dowolnych liczb α, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Z aksjomatu (I) dynamicznej relacji preferencji wynika, że

$$\alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \gtrsim (y, \tau), \quad \text{czyli} \quad \alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \in F^2(y, \tau).$$

Zbiór $F^2(y, \tau)$ jest wypukły. ■

W twierdzeniu 2 posłużyliśmy się operacją $+$, dodawania elementów fazowej przestrzeni towarów $X \times T$, która wymaga wyjaśnienia. Otóż na pierwszy rzut oka suma $\alpha(x, t) + \beta(y, \tau)$ może oznaczać zarówno koszyk składający się z wektora αx towarów z momentu t oraz wektora βy towarów z momentu τ, jak i koszyk towarów $z = \alpha x + \beta y$ z momentu $\theta = \alpha t + \beta \tau$. W rzeczy samej dopuszczalna jest tylko druga interpretacja, gdyż w przestrzeni fazowej $X \times T$ nie występują koszyki, zawierające towary z różnych momentów. Punkt $(x, t) \in X \times T$ wskazuje bowiem równocześnie na zawartość koszyka i czas, z którego pochodzą towary. Ten sam koszyk nie może składać się z towarów pochodzących z różnych momentów.

Udowodnione twierdzenie podpowiada następującą definicję silnie wypukłego pola preferencji.

Definicja 5. Dynamiczne pole preferencji nazwiemy:

(i) silnie wypukłym w chwili $t \in T$, jeżeli zbiór X jest wypukły oraz

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$$
$$((x, t) \gtrsim (y, t) \wedge x \neq y \Rightarrow \alpha(x, t) + \beta(y, t) \succ (y, t)),$$

(ii) silnie wypukłym, jeżeli zbiór X jest wypukły oraz

$$\forall (x, t) \in X \times T, \forall (y, \tau) \in X \times T, \forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$$
$$((x, t) \gtrsim (y, \tau) \wedge x, t) \neq (y, \tau) \Rightarrow \alpha(x, t) + \beta(y, \tau) \succ (y, \tau)). \quad \blacktriangle$$

Silna wypukłość dynamicznego pola preferencji pociąga za sobą jego silną wypukłość w dowolnej chwili horyzontu T. Każde silnie wypukłe dynamiczne pole preferencji jest wypukłe.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dynamiczne pole preferencji* $(X \times T, \gtrsim)$ *jest silnie wypukłe i relacja preferencji* $\gtrsim$ *jest ciągła w* $X \times T$, *to* $\forall (y, \tau) \in X \times T$ *zbiór*

$$F^2(y, \tau) = \{(x, t) \in X \times T | (x, t) \gtrsim (y, \tau)\}$$

jest silnie wypukły, tzn. spełnia warunek:

$$\forall (x^1, t^1) \in F^2(y, \tau),\ \forall (x^2, t^2) \in F^2(y, \tau),\ \forall \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1,\ \exists \varepsilon > 0:$$
$$U(\varepsilon; z, \theta) \subset F^2(y, \tau),$$

gdzie $(z, \theta) = \alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2)$; $U(\varepsilon; z, \theta)$ *jest* ε*-otoczeniem punktu* (z, θ) *w* $X \times T$.

Dowód. Niech $(x^1, t^1) \in F^2(y, \tau)$ oraz $(x^2, t^2) \in F^2(y, \tau)$, $(x^1, t^1) \neq (x^2, t^2)$. Dla porządku przyjmijmy, że $(x^1, t^1) \gtrsim (x^2, t^2)$. Dynamiczne pole preferencji z założenia jest silnie wypukłe, zatem

$$\forall \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1 (\alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \succ (x^2, t^2) \gtrsim (y, \tau)),$$

tzn. $(z, \theta) = \alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \succ (y, \tau)$. Tym samym $(z, \theta) \in F^2(y, \tau)$.

Zdefiniujmy zbiór

$$G(y, \tau) = \{(x, t) \in X \times T | (x, t) \succ (y, \tau)\}.$$

Oczywiście $G(y, \tau) \subset F^2(y, \tau)$ oraz $(z, \theta) \in G(y, \tau)$. Udowodnimy, że zbiór $G(y, \tau)$ jest otwarty w $X \times T$.

Z założenia $\gtrsim \in C^0(X \times T)$ tzn. zbiór G w (1) jest otwarty w $(X \times T) \times (X \times T)$. Załóżmy, że zbiór $G(y, \tau)$ nie jest otwarty w $X \times T$. Istnieje zatem koszyk $(\bar{x}, \bar{t}) \in G(y, \tau)$ niebędący punktem wewnętrznym tego zbioru w $X \times T$, czyli istnieje ciąg koszyków $(x^i, t^i) \in X \times T \setminus G(y, \tau)$, dla $i = 1, \ldots, \infty$, zbieżny do $(\bar{x}, \bar{t})$ (w normie $\rho_{X \times T}$). Ponieważ $(x^i, t^i) \notin G(y, \tau)$, zatem

$$\forall i ((y, \tau) \gtrsim (x^i, t^i)), \quad \text{a więc} \quad \forall i (((x^i, t^i), (y, \tau)) \in \bar{G})$$

oraz

$$((x^i, t^i), (y, \tau)) \to ((\bar{x}, \bar{t}), (y, \tau)) \in \bar{G},$$

gdyż zbiór $\bar{G}$ jest domknięty w $(X \times T) \times (X \times T)$ (zob. (2)).

Jednocześnie $(\bar{x}, \bar{t}) \in G(y, \tau)$, czyli $((\bar{x}, \bar{t}), (y, \tau)) \in G$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zbiór $G(y, \tau)$ jest otwarty w $X \times T$. Zatem

$$(z, \theta) = \alpha(x^1, t^1) + \beta(x^2, t^2) \in G(y, \tau) \subset F^2(y, \tau)$$

i zbiór $G(y, \tau)$ jest otwarty w $X \times T$, czyli

$$\exists \varepsilon > 0 (U(\varepsilon; z, \theta) \subset G(y, \tau) \subset F^2(y, \tau)),$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

W drugą stronę twierdzenie jest nieprawdziwe, na przykład ciągła relacja preferencji $\gtrsim$ zdefiniowana na odcinku $[0, 3] \times \{0\}$ w następujący sposób:

$$(x, 0) \gtrsim (y, 0) \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(y),$$

gdzie

$$f(a) = \begin{cases} a, & \text{gdy } 0 \leqslant a < 1, \\ 1, & \text{gdy } 1 \leqslant a < 2, \\ -a+3, & \text{gdy } 2 \leqslant a \leqslant 3, \end{cases}$$

generuje zbiór

$$F^2(y, 0) = \{(x, 0) \in [0, 3] \times \{0\} \mid (x, 0) \gtrsim (y, 0)\}$$

silnie wypukły w $[0, 3] \times \{0\}$, natomiast pole preferencji $([0, 3] \times \{0\}, \gtrsim)$ nie jest silnie wypukłe, gdyż na przykład dla $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 2$, $x_1 \neq x_2$ i liczb $\alpha, \beta > 0$ o sumie 1 nie jest spełniony warunek

$$\alpha(x_1, 0) + \beta(x_2, 0) \succ (x_1, 0).$$

Twierdzenie 4

(1) *Jeżeli dynamiczne pole preferencji $(X \times T, \gtrsim)$ jest słabo wypukłe oraz w wypukłym zbiorze $M \subseteq X$ istnieje koszyk preferowany w chwili $t \in T$, to zbiór wszystkich takich koszyków jest wypukły. Jeżeli dynamiczne pole preferencji jest silnie wypukłe, to w każdej chwili $t \in T$ w wypukłym zbiorze $M \subseteq X$ istnieje nie więcej niż jeden preferowany koszyk.*

(2) *Niech T' będzie spójnym podzbiorem T. Jeżeli dynamiczne pole preferencji jest słabo wypukłe oraz w wypukłym zbiorze $M \subseteq X$ istnieje koszyk preferowany w horyzoncie $T' \subseteq T$, to zbiór wszystkich*

takich koszyków jest wypukły. Jeżeli dynamiczne pole preferencji jest silnie wypukłe, to w wypukłym zbiorze $M \subseteq X$ istnieje nie więcej niż jeden koszyk preferowany w horyzoncie $T' \subseteq T$.

Dowód tego twierdzenia otrzymujemy, wzorując się na dowodzie twierdzenia 1.3 w [4], s. 27-28. ■

Z twierdzeń 1 i 4 płyną dwa wnioski. Po pierwsze, jeżeli dynamiczne pole preferencji jest słabo wypukłe, a relacja preferencji jest ciągła, to w każdym zwartym i wypukłym zbiorze $M \subseteq X$, w dowolnej chwili $t \in T$, można wskazać preferowane koszyki towarów. Zbiór takich koszyków sam jest zwarty i wypukły. Po drugie, jeżeli dynamiczne pole preferencji jest silnie wypukłe, to w każdej chwili w zwartym i wypukłym zbiorze $M \subseteq X$ istnieje dokładnie jeden preferowany koszyk towarów.

Przy tych samych założeniach słaba wypukłość dynamicznego pola preferencji implikuje istnienie zwartego i wypukłego podzbioru koszyków preferowanych w $M \subseteq X$ w dowolnie wybranym spójnym i zwartym horyzoncie $T' \subseteq T$. Podobnie, silna wypukłość dynamicznego pola preferencji zapewnia istnienie dokładnie jednego, preferowanego w M koszyka towarów w zwartym horyzoncie czasu $T' \subseteq T$.

2. Funkcja użyteczności

Niech $(X \times T, \succsim)$ będzie dynamicznym polem preferencji z przestrzenią fazową towarów $X \times T \subseteq R_+^{n+1}$ i ciągłą relacją preferencji konsumenta.

Definicja 6. Odwzorowanie $u\colon X \times T \to R^1$ spełniające warunek

$$u(x, t) \geqslant u(y, \tau) \Leftrightarrow (x, t) \succsim (y, \tau)$$

nazywamy dynamiczną funkcją użyteczności, związaną z relacją preferencji $\succsim$. ▲

O najprostszych własnościach funkcji użyteczności mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Jeżeli $u\colon X \times T \to R^1$ jest dynamiczną funkcją użyteczności związaną z relacją preferencji $\succsim$, to:*

(1) $u(x, t) > u(y, \tau) \Leftrightarrow (x, t) \succ (y, \tau)$,

(2) $u(x, t) = u(y, \tau) \Leftrightarrow (x, t) \sim (y, \tau)$,

(3) *superpozycja $g(u)$ funkcji użyteczności u i dowolnej rosnącej funkcji skalarnej $g\colon R^1 \to R^1$ jest funkcją użyteczności.*

Dowód twierdzenia otrzymujemy, wzorując się na dowodach twierdzeń 2.1 i 2.2 w pracy [4], s. 31-32. ■

Natomiast o warunkach istnienia dynamicznej funkcji użyteczności mówi kolejne twierdzenie, wzorowane na oryginalnym twierdzeniu G. Debreu [1].

Twierdzenie 6. *Jeżeli przestrzeń fazowa towarów $X \times T$ jest wypukłym podzbiorem R_+^{n+1} i relacja preferencji jest ciągła w $X \times T$, to istnieje ciągła, dynamiczna funkcja użyteczności u: $X \times T \to R^1$, związana z tą relacją.*

Stosunkowo prosty dowód tego twierdzenia w jednym przypadku szczególnym łatwo otrzymać, wzorując się na pracy [2], rozdz. I, twierdzenie 3. ■

Zastępując dynamiczną relację preferencji związaną z nią funkcją użyteczności, możemy sformułować równoważne warunki słabej i silnej wypukłości dynamicznego pola preferencji w terminach funkcji użyteczności.

Twierdzenie 7. *Jeżeli przestrzeń fazowa towarów $X \times T \subseteq R_+^{n+1}$ jest zbiorem wypukłym i relacja preferencji konsumenta $\gtrsim$ jest ciągła w $X \times T$, to dynamiczne pole preferencji $(X \times T, \gtrsim)$ jest słabo wypukłe (silnie wypukłe) wtedy i tylko wtedy, gdy związana z relacją preferencji $\gtrsim$ dynamiczna funkcja użyteczności jest quasi-wklęsła (silnie quasi-wklęsła).*

Dowód twierdzenia otrzymujemy, wzorując się na dowodzie twierdzenia 2.4 w pracy [4], s. 34-35. ■

Definicja 7

(i) Mówimy, że w dynamicznym polu preferencji obserwujemy zjawisko niedosytu w chwili $t \in T$, jeżeli

$$\forall x, y \in X \left(x \gtrsim_{\neq} y \Rightarrow (x, t) \succ (y, t)\right).$$

(ii) Mówimy, że w dynamicznym polu preferencji obserwujemy niedosyt w horyzoncie T, jeżeli

$$\forall (x, t) \in X \times T,\ \forall (y, \tau) \in X \times T \left(x e^{-vt} \gtrsim_{\neq} y e^{-v\tau} \Rightarrow (x, t) \succ (y, \tau)\right)$$

(parametr $v > 0$ jest stopą dyskonta konsumpcji). ▲

Jeżeli w dynamicznym polu preferencji istnieje niedosyt w horyzoncie T, to istnieje on również w każdym momencie horyzontu.

W terminach dynamicznej funkcji użyteczności warunek $(x, t) \succ (y, t)$ (w części (i)) można zastąpić równoważnym warunkiem $u(x, t) > u(y, t)$, a warunek $(x, t) \succ (y, \tau)$ (w części (ii)) warunkiem $u(x, t) > u(y, \tau)$.

Twierdzenie 8. *Jeżeli w dynamicznym polu preferencji występuje niedosyt, to funkcja* $u: X \times T \to R^1$, *związana z dynamiczną relacją preferencji, jest rosnącą funkcją zmiennej* $x \in X$ *i malejącą funkcją czasu* $t \in T$ *(i na odwrót).*

Dowód. Jeżeli $x, y \in X, x \gneqq y$, to w myśl definicji 7 (i) $(x, t) \succ (y, t)$, czyli $u(x, t) > u(y, t)$. Dla każdego $t \in T$ funkcja użyteczności $u(\cdot, t)$ jest więc rosnącą funkcją zmiennej zaznaczonej kropką.

Przyjmując w definicji 7 (ii) $x = y$, mamy:

$$xe^{-\nu t} \gneqq xe^{-\nu \tau} \Rightarrow (x, t) \succ (x, \tau) \qquad \text{czyli} \qquad u(x, t) > u(x, \tau).$$

Stąd zaś wynika, że

$$\forall x \in X,\ \forall \tau,\ t \in T(\tau > t \Rightarrow u(x, t) > u(x, \tau)).$$

Dowód twierdzenia w drugą stronę jest równie prosty. ■

Szczególnym przypadkiem funkcji quasi-wklęsłej (silnie quasi-wklęsłej) jest funkcja wklęsła (silnie wklęsła). Dalej zakładamy, że przestrzeń towarów $X = R^n_+$, a dynamiczna funkcja użyteczności związana z silnie wypukłym polem preferencji $(R^n_+ \times T, \gtrsim)$ jest ciągłą, do drugich pochodnych cząstkowych włącznie, silnie wklęsłą i rosnącą funkcją zmiennej x oraz malejącą funkcją czasu t:

(III) $\qquad u \in C^2(R^n_+ \times T),$

oraz

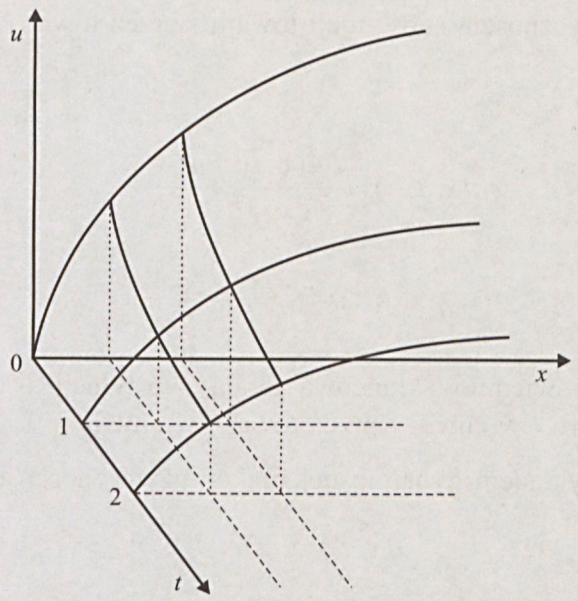
(IV) $\qquad \forall x \in R^n_+,\ \forall t \in T,\ \forall i \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} > 0,\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} < 0 \right),$

(V) $\qquad \forall x \in R^n_+,\ \forall t \in T,\ \forall \lambda \in R^n \setminus \{0\}\ (\lambda H(x, t) \lambda^T < 0),$

gdzie

$$H(x, t) = \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right)_{(n,n)}$$

jest hesjanem dynamicznej funkcji użyteczności w punkcie (x, t) (zob. rysunek).



Dynamiczna funkcja użyteczności spełniająca warunki (III)-(V)

Z ujemnej określoności hesjanu $H(x, t)$ w każdej chwili $t \in T$ wynika w szczególności, że

$$\forall t \in T, \forall i \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i^2} < 0 \right)$$

wszędzie na R^n_+ (prawo Gossena). Definiując obszar (powierzchnię) obojętności w terminach dynamicznej funkcji użyteczności, otrzymujemy:

$$K_{x,t} = \{(y, \tau) \in R^n_+ \times T \mid u(y, \tau) = u(x, t)\}.$$

Definicja 8

(i) Wyrażenie

$$s_{ij}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} : \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j}$$

nazywamy krańcową stopą substytucji towaru i przez towar j w koszyku x, w chwili t, natomiast wyrażenie

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = s_{ij}(x, t) \cdot \frac{x_i}{x_j}$$

nazywamy elastycznością substytucji towaru i przez towar j w koszyku x, w chwili t $(i \neq j)$.

(ii) Wyrażenia

$$s_{ij}(x, t, \tau) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} : \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x_j},$$

$$\varepsilon_{ij}^{s}(x, t, \tau) = s_{ij}(x, t, \tau) \cdot \frac{x_i}{x_j}$$

nazywamy (odpowiednio) krańcową stopą substytucji i elastycznością substytucji towaru i w chwili t przez towar j w chwili τ. ▲

Prostym przykładem dynamicznej funkcji użyteczności jest funkcja

$$u(x, t) = u(x) e^{-\nu t} \tag{3}$$

z multiplikatywnym czynnikiem dyskontującym $e^{-\nu t}$. Wówczas, w przypadku funkcji (3),

$$s_{ij}(x, t) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} : \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = s_{ij}(x)$$

oraz

$$\varepsilon_{ij}^{s}(x, t) = s_{ij}(x, t) \cdot \frac{x_i}{x_j} = s_{ij}(x) \cdot \frac{x_i}{x_j}.$$

Dynamiczna funkcja użyteczności (3) charakteryzuje się stałymi w czasie krańcowymi stopami substytucji towarów. Natomiast

$$s_{ij}(x, t, \tau) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \cdot e^{-\nu(t-\tau)} = s_{ij}(x) e^{-\nu(t-\tau)},$$

$$\varepsilon_{ij}(x, t, \tau) = s_{ij}(x, t, \tau) \cdot \frac{x_i}{x_j} = s_{ij}(x) \cdot \frac{x_i}{x_j} e^{-\nu(t-\tau)}$$

oraz

$$s_{ij}(x, t, \tau) \to 0, \qquad \varepsilon_{ij}(x, t, \tau) \to 0$$

przy $t - \tau \to +\infty$, tzn. skłonność konsumenta do rezygnacji z pewnego towaru dzisiaj na jego rzecz w przyszłości maleje do zera w miarę oddalania się czasu, w którym miałaby urzeczywistnić się taka substytucja.

Jeżeli dynamiczna funkcja użyteczności (3) jest dla każdego t silnie wklęsła i rosnąca na R^n_+, to generowane przez nią pole preferencji jest w każdej chwili silnie wypukłe.

3. Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji. Dynamiczna funkcja popytu

Niech $p=(p_1, \ldots, p_n)>0$ będzie wektorem cen towarów, I – dochodem konsumenta oraz $X=R^n_+$. Oznaczmy przez $D(p, I)$ zbiór koszyków towarów, które może nabyć konsument, dysponujący dochodem I, gdy na rynku obowiązują ceny p:

$$D(p, I)=\{x \in R^n_+ \mid \langle p, x\rangle \leqslant I\}$$

oraz ustalmy horyzont $T=[0, t_1]$ (tutaj i wszędzie dalej $\langle x, y\rangle=\sum_i x_i y_i$).

Twierdzenie 9. *Jeżeli relacja preferencji* $\gtrsim$ *jest ciągła w* $R^n_+ \times T$ *oraz dynamiczne pole preferencji* $(R^n_+ \times T, \gtrsim)$ *jest silnie wypukłe, to odwzorowanie*

$$\varphi(p, I, t)=\{(x \in D(p, I) \mid \forall y \in D(p, I)((x, t) \gtrsim (y, t))\}$$

jest funkcją na $\operatorname{int} R^{n+1}_+ \times T$.

Dowód tego twierdzenia łatwo przeprowadzić, wzorując się na dowodzie twierdzenia 3 w pracy [4], s. 42. ■

Definicja 9. Funkcję $\varphi: \operatorname{int} R^{n+1}_+ \times T \to R^n_+$ uzależniającą w każdej chwili $t \in T$ popyt konsumenta na towary od cen towarów i dochodu konsumenta nazywamy dynamiczną funkcją popytu konsumpcyjnego. ▲

Zastępując w twierdzeniu 9 relację preferencji dynamiczną funkcją użyteczności, możemy dynamiczną funkcję popytu zdefiniować następująco:

$$\varphi(p, I, t)=\arg \max_{\substack{\langle p, x\rangle \leqslant I \\ x \geqslant 0}} u(x, t). \tag{4}$$

W dalszym ciągu zakładamy, że dynamiczna funkcja użyteczności spełnia warunki (**III**)-(**V**) (jest gładka, rosnąca i silnie wklęsła na przestrzeni towarów R^n_+ oraz malejąca w czasie).

Rozpatrzmy zadanie wyboru najlepszego, zdaniem konsumenta, koszyka towarów dostępnych ze względu na ceny $p>0$ i dochód $I>0$ w chwili t: znaleźć

$$\max u(x, t) \tag{5}$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle \leqslant I, \tag{6}$$
$$x \geqslant 0.$$

Z twierdzenia 9 wynika, że na $\operatorname{int} R_+^{n+1} \times T$ rozwiązanie tego zadania jest funkcją (cen p, dochodu I oraz czasu t). Faktycznie można dowieść więcej, o czym mówi kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 10. *Przy założeniach* (**III**)-(**V**) *funkcja popytu* φ *w* (4) *jest ciągła na* $\operatorname{int} R_+^{n+1} \times T$.

Dowód. Niech $p^i \to \bar{p} > 0$, $I_i \to \bar{I} > 0$, $t_i \to \bar{t} \in T$ dla $i = 1, 2, \ldots, \infty$, oraz

$$x^i = \varphi(p^i, I^i, t^i) = \arg \max_{\substack{\langle p^i, x\rangle \leqslant I^i \\ x \geqslant 0}} u(x, t^i).$$

Wówczas $\forall i(\langle p^i, x^i\rangle = I^i)$ gdyż $\forall t$ funkcja użyteczności jest rosnącą funkcją zmiennej x. Ciąg $\{x^i\}_{i=1}^{\infty}$, jest ograniczony, gdyż ciągi $\{p^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ są ograniczone. Istnieje więc podciąg $\{x^{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ zbieżny do takiej granicy $x^0 \geqslant 0$, że $\langle \bar{p}, x^0\rangle = \bar{I}$.

Załóżmy, że

$$x^0 \neq \bar{x} = \varphi(\bar{p}, \bar{I}, \bar{t}) = \arg \max_{\substack{\langle \bar{p}, x\rangle \leqslant \bar{I} \\ x \geqslant 0}} u(x, \bar{t}).$$

Zatem

$$u(x^0, \bar{t}) < u(\bar{x}, \bar{t}). \tag{*}$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$y^i = \arg \min_{\substack{\langle p^i, x\rangle \leqslant I_i \\ x \geqslant 0}} \|x - \bar{x}\|, \qquad i = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Dla każdego i zadanie to ma skończone rozwiązanie. Ciąg $\{y^i\}_{i=1}^{\infty}$ jest ograniczony, zawiera zatem podciąg $\{y^{i_{j(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do takiego wektora $y^0 \geqslant 0$, że $\langle \bar{p}, y^0\rangle \leqslant \bar{I}$.

Przy tym

$$\forall k\,(u(y^{i_{j(k)}}, t^{i_{j(k)}}) \leqslant u(x^{i_{j(k)}}, t^{i_{j(k)}})),$$

czyli

$$u(y^0, \bar{t}) \leqslant u(x^0, \bar{t}), \qquad (**)$$

gdyż funkcja użyteczności u jest ciągła. Z (*) i (**) wynika, że

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in N,\ \forall k \geqslant k_\varepsilon\ (U(\varepsilon; \bar{x}) \cap D(p^{i_{j(k)}}, I^{i_{j(k)}}) = \emptyset),$$

gdzie

$$U(\varepsilon; \bar{x}) = \{x \in R^n \mid \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}, \qquad D(p, I) = \{x \in R^n_+ \mid \langle p, x\rangle \leqslant I\}.$$

Otoczenie $U(\varepsilon; \bar{x})$ jest zbiorem otwartym w R^n, więc

$$\exists \theta \in (0, 1),\ \forall k \geqslant k_\varepsilon\ (\theta\bar{x} \notin D(p^{i_{j(k)}}, I^{i_{j(k)}})),$$

a stąd $\theta\bar{x} \notin D(\bar{p}, \bar{I})$, czyli $\theta\langle \bar{p}, \bar{x}\rangle > \bar{I}$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. ■

Przytoczony dowód jest wzorowany na dowodzie twierdzenia 1 w pracy [3], rozdz. II, § 6.

Zadanie (4) jest (dla ustalonego t) zadaniem programowania nieliniowego. Zgodnie z twierdzeniem Kuhna-Tuckera ([4], s. 44-45) koszyk x wtedy i tylko wtedy jest rozwiązaniem tego zadania, gdy istnieje taki mnożnik $\lambda > 0$, że para x, λ spełnia układ warunków:

$$\left\langle \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \lambda p, x \right\rangle = 0, \qquad (7)$$

$$\langle p, x\rangle = I. \qquad (8)$$

O koszyku x spełniającym warunek (8) mówimy, że leży na linii budżetowej (w chwili t). Zakładając, że rozwiązanie zadania (4) jest dodatnie i przedstawiając układ (5)-(6) w równoważnej postaci

$$\varphi_1(x, \lambda, p, I, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \lambda p = 0 \qquad (7')$$

(dla $x > 0$ warunek ten jest równoważny z (7)),

$$\varphi_2(x, \lambda, p, I, t) = I - \langle p, x\rangle = 0, \qquad (8')$$

widzimy, że (przy założeniu (**III**))

$$\varphi_1 \in C^1(R_+^{2n+2} \times T) \quad \text{oraz} \quad \varphi_2 \in C^\infty(R_+^{2n+2} \times T).$$

Macierz funkcyjna Jacobiego

$$J(x, p, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & -p^T \\ p & 0 \end{bmatrix}$$

ma $\forall x > 0$, $\forall p > 0$, $\forall t \in T$ wyznacznik różny od zera (hesjan $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ jest bowiem z założenia ujemnie określony, więc nieosobliwy). Spełnione są zatem warunki twierdzenia o układzie funkcji uwikłanych ([4], rozdz. IV, Dodatek E) i rozwiązanie układu (7′)-(8′) można w otoczeniu punktu (x, λ, p, I, t) przedstawić w postaci

$$x = \varphi(p, I, t),$$
$$\lambda = \varphi_0(p, I, t),$$

gdzie funkcje φ, φ_0 są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi w otoczeniu punktu (p, I, t). Wprawdzie dynamiczną funkcję popytu konsumpcyjnego φ zdefiniowaliśmy wcześniej, ale teraz znamy także procedurę jej ewentualnego analitycznego wyprowadzenia z funkcji użyteczności, poprzez rozwiązanie układu (7′)-(8′). Dalej zakładamy, że funkcja popytu φ jest gładka (ciągła, różniczkowalna) na obszarze określoności.

4. Wybrane własności dynamicznej funkcji popytu

***Własność* 1.** *W każdym momencie dynamiczna funkcja popytu jest dodatnio jednorodną stopnia* 0 *funkcją cen i dochodu*:

$$\forall p > 0, \forall I > 0, \forall \lambda > 0, \forall t \in T(\varphi(\lambda p, \lambda I, t) = \varphi(p, I, t)).$$

***Własność* 2.** *W każdym momencie wraz ze wzrostem dochodu rośnie popyt na przynajmniej jeden towar*:

$$\forall p > 0, \forall I > 0, \forall t \in T, \exists i \left(\frac{\partial \varphi_i(p, I, t)}{\partial I} > 0 \right).$$

***Własność* 3.** *W każdym momencie wraz ze wzrostem ceny pewnego towaru maleje popyt na przynajmniej jeden towar (niekoniecznie ten, którego cena wzrosła)*:

$$\forall p>0,\ \forall I>0,\ \forall t\in T,\ \forall i:\varphi_i>0,\ \exists j\left(\frac{\partial\varphi_j(p, I, t)}{\partial p_i}<0\right).$$

***Własność* 4.** *Jeżeli w chwili t wzrost ceny towaru wywołuje wzrost popytu na ten towar, to wraz ze wzrostem dochodu popyt na ten towar maleje*:

$$\forall p>0,\ \forall I>0,\ \forall t\in T\left(\frac{\partial\varphi_i(p, I, t)}{\partial p_i}>0\Rightarrow\frac{\partial\varphi_i(p, I, t)}{\partial I}<0\right).$$

Własność 1 bywa nazywana brakiem iluzji pieniądza i wynika wprost z definicji optymalnego koszyka towarów – rozwiązania zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji w chwili t:

$$\varphi(p, I, t)=\arg\max_{\substack{\langle p,x\rangle\leqslant I\\ x\geqslant 0}} u(x, t)=$$

$$=\arg\max_{\substack{\langle\lambda p,x\rangle\leqslant\lambda I\\ x\geqslant 0}} u(x, t)=\varphi(\lambda p, \lambda I, t)$$

dla dowolnej liczby $\lambda>0$.

Aby dowieść własności 2, załóżmy, że

$$u(\bar{x}, t)=\max u(x, t)$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle\leqslant I$$
$$x\geqslant 0.$$

W warunkach niedosytu koszyk optymalny $\bar{x}$ leży na linii budżetowej, tzn. spełnia warunek $\langle p, \bar{x}\rangle=I$.

Załóżmy, że dochód wzrósł do wysokości $I'>I$. Niech x' będzie nowym koszykiem optymalnym w chwili t, przy cenach p i dochodzie I':

$$u(x', t)=\max u(x, t)$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle \leqslant I'$$
$$x \geqslant 0.$$

Przypuśćmy, wbrew tezie, że $x' \leqslant \bar{x}$. Zatem

$$\langle p, x'\rangle \leqslant \langle p, \bar{x}\rangle = I < I',$$

czyli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że koszyk

$$\tilde{x} = (x'_1 + \varepsilon, x'_2, \ldots, x'_n) \geqq x'$$

spełnia warunek

$$\langle p, \tilde{x}\rangle \leqslant I'$$
$$\tilde{x} \geqslant 0,$$

zatem jest koszykiem dopuszczalnym (możliwym do nabycia przy cenach p i dochodzie I') oraz

$$u(\tilde{x}, t) > u(x', t),$$

zgodnie z postulatem niedosytu, co przeczy definicji koszyka x' i kończy dowód własności 2.

Podobnie, aby udowodnić własność 3, załóżmy najpierw, że przy cenach $p > 0$ i dochodzie $I > 0$:

$$u(\bar{x}, t) = \max u(x, t)$$

przy ograniczeniach

$$\langle p, x\rangle \leqslant I,$$

i w optymalnym koszyku $\bar{x}$ jego składowa i jest dodatnia. Weźmy wektor cen

$$p' = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p'_i, p_{i+1}, \ldots, p_n) > 0 \quad \text{z ceną} \quad p'_i > p_i.$$

Niech x' będzie koszykiem optymalnym przy tym samym dochodzie I i cenach p' różniących się od cen p składową i. Załóżmy, wbrew tezie, że $x' \geqslant \bar{x}$ (pamiętając, że $\bar{x}_i > 0$). Ponieważ $\langle \bar{p}, \bar{x}\rangle = I > 0$, $p' \geqq p$, $x' \geqslant \bar{x} \geqq 0$,

więc $\langle p', x' \rangle > I$, co jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód własności 3.

Własność 4 nosi nazwę paradoksu Giffena. Jej dowód jest bardziej złożony i można zapoznać się z nim w pracy [4], s. 50-55 (należy statyczną funkcję popytu zastąpić jej wersją dynamiczną).

Definicja 1.10

(i) Elementy $\varepsilon^c_{jj}(p, I, t)$, dla $j=1, \ldots, n$, na głównej przekątnej macierzy funkcyjnej

$$\varepsilon^c(p, I, t) = \left(\frac{\partial \varphi_i(p, I, t)}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{\varphi_i(p, I, t)} \right)_{n,n}$$

nazywamy prostymi elastycznościami cenowymi popytu w chwili t. Elementy $\varepsilon^c_{jj}(p, I, t)$, dla $i \neq j$, poza główną przekątną nazywamy elastycznościami krzyżowymi popytu w chwili t.

(ii) Wyrażenie

$$\varepsilon^d_j(p, I, t) = \frac{\partial \varphi_j(p, I, t)}{\partial I} \cdot \frac{I}{\varphi_j(p, I, t)},$$

dla $j=1, \ldots, n$, nazywamy elastycznością dochodową popytu na towar j w chwili t. ▲

W świetle tej definicji towary na rynku w każdej chwili dzielą się na:
- towary normalne wyższego rzędu ($\varepsilon^c_{jj} < 0$, $\varepsilon^d_j > 0$),
- towary normalne niższego rzędu ($\varepsilon^c_{jj} < 0$, $\varepsilon^d_j < 0$),
- towary Giffena niższego rzędu ($\varepsilon^c_{jj} > 0$, $\varepsilon^d_j < 0$).

Własność 4 wyklucza z rynku towary Giffena wyższego rzędu.

5. Teoria popytu i sterowanie optymalne

Problem optymalizacyjny, z którym mamy do czynienia w definicji funkcji popytu konsumpcyjnego (4), jest sformułowanym w terminach dynamicznej funkcji użyteczności zadaniem wyboru preferowanego (w rozumieniu definicji 3 (i)) koszyka towarów x w chwili t (koszyka (x, t)) w wypukłym zbiorze $D(p, I)$. Podobnie można sformułować zadanie wyboru koszyka towarów preferowanego (w myśl definicji 3 (ii)) w zbiorze $D(p, I)$ w horyzoncie $T=[0, t_1]$:

znaleźć

$$\max u(x, t) \tag{9}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} &\langle p, x\rangle \leqslant I, \\ &x \geqslant 0, \\ &t \in T, \end{aligned} \tag{10}$$

które łatwo uogólnić (zastępując wektor cen $p>0$ i dochód $I>0$ ciągłymi trajektoriami cen p_T i dochodu I_T) do zadania:
znaleźć

$$\max u(x, t) \tag{9'}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} &\langle p(t), x\rangle \leqslant I(t), \\ &x \geqslant 0, \\ &t \in T. \end{aligned} \tag{10'}$$

Przy założeniach (**III**)-(**V**) i ograniczonym horyzoncie T (z momentem końcowym $t_1 < +\infty$) zadanie (9)-(10) ma $\forall p>0, \forall I>0$ jednoznaczne rozwiązanie $(\bar{x}, \bar{t})$. Podobnie przy tych samych założeniach i dodatkowym założeniu ciągłości trajektorii cen p_T i dochodu I_T jednoznaczne jest rozwiązanie $(\bar{x}, \bar{t})$ zadania (9')-(10'). W obu rozwiązaniach $\bar{x}$ oznacza optymalny koszyk towarów w horyzoncie T, natomiast $\bar{t}$ – optymalny moment jego nabycia przez konsumenta.

Zarówno statyczna funkcja popytu

$$\varphi(p, I) = \arg \max_{\substack{\langle p, x\rangle \leqslant I \\ x \geqslant 0 \\ t \in T}} u(x, t)$$

związana z zadaniem (9)-(10), jak i funkcjonał popytu

$$\varphi(p_T, I_T) = \arg \max_{\substack{\langle p(t), x\rangle \leqslant I(t) \\ x \geqslant 0 \\ t \in T}} u(x, t)$$

związany z zadaniem (9')-(10') są odwzorowaniami dodatnio jednorodnymi stopnia 0.

Zadania obrazują sytuację, gdy konsument decyduje się na jednorazowy zakup towarów w horyzoncie T, przy czym w drugim zadaniu ceny i dochód konsumenta mogą zmieniać się w czasie. Rzeczywistość jest bogatsza. W rzeczywistości nawet przy założeniu, że na zakupy przeznaczamy jednorazowo pewien dochód $I>0$, możemy je w horyzoncie T rozłożyć w czasie. Prowadzi to do następującego zadania:
znaleźć

$$\max \int_T u(x(t), t)\,dt \tag{11}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} &\int_T \langle p(t), x(t)\rangle\,dt \leqslant I, \\ &x(t) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Dalej zakładamy, że trajektoria cen p_T oraz (w następnych zadaniach, o których mowa w tym punkcie) trajektoria dochodu I_T są ciągłe na obszarze określoności:

(VI) $\qquad p \in C^0(T), \qquad I \in C^0(T).$

Przy założeniach **(III)**-**(VI)** zadanie (11)-(12) (z trajektorią dochodu $I(t)=I=\text{const}>0$) ma rozwiązanie. Jest nim określona na T trajektoria konsumpcji (ogólnie – przedziałami ciągła):

$$x_T^* = \arg \max_{\substack{\int_T \langle p(t), x(t)\rangle\,dt \leqslant I \\ x(t)\geqslant 0}} \int_T u(x(t), t)\,dt = \varphi(p_T, I). \tag{13}$$

Funkcja (13) związana z zadaniem (11)-(12) ma własności podobne do własności 1-4 standardowej dynamicznej funkcji popytu (4):

- funkcjonał (13) jest dodatnio jednorodny stopnia 0:

  $$\forall p_T>0,\ \forall I>0,\ \forall \lambda>0\ (\varphi(p_T, I)=\varphi(\lambda p_T, \lambda I)),$$

- gdy rośnie dochód, wówczas (w pewnym horyzoncie $T'=(\tau_0, \tau_1)\subseteq T$) rośnie popyt na przynajmniej jeden towar,
- gdy rośnie cena pewnego towaru, wtedy (w pewnym horyzoncie $T'=(\tau_0, \tau_1)\subseteq T$) maleje popyt na przynajmniej jeden towar,
- jeżeli wraz ze wzrostem ceny towaru (w pewnym horyzoncie) rośnie popyt na ten towar, to wraz ze wzrostem dochodu popyt na ten towar maleje.

Przyjrzyjmy się bliżej zadaniu (11)-(12). Zauważmy przede wszystkim, że w rozwiązaniu tego zadania nierówność całkowa w układzie (12) jest spełniona jako równanie:

$$\int_T \langle p(t), x(t)\rangle dt = I \tag{14}$$

(wynika to natychmiast z postulatu niedosytu; funkcja użyteczności jest rosnącą funkcją zmiennej x).

Wprowadźmy zatem dodatkową zmienną

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t \langle p(\theta), x(\theta)\rangle dt$$

i zapiszmy zadanie (11)-(12) w równoważnej postaci:
znaleźć

$$\max \int_T u(x(t), t)dt \tag{11'}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{n+1}(t) = \langle p(t), x(t)\rangle, \\ &x(t) \geqslant 0, \\ &x_{n+1}(0) = 0, \\ &x_{n+1}(t_1) = I, \end{aligned} \tag{12'}$$

gdzie, przypomnijmy, $T = [0, t_1]$. Jest to standardowe niestacjonarne zadanie sterowania optymalnego, w którym trajektoria konsumpcji x_T gra rolę sterowania, a funkcja skalarna $x_{n+1} : T \to R^1_+$ rolę trajektorii stanów.

O funkcji użyteczności zakładamy, że spełnia założenia (**III**)-(**V**), a ponadto

(VII) $$\lim_{x \to 0+} \frac{\partial u(x)}{\partial x} = +\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0.$$

Korzystając z warunków optymalności L.S. Pontriagina ([5], rozdz. 7) stwierdzamy, że trajektoria x^*_T wtedy i tylko wtedy jest rozwiązaniem naszego zadania, gdy istnieje taka stała $\lambda > 0$, że w każdym momencie $t \in T$:

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}\right|_{x = x^*(t)} = \lambda p_i(t) \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n$$

oraz zachodzi warunek

$$\int_T \langle p(t), x^*(t) \rangle \, dt = I$$

(por. (14)). Równania te są dynamiczną wersją warunków Kuhna-Tuckera (7)-(8) w klasycznym zadaniu maksymalizacji użyteczności konsumpcji.

Dla ilustracji rozpatrzmy następujące proste zadanie:

znaleźć

$$\max \int_T x^\alpha(t) \, dt$$

przy ograniczeniach

$$\int_T p_0 e^{\gamma t} x(t) \, dt \leqslant I,$$

$$x(t) \geqslant 0, \; t \in T,$$

gdzie $T=[0, t_1]$ ($\gamma>0$ jest stopą wzrostu cen, $\alpha \in (0, 1)$), które jest równoważne z zadaniem:

znaleźć

$$\max \int_T x^\alpha(t) \, dt$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}_1(t) = p_0 e^{\gamma t} x(t)$$

$$x(t) \geqslant 0, \; t \in T,$$

$$x_1(0) = 0,$$

$$x_1(t_1) = I.$$

Jego rozwiązanie spełnia układ dwóch równań:

$$\alpha x^{\alpha-1}(t) = \lambda p_0 e^{\gamma t},$$

$$\int_0^{t_1} p_0 e^{\gamma t} x(t) \, dt = I,$$

skąd otrzymujemy trajektorię

$$x^*(t) = A e^{\frac{\nu}{\alpha-1} t} \tag{15}$$

z parametrem

$$A = \left(\frac{\lambda p_0}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \tag{16}$$

gdzie

$$\lambda=\frac{\alpha}{p_0}\left\{\frac{\alpha v I}{(1-\alpha)p_0}\left(1-e^{\frac{\alpha v}{\alpha-1}t_1}\right)\right\}^{1-\alpha}>0.$$

W zadaniu (12)-(13) jednorazowy dochód I służył do wielokrotnych zakupów w ustalonym horyzoncie T (aż do wyczerpania dochodu). Obecnie, na zakończenie, sformułujemy dynamiczne zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji ze zmiennym, uzyskiwanym przez konsumenta w każdym momencie $t\in T$, dochodem $I(t)$, który można kumulować w czasie w tym sensie, że dochód niewydatkowany w chwili t można przeznaczyć na zakupy w przyszłości:
znaleźć

$$\max \int_T u(x(t), t)\,dt \tag{17}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle p(\theta), x(\theta)\rangle\,d\theta \leqslant \int_0^t I(\theta)\,d\theta,\\ &x(t)\geqslant 0,\ t\in T.\end{aligned} \tag{18}$$

Przy założeniach (**III**)-(**VII**) zadanie to ma rozwiązanie:

$$x_T^*=\arg \max_{\substack{\int_\tau (I(\theta)-\langle p(\theta),x(\theta)\rangle)\,d\theta\geqslant 0\\ x(t)\geqslant 0,\\ t\in T,}} \int_T u(x(t),t)\,dt=\varphi(p_T, I_T),$$

w którym funkcjonował φ, tak jak w (13), ma własności podobne do standardowej dynamicznej funkcji popytu (4).

Przyjmując oznaczenie

$$x_{n+1}(t)=\int_0^t (I(\theta)-\langle p(\theta), x(\theta)\rangle)\,d\theta$$

zadanie (17)-(18) możemy przedstawić w równoważnej postaci:
znaleźć

$$\max \int_T u(x(t), t)\,dt \tag{17'}$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}_{n+1}(t) = I(t) - \langle p(t), x(t) \rangle,$$
$$x(t) \geqslant 0, \; x_{n+1}(t) \geqslant 0,$$
$$t \in T, \tag{18'}$$
$$x_{n+1}(0) = 0,$$
$$x_{n+1}(t_1) = I^1,$$

gdzie $I^1 = \int_T I(t)\,dt > 0, \quad T = [0, t_1]$.

Jego rozwiązanie ma postać podobną do rozwiązania zadania (11')-(12'). Na przykład, zapisując zadanie:
znaleźć

$$\max \int_T x^{\alpha}(t)\,dt$$

przy ograniczeniach

$$\int_0^t p_0 e^{v\theta} x(\theta)\,d\theta \leqslant \int_0^t (a + b\theta)\,d\theta,$$
$$x(t) \geqslant 0, \; t \in T$$

(z dodatnimi parametrami a, b i parametrem $\alpha \in (0, 1)$) w równoważnej postaci:
znaleźć

$$\max \int_T x^{\alpha}(t)\,dt$$

przy ograniczeniach

$$\dot{x}(t) = (a + bt) - p^0 e^{vt} x(t),$$
$$x(t) \geqslant 0, \; x_1(t) \geqslant 0,$$
$$t \in T,$$
$$x_1(0) = 0,$$
$$x_1(t_1) = I^1,$$

gdzie

$$I^1 = \int_T (a+bt)\,dt = at_1 + \frac{1}{2}bt_1^2 > 0,$$

i korzystając z warunków optymalności ([5], rozdz. 7), otrzymujemy optymalną trajektorię (15) z parametrem A postaci (16), w którym

$$\lambda = \frac{\alpha}{p_0}\left\{\frac{\alpha v\left(at_1 + \frac{1}{2}bt_1^2\right)}{(1-\alpha)p_0}\left(1 - e^{\frac{\alpha v}{\alpha - 1}t_1}\right)\right\}^{1-\alpha}.$$

Literatura

[1] Debreu G., *Theory of Value*, Cowles Foundation Monograph, 17, John Wiley and Sons, New York 1959.
[2] Ekeland I., *Eléments d'économie mathématique*, Hermann, Paris 1979.
[3] Malinvaud E., *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, Paris 1975.
[4] Panek E., *Elementy ekonomii matematycznej: Statyka*, WN PWN, Warszawa 1993.
[5] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2003.

DYNAMIC DEMAND THEORY AND OPTIMAL CONTROL

Summary

The paper presents foundations of dynamic preference and dynamic demand theory, in the case when static commodity space in the economy is replaced with dynamic commodity space.

As a result static consumption utility maximisation problem can be transformed to some optimal control problem.