JERZY MARCINKOWSKI

# SIECIOWE MODELE ROZDZIAŁU ŚRODKÓW W WARUNKACH RYZYKA

## 1. Wstęp

Rozważmy przedsięwzięcie opisane siecią kanoniczną $G=[P, U]$ typu CŁ o $n$ wierzchołkach i $m$ łukach. Obciążenia łuków stanowią czasy wykonania czynności skojarzonych z łukami, będące realizacjami ciągłych nieujemnych zmiennych losowych. Przy przyjętych założeniach czas wykonania przedsięwzięcia jest realizacją zmiennej losowej, której trudno wyznaczalny typ rozkładu jest różny od rozkładów czasu wykonywania czynności, nawet jeżeli z każdą czynnością związany jest identyczny typ rozkładu ([3], [4], [5]). Załóżmy, że ponosząc dodatkowe koszty na realizację czynności, możemy wpłynąć na wartości parametrów (ale nie typ) rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której realizacja określa czas wykonania czynności. Będą nas interesować rozkłady, dla których istnieje wartość oczekiwana i wariancja. Zmieniając wartości parametrów rozkładów czasów trwania czynności poprzez ponoszenie dodatkowych nakładów na ich wykonanie, można sterować wartościami parametrów rozkładu prawdopodobieństwa czasu realizacji przedsięwzięcia. W artykule będziemy rozważać przypadek sterowania wartością oczekiwaną czasu wykonania przedsięwzięcia poprzez zmianę wartości parametrów rozkładów czasów realizacji czynności. W analizie uwzględnimy poziom niezawodności realizacji czynności jako dodatkowy warunek ograniczający.

## 2. Modele alokacji środków w sieciach o losowych czasach wykonywania czynności

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $E(X_{ij})$ – oczekiwany czas realizacji czynności $\langle i, j\rangle$, $E(X)$ – oczekiwany czas realizacji przedsięwzięcia, $D^2(X_{ij})$ – wariancja czasu trwania czynności $\langle i, j\rangle$, $D^2(X)$ – wariancja czasu realizacji

przedsięwzięcia, $T_i$ – moment zajścia zdarzenia $i$ $(i=1,\ldots,n)$, $k_{ij}$ – koszt poniesiony na zmianę charakterystyk rozkładu czynności $\langle i, j\rangle$, $K$ – całkowity koszt, jaki możemy ponieść w celu zmodyfikowania wartości parametrów rozkładów czynności.

Założenie o wpływie poniesionych kosztów na charakterystyki czynności możemy bardziej formalnie ująć w następujący sposób. Niech $E(X_{ij})$ i $D^2(X_{ij})$ będą funkcjami $k_{ij}$, tzn. dla każdego $\langle i, j\rangle \in U$ określmy jednojednoznaczne funkcje $f_{ij}$ oraz $g_{ij}$ takie, że

$$E(X_{ij})=f_{ij}(k_{ij}) \quad \text{i} \quad D^2(X_{ij})=g_{ij}(k_{ij}). \tag{2.1}$$

Wobec założenia o jednojednoznaczności $k_{ij}=f_{ij}^{-1}(E(X_{ij}))$ oraz $k_{ij}=g_{ij}^{-1}(D^2(X_{ij}))$[1].

O funkcjach $f_{ij}$ i $g_{ij}$ zakładamy, że

– są one funkcjami nierosnącymi,

– funkcje $f_{ij}$ są określone w przedziale $\langle m'_{ij}, m''_{ij}\rangle$, a funkcje $g_{ij}$ w przedziale $\langle d'_{ij}, d''_{ij}\rangle$, gdzie $m'_{ij}, d'_{ij} \geqslant 0$.

Postulaty te mają dość oczywistą interpretację ekonomiczną. Ponosząc zwiększone koszty na realizację czynności, spodziewamy się, że wpłynie to na zmniejszenie się jej oczekiwanego czasu realizacji – ale tylko w pewnych technologicznie określonych granicach – oraz na zmniejszenie ryzyka związanego z jej realizacją mierzonego wariancją.

Niekoniecznie $f_{ij}^{-1}(m'_{ij})$ i $g_{ij}^{-1}(d'_{ij})$ muszą być równe zeru. Oznacza to, że dopiero przekroczenie pewnej progowej wielkości kosztu zaczyna wywierać wpływ na zmniejszenie wartości oczekiwanej lub wariancji. Przedziały kosztów odpowiadające przedziałom $\langle m'_{ij}, m''_{ij}\rangle$, $\langle d'_{ij}, d''_{ij}\rangle$ nie muszą się pokrywać, co oznacza, że np. ponoszenie dodatkowych kosztów może już nie wpływać na zmniejszenie wartości oczekiwanej, ale będzie wpływać na zmniejszenie wariancji lub odwrotnie.

Możliwość zmiany wartości parametrów rozkładów prawdopodobieństwa czasów wykonywania czynności prowadzi do postawienia następujących problemów:

– w jaki sposób dokonać alokacji środków pomiędzy czynności, ponosząc koszty w wysokości co najwyżej $K$, w celu minimalizacji wartości oczekiwanej czasu realizacji przedsięwzięcia,

– jakie minimalne koszty należy ponieść, aby oczekiwany czas realizacji przedsięwzięcia był równy pewnemu dyrektywnemu czasowi $T$.

Próbując znaleźć rozwiązanie pierwszego zagadnienia, sformułujemy kilka deterministycznych problemów programowania matematycznego, których roz-

[1] Powyższe zapisy nie są zbyt precyzyjne, gdyż ponosząc dodatkowy koszt nie wpływamy bezpośrednio na wartość oczekiwaną i wariancję, lecz wpływamy na zmienną losową $X_{ij}$, modyfikując parametry czynności określone przez tę zmienną. Za wykorzystaniem zaproponowanej notacji przemawia znaczne uproszczenie zapisu.

wiązania stanowią oszacowania z dołu wartości rozwiązań interesującego nas problemu, a następnie przeprowadzimy dyskusję otrzymanych wyników na gruncie założeń stochastycznych określających warunki realizacji przedsięwzięcia.

Rozważmy następujący problem optymalizacyjny:

$$\min T_n, \tag{2.2}$$

$$T_j - T_i \geqslant E(X_{ij}) \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.3}$$

$$E(X_{ij}) = f_{ij}(k_{ij}), \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.4}$$

$$\sum_{\langle i, j\rangle \in U} k_{ij} \leqslant K, \tag{2.5}$$

$$m'_{ij} \leqslant E(X_{ij}) \leqslant m''_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U. \tag{2.6}$$

Funkcja celu postuluje minimalizację czasu zajścia ostatniego zdarzenia, tj. czasu realizacji przedsięwzięcia. Dokonując minimalizacji zakłada się, że czasy trwania czynności są równe ich wartościom oczekiwanym. Warunki (2.3) określają czasowe zależności pomiędzy momentami zajścia zdarzeń dane przez czasy wykonywania czynności i relacje następstwa określone pomiędzy zdarzeniami. Minimalizacja $T_n$ następuje drogą zmniejszenia oczekiwanych czasów realizacji czynności (2.4) poprzez ponoszenie nakładów w wysokości co najwyżej $K$ (2.5). Warunki (2.3) oznaczają, że oczekiwany czas realizacji przedsięwzięcia jest wyznaczany jako suma oczekiwanych czasów realizacji czynności leżących na ścieżce krytycznej[2].

Dla dowolnych funkcji $f_{ij}$ postawiony problem jest nieliniowym problemem programowania matematycznego, trudnym do rozwiązania, o ile nie przyjmie się pewnych założeń odnośnie do własności funkcji $f_{ij}$. Łatwo sprawdzić, że w przypadku gdy $f_{ij}$ są funkcjami wypukłymi, przedstawiony problem staje się problemem programowania wypukłego[3]. Istotnie, przedstawmy (2.2)-(2.6) w następującej postaci:

$$\max -T_n, \tag{2.7}$$

$$T_j - T_i - f_{ij}(k_{ij}) \geqslant 0, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.8}$$

$$K - \sum_{\langle i, j\rangle \in U} k_{ij} \geqslant 0, \tag{2.9}$$

$$k'_{ij} \leqslant k_{ij} \leqslant k''_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.10}$$

[2] Zaproponowany sposób wyznaczania wartości oczekiwanej czasu realizacji przedsięwzięcia prowadzi do otrzymywania zaniżonej oceny jej wartości ([3], [4], [5]). Stąd $T_n$ jest oszacowaniem od dołu nieznanej i trudno wyznaczalnej wartości $E(X)$.

[3] Problemem programowania wypukłego nazywamy problem: $f(x) \to \max$, $g_i(x) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, gdzie $f, g_1, \ldots, g_m$ są funkcjami wklęsłymi. Problem ten sprowadza się do maksymalizacji funkcji wklęsłej (lub minimalizacji funkcji wypukłej) na zbiorze wypukłym.

gdzie:

$$k'_{ij}=f_{ij}^{-1}(m''_{ij}), \qquad k''_{ij}=f_{ij}^{-1}(m'_{ij}).$$

Monotoniczność funkcji $f_{ij}$ umożliwia przejście od (2.6) do (2.10). Wartości $k'_{ij}$ niekoniecznie muszą być równe zeru, co interpretujemy w ten sposób, że dopiero poniesienie nakładów większych od progowych (równych $k'_{ij}$) wywiera wpływ na parametry rozkładów czynności.

Jeżeli funkcje $f_{ij}$ są wypukłe, to po lewej stronie nierówności (2.8) i (2.9) wszystkie funkcje są wklęsłe. Istotnie, ze względu na wypukłość $f_{ij}$, funkcje $-f_{ij}$ są wklęsłe, $T_j-T_i$ jako funkcja liniowa jest wklęsła, a liniowa kombinacja funkcji wklęsłych jest, jak łatwo dowieść, funkcją wklęsłą, co dowodzi wklęsłości (2.8). Liniowość (2.9) gwarantuje ich wklęsłość, funkcja celu jako funkcja liniowa jest wklęsła, co dowodzi, że przedstawiony problem jest problemem programowania wypukłego[4].

Przyjęcie założenia o wypukłości $f_{ij}$ jest zupełnie naturalne. Funkcje $f_{ij}$ są malejącymi funkcjami $k_{ij}$, a poza tym oczekujemy, że ponoszenie coraz wyższych kosztów wpływa w coraz mniejszym stopniu na spadek wartości $E(X_{ij})$, co jest założeniem odpowiadającym założeniu o malejącej krańcowej efektywności nakładów powszechnie akceptowanym w klasycznej mikroekonomii. Oznacza to, że $f'(k_{ij})<0$, a $f''(k_{ij})>0$ dla $k_{ij}\in\langle k'_{ij}, k''_{ij})$, co implikuje wypukłość $f_{ij}$.

Zauważmy, że rozwiązanie problemu (2.2)-(2.6) daje tylko przybliżoną odpowiedź na pierwsze postawione pytanie z uwagi na niedoszacowanie przez $T_n$ wartości $E(X)$ ([2], [3], [4]). Rozwiązanie daje odpowiedź zbyt optymistyczną w tym sensie, że koszt, jaki trzeba by ponieść, aby oczekiwany czas realizacji przedsięwzięcia był równy $T_n$, musiałby być większy od $\sum_{\langle i,j\rangle\in U} k_{ij}$. Niedoszacowanie to zależy od typu rozkładu czynności, wartości jego parametrów i struktury sieci.

**Przykład 2.1.**

Załóżmy, że czas realizacji czynności $\langle i, j\rangle$ jest zmienną losową o parametrach $E(X_{ij})=m_{ij}$, $D^2(X_{ij})$. Ponadto niech $f_{ij}$ będą funkcjami postaci:

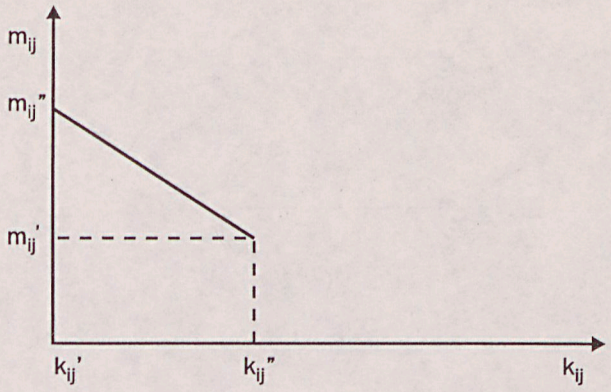
$$m_{ij}=\alpha_{ij}k_{ij}+\beta_{ij}, \qquad \alpha_{ij}<0, \ \beta_{ij}=m''_{ij}. \tag{2.11}$$

Jeżeli $\beta_{ij}=m''_{ij}$, to dla $k_{ij}=0$, $m_{ij}=m''_{ij}$. Z uwagi na ujemność parametru $\alpha_{ij}$ wzrost wartości $k_{ij}$ powoduje spadek wartości $m_{ij}$, co ilustruje rysunek 1[5].

---

[4] Wątpliwość może budzić niewypukłość zbioru, na którym zostały określone funkcje $f_{ij}$. W celu jej usunięcia wystarczy zauważyć, że każdą z funkcji $f_{ij}$ można określić nie w przedziale $\langle k'_{ij}, k''_{ij}\rangle$, a w $R^+\cup\{0\}$, przyjmując że $f_{ij}(k_{ij})=f_{ij}(k'_{ij})$ dla $k_{ij}\leqslant k'_{ij}$ i $f_{ij}(k_{ij})=f_{ij}(k''_{ij})$ dla $k_{ij}\geqslant k''_{ij}$.

[5] Zauważmy, że nie określamy typu rozkładu czasu wykonania czynności.




Rys. 1

Problem (2.2) - (2.6) przyjmie przy założeniu liniowości funkcji $f_{ij}$ następującą postać:

$$\min T_n,$$

$$T_j - T_i \geqslant m_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.12}$$

$$m_{ij} = \alpha_{ij} k_{ij} + \beta_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.13}$$

$$\sum_{\langle i, j\rangle \in U} k_{ij} \leqslant K, \tag{2.14}$$

$$m'_{ij} \leqslant m_{ij} \leqslant m''_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in U. \tag{2.15}$$

Podstawiając (2.13) do (2.12), przyjmując $\beta_{ij} = m''_{ij}$ i zastępując w (2.15) $m_{ij}$ przez (2.11), otrzymujemy następujący równoważny problem programowania liniowego:

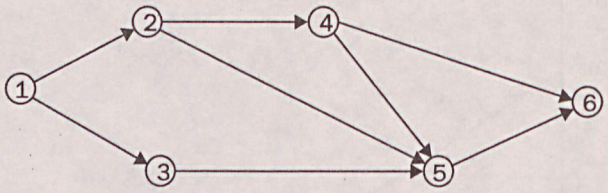
$$\min T_n,$$

$$T_j - T_i - \alpha_{ij} k_{ij} \geqslant m''_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in U, \tag{2.16}$$

$$\sum_{\langle i, j\rangle \in U} k_{ij} \leqslant K, \tag{2.17}$$

$$\alpha_{ij} k_{ij} \geqslant m'_{ij} - m''_{ij}, \quad \langle i, j\rangle \in U. \tag{2.18}$$

Na rysunku 2 przedstawiono przykładową sieć, a w tabeli 1 wartości parametrów czynności sieci, dla której przeprowadzono obliczenia ilustrujące zależność pomiędzy wartością parametru $K$ a $T_n$, tj. oszacowaniem od dołu oczekiwanego czasu realizacji przedsięwzięcia. Wyniki obliczeń umieszczono w tabeli 2.




Rys. 2

Tabela 1

| Lp. | Czynność | $m''_{ij}$ | $m'_{ij}$ | $m'_{ij}-m''_{ij}$ | $\alpha_{ij}$ | $(m''_{ij}-m'_{ij})/\alpha_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\langle 1,2\rangle$ | 5 | 3 | −2 | −0,5 | 4 |
| 2 | $\langle 1,3\rangle$ | 5 | 4 | −1 | −0,3 | 5,33 |
| 3 | $\langle 2,4\rangle$ | 8 | 6 | −2 | −0,2 | 10 |
| 4 | $\langle 2,5\rangle$ | 4 | 2 | −2 | −0,4 | 5 |
| 5 | $\langle 3,5\rangle$ | 4 | 3 | −1 | −0,2 | 5 |
| 6 | $\langle 4,5\rangle$ | 3 | 2 | −1 | −0,5 | 2 |
| 7 | $\langle 4,6\rangle$ | 6 | 4 | −2 | −0,4 | 5 |
| 8 | $\langle 5,6\rangle$ | 5 | 3 | −2 | −0,3 | 6,66 |

W ostatniej kolumnie tabeli 1 podano maksymalne koszty, jakie warto ponosić na zmniejszanie wartości $m_{ij}$, tj. koszty odpowiadające zmniejszeniu wartości $m_{ij}$ z $m''_{ij}$ do $m'_{ij}$.

Dokonajmy analizy wyników obliczeń przedstawionych w tabeli 2. Zauważmy, że wraz ze wzrostem kosztu całkowitego rośnie liczba ścieżek krytycznych. W momencie kiedy nie ma już możliwości skrócenia ścieżek krytycznych, dalszy wzrost wartości $K$ nie spowoduje już obniżenia wartości $T_n$. Może on jednak spowodować zmniejszenie wartości $E(X)$ poprzez skrócenie ścieżek niekrytycznych, tj. zmniejszenie wkładu, jaki one wnoszą w wartość $E(X)$ ([4], [5]). W naszym przypadku $T_n$ osiąga wartość minimalną równą 14 dla $K=25{,}37$.

Zauważmy, że na zmianę wartości $T_n$ najbardziej wpływają początkowe zmiany wartości $K$. Można oczekiwać, że w przypadku funkcji $f_{ij}$, dla których $\alpha_{ij}$ przyjmowałyby duże wartości bezwzględne, efekt ten byłby bardziej widoczny – chociaż oczywiście zależy to także od struktury sieci, relacji pomiędzy $m'_{ij}$ a $m''_{ij}$ dla jednej czynności, a także relacji pomiędzy wartościami tych parametrów pomiędzy poszczególnymi czynnościami.

Rozważmy teraz drugie ze sformułowanych zagadnień. Przybliżoną odpowiedź na postawione pytanie można uzyskać rozwiązując następujący problem optymalizacyjny:

Tabela 2

| $K$ | 2,5 | | 5 | | 10 | | 15 | | 20 | | 25 | | 25,37 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 19,75 | | 18,50 | | 16,87 | | 15,87 | | 14,89 | | 14,03 | | 14,00 | |
| Czynność | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ | $m_{ij}$ | $k_{ij}$ |
| ⟨1,2⟩ | 3,75 | 2,5 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| ⟨1,3⟩ | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 | 5 | 0 |
| ⟨2,4⟩ | 8 | 0 | 8 | 0 | 7,87 | 0,67 | 6,87 | 5,67 | 6 | 10 | 6 | 10 | 6 | 10 |
| ⟨2,5⟩ | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| ⟨3,5⟩ | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| ⟨4,5⟩ | 3 | 0 | 2,5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ⟨4,6⟩ | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 5,89 | 0,29 | 5,03 | 2,43 | 5 | 2,5 |
| ⟨5,6⟩ | 5 | 0 | 5 | 0 | 4 | 3,33 | 4 | 3,33 | 3,89 | 3,71 | 3,03 | 6,57 | 3 | 6,87 |

$$\min \sum_{\langle i,j\rangle \in U} f_{ij}^{-1}(E(X_{ij})), \tag{2.19}$$

$$T_j - T_i \geqslant E(X_{ij}), \qquad \langle i,j\rangle \in U, \tag{2.20}$$

$$m'_{ij} \leqslant E(X_{ij}) \leqslant m''_{ij}, \qquad \langle i,j\rangle \in U, \tag{2.21}$$

$$T_n \leqslant T. \tag{2.22}$$

Jeżeli funkcje $f_{ij}$ są funkcjami wypukłymi, to – jak łatwo sprawdzić – funkcje $f_{ij}^{-1}$ są także wypukłe, co implikuje, że przedstawiony problem jest problemem programowania wypukłego z uwagi na to, że suma funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą, co dowodzi wypukłości funkcji celu przy liniowości warunków (2.20) - (2.22)[6], która implikuje ich wklęsłość.

Oznaczmy przez $T^{\min}$ i $T^{\max}$ czasy realizacji przedsięwzięcia wyznaczane przy warunku, że oczekiwany czas realizacji jest równy długości najdłuższej ścieżki pełnej, przyjmując, że czasy trwania czynności są równe ich wartościom oczekiwanym w przypadku nieponiesienia żadnych nakładów na skracanie czynności i gdy poniesiono maksymalne nakłady. Dla $T_n < T^{\min}$ otrzymamy problem sprzeczny, a dla $T_n > T^{\max}$ warunek (2.22) można pominąć, gdyż przestaje on ograniczać zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Wynika stąd, że $T$ powinno się znajdować w przedziale $\langle T^{\min}, T^{\max}\rangle$, którego krańce bardzo łatwo wyznaczyć[7].

[6] Minimalizacja funkcji wypukłej na zbiorze wypukłym przy liniowości warunków ograniczających jest zadaniem, którego rozwiązanie nie nastręcza specjalnych trudności obliczeniowych, w szczególności gdy np. funkcja kryterium jest (nieujemną) formą kwadratową.

[7] Wystarczy w tym celu, stosując metodę CPM, wyznaczyć $T_n$, przyjmując odpowiednio, że czas trwania czynności jest równy $m'_{ij}$ i $m''_{ij}$.

Ze względu na niedoszacowanie przez $T_n$ wartości $E(X)$, koszt, jaki trzeba by ponieść w celu otrzymania rozwiązania, w którym wartość ta jest wyznaczona prawidłowo, musi być wyższy od wyznaczonego przez funkcję celu.

Można postawić pytanie, jakie są wielkości niedoszacowań. Trudno tutaj niestety o precyzyjną odpowiedź. Wartość tego niedoszacowania (zarówno wartości oczekiwanej przez $T_n$ w przypadku problemu (2.2)-(2.6), jak i kosztu przez $\sum_{\langle i,j\rangle \in U} f_{ij}^{-1}(E(X_{ij}))$ w przypadku problemu (2.19)-(2.22)) zależy od wielu czynników takich, jak: typ rozkładu zmiennych losowych $X_{ij}$, wartości parametrów, struktura sieci – w szczególności stosunku długości i liczby ścieżek krytycznych do ścieżek pozostałych. Dla każdej sieci waga wymienionych czynników jest różna, co dodatkowo utrudnia analizę problemu.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się jedynie do następujących uwag. Jeżeli przy założeniu, że $E(X_{ij})=m''_{ij}$, istnieje jedna ścieżka krytyczna wyraźnie dłuższa od pozostałych ścieżek pełnych, wariancje czynności są małe (w każdym razie nie istotnie większe) od wariancji czynności krytycznych, ponadto wariancje (zwłaszcza czynności niekrytycznych) są szybko malejącymi funkcjami kosztów, to można oczekiwać, że niedoszacowanie jest małe. Istotnie, jeżeli jedna ścieżka jest znacznie dłuższa od pozostałych, to oszacowanie wartości oczekiwanej czasu realizacji przedsięwzięcia przez długość ścieżki krytycznej (tj. oszacowanie $E(X)$ przez $T_n$) jest w miarę dokładne (zwłaszcza, gdy wariancje ścieżek niekrytycznych są małe), [4]. W problemie (2.2)-(2.6) postuluje się minimalizację $T_n$ poprzez skracanie najdłuższych ścieżek przez zmniejszanie wartości $E(X_{ij})$ drogą ponoszenia dodatkowych kosztów. Powoduje to zwiększenie wpływu innych ścieżek na wartość $E(X)$, a więc pogorszenie szacunku $E(X)$ przez $T_n$. Z drugiej strony, jeżeli $D^2(X_{ij})$ są mocno malejącymi funkcjami $k_{ij}$, to zmniejszenie wariancji czasu realizacji ścieżek wpłynie na zmniejszenie niedoszacowania, niwelując wyżej wspomniany efekt zmniejszający niedoszacowanie, a niekiedy przeważając nad nim. Im dłuższe są przedziały $\langle m'_{ij}, m''_{ij}\rangle$, tym w wyniku zmniejszania się wartości $E(X_{ij})$ stosunek liczby ścieżek krytycznych do pozostałych będzie większy (co może się przyczynić do powiększenia niedoszacowania).

Obecnie podejmiemy próbę uwzględnienia, jako dodatkowego warunku ograniczającego, pewnej miary ryzyka związanej z realizacją czynności.

## 3. Modele alokacji środków w sieciach przy ustalonym poziomie niezawodności wykonania czynności

Zdefiniujmy miarę niezawodności wykonania czynności $R_{ij}$ jako prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przez czas jej realizacji danej wielkości $t^*_{ij}$, tj.

$$R_{ij}=P(X_{ij}\leqslant t^*_{ij}). \tag{3.1}$$

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu

Postawmy następujący problem optymalizacyjny: wyznaczyć najkrótszy czas realizacji przedsięwzięcia oraz relacje pomiędzy momentami zajścia zdarzeń zapewniające, iż prawdopodobieństwo, że czynność $\langle i, j\rangle \in U$ będzie trwała dłużej aniżeli pozwala na to różnica $T_j - T_i$, jest nie większe od $1 - R_{ij}$.

Przyjmijmy, że zmienne $X_{ij}$ mają rozkłady normalne o parametrach $m_{ij}$, $\sigma_{ij}$. Niech $T_j - T_i = t_{ij}$, gdzie $t_{ij}$ oznacza maksymalny czas realizacji czynności $\langle i, j\rangle$ dopuszczalny ze względu na relacje zachodzące pomiędzy momentami zajścia zdarzeń $i$ oraz $j$.

Korzystając z (3.1) i przyjmując, że $T_j - T_i = t_{ij}$, sformułowane zagadnienie można przedstawić w postaci następującego problemu programowania stochastycznego:

$$\min T_n, \tag{3.2}$$

$$P(T_j - T_i < X_{ij}) \leqslant 1 - R_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U. \tag{3.3}$$

Warunek (3.3) otrzymujemy bezpośrednio z definicji (3.1) przyjmując, że $T_j - T_i = t_{ij}$. Istotnie,

$$R_{ij} = P(X_{ij} \leqslant t_{ij}^*) \leqslant P(X_{ij} \leqslant t_{ij}) = P(X_{ij} \leqslant T_j - T_i),$$

skąd

$$P(X_{ij} > T_j - T_i) \leqslant 1 - R_{ij}{}^8.$$

Zakładając, że $T_j - T_i = t_{ij}$ oraz korzystając z założenia o typie rozkładu zmiennej losowej $X_{ij}$ i oznaczając przez $F$ dystrybuantę, a przez $\Phi(t)$ – prawdopodobieństwo $P(X \leqslant t)$, gdzie $X \sim N(0, 1)$, dostajemy:

$$P(X_{ij} \leqslant t_{ij}) = P\left(\frac{X_{ij} - m_{ij}}{\sigma_{ij}} \leqslant \frac{t_{ij} - m_{ij}}{\sigma_{ij}}\right) = \Phi\left(\frac{t_{ij} - m_{ij}}{\sigma_{ij}}\right) \geqslant R_{ij},$$

skąd, korzystając z monotoniczności $\Phi$, otrzymujemy nierówność

$$\frac{t_{ij} - m_{ij}}{\sigma_{ij}} \geqslant \Phi^{-1}(R_{ij}) \tag{3.4}$$

i ostatecznie

$$t_{ij} \geqslant \Phi^{-1}(R_{ij})\,\sigma_{ij} + m_{ij}. \tag{3.5}$$

Wobec czego rozważane zagadnienie można ostatecznie przedstawić w postaci następującego problemu programowania liniowego:

$$\min T_n,$$

$$T_j - T_i \geqslant \Phi^{-1}(R_{ij})\,\sigma_{ij} + m_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U. \tag{3.6}$$

---

[8] Sformułowanie rozważanego problemu implikuje, że $t_{ij} \geqslant t_{ij}^*$, gdyż w tym przypadku z tego, że $R_{ij} = P(X_{ij} \leqslant t_{ij}^*)$ wynika, że z prawdopodobieństwem co najmniej $R_{ij}$ czynność zostanie wykonana w czasie $t_{ij}$.

Zauważmy, że wartość $T_n$ została wyznaczona przy założeniu, że $P(T_j - T_i > X_{ij}) \leqslant 1 - R_{ij}$ dla każdej czynności $\langle i, j \rangle \in U$. Warunek ten jest zbyt silny, gdyż nie dla wszystkich $T_j$, $T_i$ w rozwiązaniu optymalnym musi zachodzić równość

$$T_j - T_i = t_{ij}^*$$

lub (co jest równoważne)

$$T_j - T_i = \Phi^{-1}(R_{ij})\,\sigma_{ij} + m_{ij}.$$

Innymi słowy, niektóre warunki są zbyt silne w tym sensie, że gdyby obniżyć wartość $R_{ij}$ dla czynności niekrytycznych, tj. takich, dla których $T_j - T_i > \Phi^{-1}(R_{ij})\,\sigma_{ij} + m_{ij}$ w rozwiązaniu optymalnym, nie wywarłoby to wpływu na wartość $T_n$. Zanim podamy sposób dokonania tej relaksacji, zauważmy, że nie ma potrzeby w celu znalezienia wartości $T_n$ rozwiązywać postawionego problemu. Wystarczy zauważyć, że prawe strony wyznaczają takie czasy $t_{ij}^*$ trwania czynności o rozkładzie $N(m_{ij}, \sigma_{ij})$, aby został spełniony warunek $P(X_{ij} \leqslant t_{ij}^*) = R_{ij}$. Wobec tego mając wyznaczone wartości $t_{ij}^*$, dokonujemy analizy CPM, co jest bardziej efektywne numerycznie od rozwiązywania postawionego problemu. Następnie dla każdej czynności niekrytycznej wyznaczamy luz całkowity. Wiadomo, że czynności niekrytyczne można wydłużyć tak, aby stały się krytyczne, chociaż z drugiej strony nie można dokonać tego w sposób jednoznaczny.

Dokonując wydłużenia czynności niekrytycznych o $\Delta t_{ij}$, możemy dla nich wyznaczyć takie nowe wartości $R'_{ij}$ $(R'_{ij} > R_{ij})$, dla których w rozwiązaniu optymalnym (3.2) - (3.3)

$$P(X_{ij} \geqslant t_{ij}^* + \Delta t_{ij}) = R'_{ij}, \tag{3.7}$$

skąd ostatecznie

$$R'_{ij} = \Phi\left(\frac{t_{ij}^* + \Delta t_{ij} - m_{ij}}{\sigma_{ij}}\right). \tag{3.8}$$

W toku badań niestety nie udało się wskazać rozsądnego kryterium wyznaczania wartości $\Delta t_{ij}$, tj. nie udało się wskazać kryterium ujednoznacznienia podanej relaksacji. Zauważmy, że dla $R_{ij} = 0{,}5$, dla każdej czynności niezależnie od wartości wariancji, warunek (3.5) przybiera postać:

$$T_j - T_i \geqslant m_{ij}. \tag{3.9}$$

Innymi słowy, przy przyjęciu dla każdej czynności poziomu niezawodności równego 0,5, czas realizacji przedsięwzięcia będzie zbliżony do oczekiwanego

czasu realizacji. Akceptując wyższe wartości $R_{ij}$ sprawiamy, że wartość $T_n$ jest większa od $E(X)$. Problem (3.2)-(3.3) można oczywiście rozwiązać, przyjmując inne założenia odnośnie do typu zmiennych losowych $X_{ij}$ pod warunkiem łatwości wyznaczenia wartości $F^{-1}(R_{ij})$.

Rozważmy teraz problem minimalizacji czasu realizacji przedsięwzięcia przy przyjętych poziomach niezawodności wykonania czynności i możliwości oddziaływania na wartości oczekiwane czasów realizacji czynności poprzez ponoszenie dodatkowych nakładów na ich wykonanie, łącząc metody analizy zastosowane w punktach 2 i 3.

W tym celu rozpatrzymy następujące zagadnienie będące pewnym uogólnieniem problemu (3.2)-(3.3).

$$\min T_n, \tag{3.10}$$

$$T_j - T_i \geqslant \Phi^{-1}(R_{ij})\,\sigma_{ij} + m_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{3.11}$$

$$k_{ij} = \alpha_{ij} m_{ij} + \beta_{ij}\sigma_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{3.12}$$

$$m'_{ij} \leqslant m_{ij} \leqslant m''_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{3.13}$$

$$\sigma'_{ij} \leqslant \sigma_{ij} \leqslant \sigma''_{ij}, \qquad \langle i, j\rangle \in U, \tag{3.14}$$

$$\sum_{\langle i, j\rangle \in U} k_{ij} \leqslant K. \tag{3.15}$$

Funkcja celu postuluje minimalizację czasu realizacji przedsięwzięcia przy wymaganym poziomie niezawodności wykonania czynności, przy założeniu, że parametry rozkładu $X_{ij}$ są liniowymi funkcjami kosztów, których suma przeznaczona na zmniejszenie wartości $m_{ij}$ i $\sigma_{ij}$ (a więc zmniejszenie różnic $T_j - T_i$, co wpływa na zmniejszenie wartości $T_n$) nie może przekroczyć $K$. Warunki (3.11) gwarantują spełnienie dla każdej czynności warunku (3.3). Niemniej jednak tylko dla niektórych rozkładów warunek (3.3) można przekształcić do takiej postaci, aby $t_{ij}$ można było wyrazić w postaci liniowej funkcji wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu (czy też w bardziej ogólnym przypadku w postaci liniowej kombinacji momentów rozkładu). W przypadku kiedy funkcje te są nieliniowe, problem (3.10)-(3.15) staje się problemem programowania nieliniowego – niekoniecznie wypukłego, co zależy od własności (3.11). Rozwiązanie postawionego problemu przy braku silnych założeń odnoszących się do typu rozkładu oraz postaci funkcji $f_{ij}$ i $g_{ij}$ staje się zadaniem złożonym od strony numerycznej, zwłaszcza w przypadku zadań o większych rozmiarach.

## Literatura

[1] **Baker T. C. Jr., Sielkien R. J.,** Statistical PERT: Improvements in the Determination of the Project Completion Time Distribution, Themis Project, Technical Report 58, Texas University 1978.

[2] **Charnes A., Cooper W. W., Thompson G. L.,** Critical Path Analysis via Chance Connstrained and Stochastic Programming, Op. Res. 12, 1964.

[3] **Elmaghraby S. E.,** Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models, J. Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto 1977.

[4] **Kamburowski J.,** Drogi i przepływy ekstremalne w sieciach stochastycznych, Prace Naukowe Instytutu Organizacji i Zarządzania Politechniki Wrocławskiej, seria Monografie, nr 42, Wrocław 1987.

[5] **Slyke van R. J.,** Monte Carlo Methods and the PERT Problem, Op. Res. 5, 1963.