Wojciech SIKORA

STEROWANIE OPROCENTOWANIEM WKŁADÓW I KREDYTÓW BANKOWYCH

Wstęp

O sile i pozycji banku komercyjnego decyduje nie tylko wielkość jego obrotów, posiadany kapitał i zaufanie, jakim darzą go klienci, ale także generowany zysk. Wielkość osiąganego zysku zależy od wysokości obrotów banku, liczby nieściągalnych kredytów, wysokości oprocentowania wkładów i kredytów bankowych. Bank przynoszący straty w dłuższym przedziale czasu musi upaść.

Stopa procentowa (oprocentowanie) wkładów i kredytów banku komercyjnego zależy od:

a) stopy procentowej kredytu refinansowego NBP,
b) oprocentowania w innych bankach, działających na danym rynku lokalnym,
c) polityki stosowanej przez zarząd banku.

Z kolei stopa procentowa kredytu refinansowego NBP zależy od:

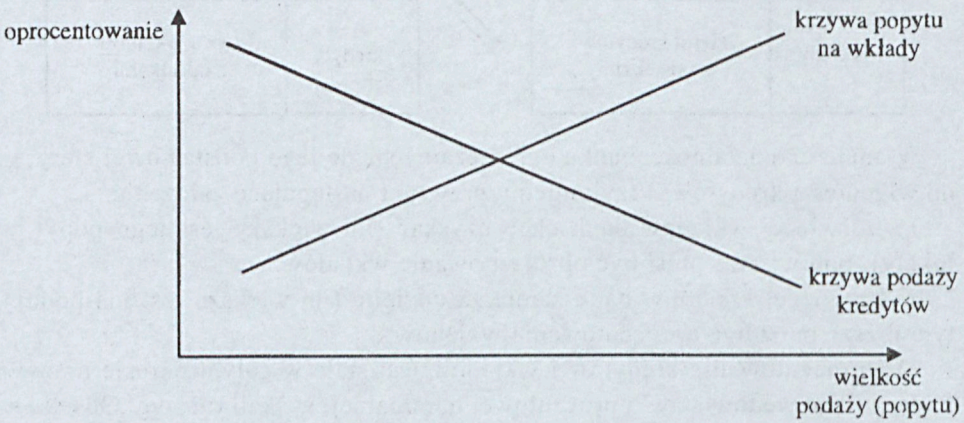
a) przewidywanej stopy inflacji,
b) przyjętej polityki gospodarczej rządu i NBP.

Zakładamy, że bank prowadzi aktywną politykę w zakresie wysokości oprocentowania wkładów i kredytów. Ustala je na takim poziomie, aby generowane w ten sposób obroty maksymalizowały osiągany przez niego dochód. Dla ustalenia optymalnej wielkości wkładów i kredytów w banku komercyjnym formułujemy model matematyczny, w postaci zadania programowania kwadratowego. Model ten wykorzystujemy do optymalnego sterowania przepływem środków oraz wysokością oprocentowania wkładów i kredytów w kolejno analizowanych przedziałach czasu.

1. Problem

Bank komercyjny jest typowym pośrednikiem, działającym na specyficznym rynku, jakim jest rynek pieniężny. Chce przyciągnąć klientów, od których uzyskuje pieniądze w postaci wkładów bądź którym pożycza je w postaci kredytów.

Bank (oddział banku) działa na określonym rynku lokalnym (np. w Poznaniu). Oprocentowanie w danym momencie (przedziale czasu) jest uzależnione od wielkości podaży i popytu. Zakładamy klasyczny mechanizm reagowania cen na wielkość popytu i podaży w warunkach niedoskonałej konkurencji. Zwiększony popyt ze strony banku na wkłady inwestorów powoduje wzrost oprocentowania, natomiast zwiększona podaż kredytów wywołuje spadek ich oprocentowania (por. rys. 1).

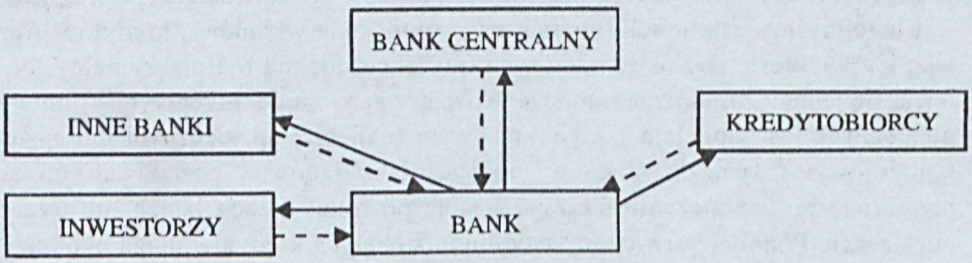


Rys. 1. Funkcje popytu i podaży

To jakie wkłady zostaną w danym okresie ulokowane w banku, zależy nie tylko od jego stopy procentowej, ale także od oprocentowania wkładów w innych bankach, dochodów firm i ludności, zaufania, jakie wzbudza dany bank, innych możliwości lokowania kapitału.

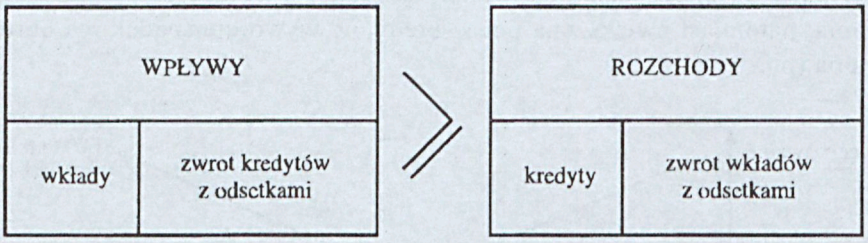
Przyjmujemy, że w analizie krótkookresowej (np. miesięcznej) te czynniki, poza oprocentowaniem, są dane i niezależne od banku. W krótkim okresie bank może wpływać na wielkość lokowanych wkładów i udzielanych kredytów poziomem ich oprocentowania.

Przepływy pieniądza między bankiem a jego otoczeniem możemy przedstawić następująco:



Rys. 2. Przepływy finansowe

Zakładamy, że dla zapewnienia płynności w każdym okresie, rozchody (ilość pieniędzy wypływających z banku) nie mogą być większe od wpływów (ilość pieniędzy wpływających do banku). Dla każdego okresu musi być więc spełniona nierówność:



W analizie działalności banku ograniczamy się do jego podstawowej sfery, tj. do wkładów i kredytów. Przyjmujemy przy tym następujące założenia:

1) Im więcej wkładów bank chce uzyskać (im większy jest jego popyt na lokaty), tym wyższe musi być oprocentowanie wkładów.

2) Im więcej kredytów bank zamierza udzielić (im większa jest ich podaż), tym niższe musi być oprocentowanie wkładów.

3) Oprocentowanie kredytów i wkładów jest stałe w całym okresie umowy. Podaje się je według stawki procentowej nominalnej, w skali rocznej. Odsetki są dopisywane i zwracane po zakończeniu umowy.

4) Analizujemy nie stany wkładów lub udzielonych kredytów, lecz ich strumienie (przepływy). Interesuje nas, ile pieniędzy wpłynęło do banku (w postaci wkładów) lub ile pieniędzy wypłynęło (w postaci kredytów) w rozpatrywanym okresie.

5) Wkłady i kredyty dzielimy na typy, w zależności od długości okresu, na jaki są udzielane, ich wielkości, przeznaczenia lub sposobu ich zwrotu. Możemy wyróżnić od kilku do kilkudziesięciu typów wkładów lub kredytów.

6) W rozważaniach pomijamy koszty stałe funkcjonowania banku, niezależne od wielkości obrotów (płace personelu, amortyzację i koszty remontów pomieszczeń, wyposażenie itp.).

W rzeczywistości możliwe są także inne rozwiązania, które jednak pomijamy, aby ujednolicić i uprościć rozważany model funkcjonowania banku (por.[1], [2]).

Chcielibyśmy ustalić taki poziom oprocentowania wkładów i kredytów oraz taką ich wielkość, aby osiągany z tych transakcji dochód był maksymalny. Pojawia się jednak zasadnicza trudność. Rozpatrywany model przepływu strumieni pieniężnych jest modelem krótkookresowym (najlepiej miesięcznym lub nawet tygodniowym), tymczasem koszty pozyskania wkładów w postaci odsetek są ponoszone po zakończeniu umowy, a więc po roku, dwóch latach lub trzech miesiącach. Podobnie przychody z tytułu udzielonych kredytów mogą być realizowane po miesiącu lub na przykład trzech latach. Aby te wielkości porówny-

wać, musimy odnieść je do jednakowego okresu, najlepiej do roku, ale i to nie wystarcza.

Rozważmy następujący przykład. Inwestor wkłada do banku milion złotych na rok. Oprocentowanie wkładu wynosi 35%. Po roku bank musi zwrócić inwestorowi 1,35 mln zł. Uzyskane w ten sposób środki bank przeznaczył na udzielenie trzymiesięcznego kredytu, oprocentowanego na 40% w skali roku. Po trzech miesiącach bank dysponuje wolną kwotą 1,1 mln zł, którą ponownie przeznacza na trzymiesięczny kredyt o tym samym oprocentowaniu. Po sześciu miesiącach bank dysponuje już kwotą 1,21 mln zł, a jeśli operacja ta zostanie powtórzona jeszcze dwukrotnie, to po dziewięciu miesiącach bank ma 1,331 mln zł, a po roku – 1,464 mln zł. Nominalny przychód od kredytu trzymiesięcznego w skali roku wynosi $1 \cdot 0{,}4 = 0{,}4$ mln zł. Bank uzyskuje w tym przypadku dodatkowe korzyści w wysokości 6,4%.

W zależności od tego, w jakiego typu wkładach ma pokrycie udzielany kredyt, można ustalić dodatkowe korzyści lub straty, jakie ponosi bank w stosunku do różnicy między przychodem a kosztem nominalnym Te dodatkowe korzyści lub straty są tym wyższe, im większe jest oprocentowanie nominalne wkładów i kredytów. Aby te korzyści lub straty oszacować, przyjmujemy oprocentowanie wkładów i kredytów z poprzedniego okresu.

Części kredytów nie udaje się ściągnąć i musimy je odpisać na straty. Podobnie dla wkładów tworzymy obowiązkowe rezerwy, które stanowią dodatkowe obciążenie.

2. Model matematyczny

Parametry modelu oznaczmy następująco:

A – wielkość wycofanych w danym okresie wkładów wraz z odsetkami;

B – wielkość zwróconych w danym okresie kredytów wraz z odsetkami;

a_i – maksymalna wielkość wkładów i-tego typu, jaka może być dokonana w banku w danym okresie;

b_j – maksymalna wielkość kredytów j-tego typu, jaka może być udzielona przez bank w danym okresie;

c_{ij} – korzyść (strata), jaką przynosi jednostka kredytu j-tego typu, jeżeli ma pokrycie w środkach pochodzących z wkładów i-tego typu;

s_j – współczynnik strat dla kredytów j-tego typu;

r_i – współczynnik rezerw dla wkładów i-tego typu.

Zmiennymi decyzyjnymi modelu są:

x_i – wielkość wkładów i-tego typu, lokowanych w banku w danym okresie;

y_j – wielkość kredytów j-tego typu udzielanych przez bank w danym okresie;

x_{ij} – przepływ środków pochodzących z wkładów i-tego typu, a przeznaczonych na finansowanie kredytów j-tego typu.

Oznaczmy ponadto przez:

w_i – stopę procentową wkładów i-tego typu (w skali rocznej);

k_j – stopę procentową kredytów j-tego typu (w skali rocznej).

Podstawowe zależności zachodzące między tymi wielkościami opiszemy następującymi równaniami:

(a) $w_i = \underline{c}_i + c_i \cdot x_i$ (równanie oprocentowania wkładów i-tego typu),

gdzie:

$\underline{c}_i$ – minimalne oprocentowanie wkładów i-tego typu,

c_i – tempo wzrostu oprocentowania, jeśli wzrasta suma lokowanych wkładów i-tego typu,

(b) $k_j = \underline{e}_j - e_j \cdot y_j$ (równanie oprocentowania kredytów j-tego typu),

gdzie:

$\underline{e}_i$ – minimalne oprocentowanie kredytów j-tego typu,

e_j – tempo spadku oprocentowania, jeśli wzrasta suma udzielanych kredytów j-tego typu,

(c) nominalny koszt pozyskania wkładów i-tego typu w skali rocznej:

$$g_i(x_i) = w_i \cdot x_i = \underline{c}_i \cdot x_i + c_i \cdot x_i^2,$$

(d) nominalny przychód z kredytów j-tego typu w skali rocznej

$$f_j(y_j) = k_j \cdot y_j = \underline{e}_j \cdot y_j - e_j \cdot y_j^2.$$

Model sterowania przepływami środków sprowadza się w końcu do rozwiązania następującego zadania: znajdź takie wartości x_{ij}, x_i, y_j, aby:

$$(1) \qquad \mathrm{FC} = \sum_{j=1}^{n} f_j(y_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} g_i(x_i) - \sum_{i=1}^{m} r_i x_i - \sum_{j=1}^{n} s_j y_j \to \max,$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = x_i \le a_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1,j} = y_j \le b_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} x_{m+1,j} = B,$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{i,n+1} = A, \tag{5}$$

$$x_{ij},\ x_i,\ y_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m+1;\ j = 1, \ldots, n+1). \tag{6}$$

Zadanie optymalizujące (1)-(6) jest zadaniem programowania kwadratowego w pewnej szczególnej strukturze i może być rozwiązane zmodyfikowaną wersją metody quasi-baz II przedstawionej w pracy W. Sikory [3].

Zmienna $x_{i,n+1}$ ($i = 1, \ldots, m$) określa, ile pieniędzy pochodzących z ulokowanych wkładów i-tego typu przeznaczy się na sfinansowanie zwracanych w tym okresie wkładów wraz z odsetkami. Podobnie zmienna $x_{m+1,j}$ ($j = 1, \ldots, n$) określa, ile pieniędzy pochodzących ze zwróconych w tym okresie kredytów wraz z odsetkami przeznaczymy na sfinansowanie udzielonych kredytów j-tego typu.

Równanie w warunku (2) określa rozdysponowanie środków uzyskanych w ramach wkładów i-tego typu. Podobnie równanie (3) określa pochodzenie środków służących sfinansowaniu kredytów j-tego typu.

Analogicznie równanie (4) określa rozdysponowanie pieniędzy pochodzących ze zwracanych kredytów, a równanie (5) – pochodzenie środków przeznaczonych na zwroty wkładów z odsetkami.

Funkcja celu (1) określa dochód rozrachunkowy uzyskany z wkładów i kredytów w analizowanym okresie. Dokładnie jest to dochód, jaki uzyskano by, gdyby przez wszystkie kolejne okresy w ciągu roku utrzymywana była ta sama wielkość wkładów i kredytów, wysokość ich oprocentowania oraz struktura ich rozdysponowania.

Warunki (2)-(5) gwarantują, że wpływy w danym okresie są równe rozchodom.

3. Sprawdzenie poprawności modelu

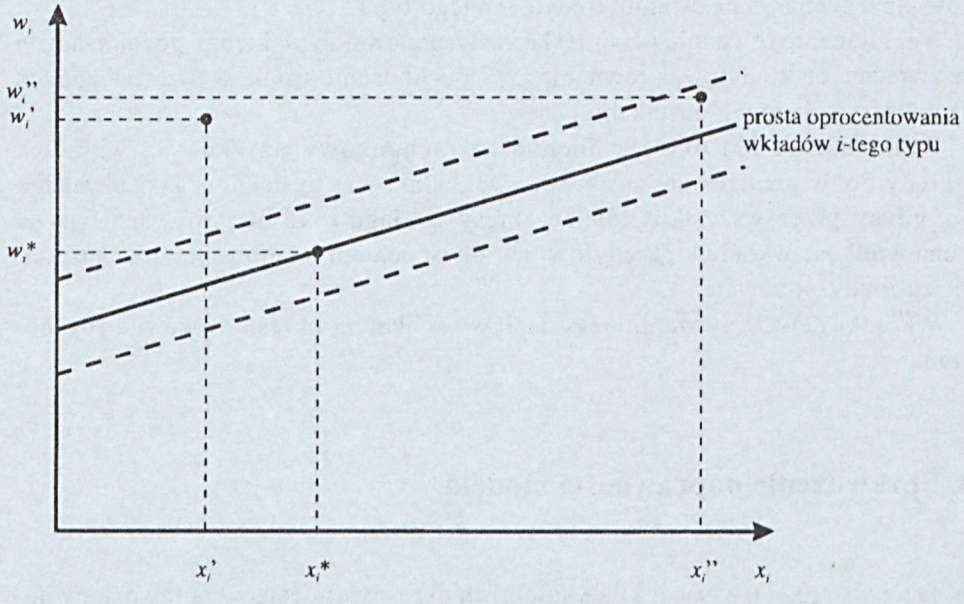
W fazie wstępnej trwającej kilka kolejnych okresów (miesięcy) sprawdzamy poprawność modelu. W szczególności ustalamy, czy równania (a) i (b) prawidłowo określają relacje zachodzące między oprocentowaniem a wielkością wkładów lub kredytów. Brak właściwie danych, na podstawie których można oszacować parametry $\underline{c}_i, c_i$ ($\underline{e}_j, e_j$). Wstępne oszacowanie tych parametrów można uzyskać, generując dwa szeregi informacji:

- jakie powinno być oprocentowanie wkładów i-tego typu, jeśli bank chce uzyskać wkłady na przykład rzędu 10, 15, 20 czy 30 mln zł,
- jakich wielkości wkładów należy oczekiwać, jeżeli oprocentowanie wkładów i-tego typu będzie wynosiło na przykład 20, 25 czy 30% w skali rocznej.

Mając ustalone dane, szacujemy parametry $\underline{c}_i$ oraz c_i tak jak parametry modelu ekonometrycznego. Podobnie ustalamy $\underline{e}_j$ oraz e_j.

Znając dla pierwszego okresu fazy wstępnej wartości pozostałych parametrów modelu, możemy wyznaczyć optymalną wielkość wkładów x^* oraz optymalną wielkość kredytów y^*, a dalej na podstawie równań (a) i (b) optymalne ich oprocentowanie w^* i k^*.

Przyjmijmy, że prosta na rysunku 3 określa oszacowane równanie oprocentowania wkładów i-tego typu. Wkładowi optymalnemu x_i^* odpowiada optymalne oprocentowanie w_i^*. Załóżmy dalej, że w tym okresie bank realizuje rzeczywiste oprocentowanie $w_i' \neq w_i^*$, któremu odpowiada rzeczywisty wkład x_i'. Punkt (x_i', w_i') nie leży w otulinie prostej oprocentowania. Oznacza to, że rzeczywista reakcja inwestorów jest odmienna od reakcji teoretycznej. Musimy w tym przypadku zmienić oszacowanie parametrów $\underline{c}_i$ oraz c_i, modyfikując szeregi danych oraz uwzględniając w nich nowy punkt (x_i', w_i').



Rys. 3. Sterowanie oprocentowaniem

Po kilku okresach korekt powinniśmy dojść do ustalenia poprawnych wartości parametrów równań (a) i (b) bądź stwierdzić, że takich prawidłowych wartości nie można ustalić. W tym drugim przypadku model jest nieprzydatny do sterowania oprocentowaniem.

4. Optymalne sterowanie oprocentowaniem

Jeżeli ustalone ostatnie wartości parametrów $\underline{c}_i$, c_i, $\underline{e}_j$, e_j prawidłowo określają reakcje inwestorów oraz kredytobiorców, to możemy przystąpić do etapu optymalnego sterowania oprocentowaniem na podstawie sformułowanego modelu optymalizacyjnego.

Dla pierwszego okresu w tej fazie ustalamy optymalne wielkości wkładów x^1 oraz kredytów y^1. Odpowiadające im optymalne oprocentowania w^1 i k^1 są już realizowane przez bank. Realizowanemu optymalnemu oprocentowaniu odpowiadają rzeczywiste poziomy wkładów $\underline{x}^1$ oraz kredytów $\underline{y}^1$. Jeżeli w otoczeniu nie nastąpiły zmiany, a parametry modelu prawidłowo opisują reakcje inwestorów i kredytobiorców, to:

$$\text{dla każdego } i\text{: } \underline{x}_i^1 \approx x_i^1 \text{ oraz dla każdego } j\text{: } \underline{y}_i^1 \approx y_i^1.$$

Jeżeli dla danego poziomu tolerancji ε istnieje l takie, że

$$\left|\underline{x}_l^1 - x_l^1\right| > \varepsilon,$$

to w drugim okresie należy skorygować wartość parametrów $\underline{c}_l$ i c_l, uwzględniając nową informację $\left(x_l^1, w_l^1\right)$. W przeciwnym przypadku ustalając optymalne x^2 i y^2, opieramy się na starych wartościach $\underline{c}_i$ i $c_i\left(\underline{e}_j, e_j\right)$.

Przejście na proponowany system sterowania oprocentowaniem powinien zwiększyć płynność banku oraz osiągany przez niego dochód. Nawet jeżeli nie wprowadzimy sterowania optymalnego do bieżącej polityki banku, to zaproponowany model można wykorzystać do analiz porównawczych realizacji procesów rzeczywistych z procesami teoretycznymi wynikającymi z modelu.

Literatura

[1] **Bereza S.**, Zarządzanie ryzykiem bankowym, Związek Banków Polskich, Warszawa 1992.

[2] **Dobija M., Smaga E.**, Zastosowania matematyki finansowej, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, 1993.

[3] **Sikora W.**, Modele i metody optymalnej dystrybucji dóbr, Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, 1993, z. 127.