**Emil PANEK, Bartosz JUREK**

Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

# MODEL GOSPODARKI KONKURENCYJNEJ TYPU WALRASA Z OCZEKIWANIAMI CENOWYMI

## Wprowadzenie

W klasycznym modelu gospodarki konkurencyjnej (np. [3], [4], [7], [8]) dynamikę cen opisuje zazwyczaj układ równań różniczkowych[1]:

$$\dot{p}(t) = \sigma z(p(t)), \tag{1}$$

gdzie:

$t$ – (ciągła) zmienna czasu, $t \in R^1_+ = \{t \in R^1 | t \geqslant 0\}$,

$p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))^T$ – (kolumnowy) wektor cen ($n$) towarów wytwarzanych w gospodarce w momencie $t$,

$\sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ – diagonalna macierz współczynników reakcji cen na zmianę popytu i podaży, z dodatnimi elementami $\sigma_i$ na głównej przekątnej,

$z(p(t)) = (z_1(p(t)), \ldots, z_n(p(t)))^T$ – (kolumnowa) funkcja popytu nadwyżkowego na towary,

$$z(p(t)) = \sum_{k=1}^{l} f^k(p(t)) - \sum_{j=1}^{m} g^j(p(t)), \tag{2}$$

$f^k(p(t)) = (f_1^k(p(t)), \ldots, f_n^k(p(t)))^T$ – funkcja popytu konsumenta $k$ w momencie $t$,

---

[1] Symbolem $R^1$ oznaczamy oś rzeczywistą, przez $R^n$ oznaczamy przestrzeń wektorową $n$-wymiarową; $R^n_+ = \{x \in R^n | x \geqslant 0\}$.

$g^j(p(t)) = (g_1^j(p(t)), ..., g_n^j(p(t)))^T$ – funkcja podaży towarów wytwarzanych w gospodarce przez producenta $j$ w momencie $t$,

$l$ – liczba konsumentów,

$m$ – liczba producentów,

T – znak transpozycji wiersza na kolumnę.

Gdy założymy, że czas zmienia się skokowo, wówczas odpowiednikiem układu równań różniczkowych (1) będzie układ równań rekurencyjnych

$$p(t+1) = p(t) + \sigma z(p(t)), \tag{3}$$

gdzie $t = 0, 1, ...$ W celu uniknięcia cen ujemnych, zamiast układu (3) rozpatruje się czasami jego zmodyfikowaną wersję

$$p(t+1) = \max\{0, p(t) + \sigma z(p(t))\}, \tag{4}$$

gdzie

$$\max\{0, p(t) + \sigma z(p(t))\} =$$

$$= (\max\{0, p_1(t) + \sigma_1 z_1(p(t))\}, ..., \max\{0, p_n(t) + \sigma_n z_n(p(t))\}).$$

O funkcjach popytu $f^k(p)$ i podaży $g^j(p)$ standardowo zakładamy, że są ciągłe, różniczkowalne na $R_+^n \setminus \{0\}$ i dodatnio jednorodne stopnia 0:

$$\forall \lambda > 0,\ \forall p \gneqq 0,\ \forall k,\ \forall j\ (f^k(\lambda p) = f^k(p) \text{ oraz } g^j(\lambda p) = g^j(p))$$

(warunek ten oznacza, że popyt i podaż zależą od struktury cen, a nie od ich bezwzględnego poziomu), co pozwala na zastąpienie cen bezwzględnych $p = (p_1, ..., p_n)^T$ tzw. *cenami względnymi* $\tilde{p} = \frac{1}{p_n}(p_1, ..., p_n)^T = (\hat{p}, 1)^T$, w efekcie przypisania jednemu towarowi, na przykład towarowi $n$, roli pieniądza, w którego jednostkach wyrażone zostają ceny pozostałych $n-1$ towarów. Wobec tego, że teraz $p_n(t) = 1$, układ $n$ równań rekurencyjnych (3) dynamiki cen bezwzględnych można zastąpić układem

$$\hat{p}(t+1) = \hat{p}(t) + \hat{\sigma}\hat{z}(p(t)) \tag{5}$$

$n-1$ równań dynamiki cen względnych, w którym:

$$\hat{z}(\hat{p}(t)) = (z_1(\hat{p}(t), 1), \ldots, z_{n-1}(\hat{p}(t), 1))^T,$$

$$\hat{p}(t) = (\hat{p}_1(t), \ldots, \hat{p}_{n-1}(t))^T,$$

$$\hat{\sigma} = \operatorname{diag}(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{n-1}).$$

Podobnie, układ (4) można zastąpić układem:

$$\hat{p}(t+1) = \max\{0, \hat{p}(t) + \hat{\sigma}\hat{z}(\hat{p}(t))\}. \tag{6}$$

Mówimy, że gospodarka konkurencyjna z równaniem dynamiki cen (1) (odpowiednio (3),(4)) jest w równowadze, gdy ustalą się w niej takie ceny (bezwzględne) $\bar{p} > 0$, przy których całkowity popyt na towary $f(\bar{p}) = \sum_{k=1}^{l} f^k(\bar{p})$ będzie równy ich całkowitej podaży $g(\bar{p}) = \sum_{j=1}^{m} g^j(\bar{p})$, innymi słowy, gdy

$$z = (\bar{p}) = 0.$$

Ponieważ funkcje popytu $f^k(p)$ i podaży $g^j(p)$ w (2) są dodatnio jednorodne stopnia 0, więc również

$$z(\lambda p) = 0$$

dla dowolnej liczby $\lambda > 0$, co jest formalnym wyrazem znanego w ekonomii matematycznej faktu, że ceny równowagi w gospodarce konkurencyjnej są określone z dokładnością do struktury.

Jeżeli $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)^T > 0$ jest wektorem cen (bezwzględnych) równowagi w gospodarce konkurencyjnej z dyskretnym równaniem dynamiki cen (3) (odpowiednio (4)), to $\hat{\bar{p}} = \frac{1}{\bar{p}_n}(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_{n-1})^T > 0$ jest wektorem cen (względnych) równowagi w gospodarce z równaniem dynamiki cen (5) (odpowiednio (6)), czyli

$$\hat{z}(\hat{\bar{p}}) = 0.$$

Ustalmy dowolny początkowy wektor cen względnych

$$\hat{p}(0) = \hat{p}^0 > 0. \tag{7}$$

Dodatnie rozwiązanie $\{\hat{p}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ układu (5) (odpowiednio: rozwiązanie układu (6)) spełniające warunek początkowy (7) nazywamy $(\hat{p}^0, \infty)$-dopuszczalną trajektorią cen (względnych). Gospodarkę z cenami względnymi nazywamy (co najmniej) lokalnie asymptotycznie stabilną w otoczeniu cen równowagi $\hat{\bar{p}}$, jeżeli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że każda $(\hat{p}^0, \infty)$-dopuszczalna trajektoria cen z dodatnim początkowym wektorem cen spełniającym warunek

$$\hat{p}^0 \in U_{\varepsilon}^{n-1}(\hat{\bar{p}}) = \{\hat{p} \in R^n \mid \|\hat{p} - \hat{\bar{p}}\| < \varepsilon\}$$

jest asymptotycznie zbieżna do $\hat{\bar{p}}$.

Analizie gospodarek konkurencyjnych z równaniem dynamiki cen względnych typu (5), (6) poświęcona jest znaczna literatura. Najczęściej zakłada się przy tym, że zarówno popyt na towary, jak i ich podaż w okresie $t$ zależą wyłącznie od ich cen obowiązujących w tym samym okresie. W konsekwencji ceny te są jedynym argumentem funkcji popytu nadwyżkowego (2). Tymczasem w rzeczywistości na popyt i podaż w okresie $t$ mają wpływ nie tylko (znane) ceny, obowiązujące w okresie $t$, lecz także ceny oczekiwane (przewidywane) w przyszłości. Na przykład na wiadomość o spodziewanej podwyżce cen typowy konsument zareaguje zwiększonymi zakupami towarów. Reakcja producenta może być zgoła odwrotna (ograniczy produkcję dzisiaj, by zwiększyć ją jutro).

Wpływ cen oczekiwanych na bieżące zachowanie konsumentów i producentów nie znajduje należytego odzwierciedlenia w literaturze[2]. Pewną propozycję modelu gospodarki konkurencyjnej z oczekiwaniami cenowymi producentów i konsumentów wraz z zarysem analizy jej (lokalnej) stabilności, przedstawiamy w artykule. Koncentrujemy się na wersji dyskretnej modelu z układem równań dynamiki cen względnych (5), ale twierdzenia i wnioski, które formułujemy dalej, pozostają słuszne również wówczas, gdy układ (5) zastąpimy jego zmodyfikowaną wersją (6).

## 1. Model gospodarki (ceny względne)

Zakładamy, że na popyt konsumenta $k$ w okresie $t$ mają wpływ nie tylko ceny bieżące $\hat{p}(t) = (\hat{p}_1(t), \ldots, \hat{p}_{n-1}(t))^T$, lecz także ceny oczekiwane (spodziewane) w okresie następnym $\hat{p}^e(t+1) = (\hat{p}_1^e(t+1), \ldots, \hat{p}_{n-1}^e(t+1))^T$.

[2] Do nielicznych znanych autorom prac z tego zakresu należą artykuły: [1], [2]. Dwa modele (ciągłe) omawia S. Karlin [5].

Podobnie podaż towarów oferowanych przez producenta $j$ w okresie $t$ zależy nie tylko od cen bieżących, ale także od cen przez nich przewidywanych w okresie następnym $\hat{p}^f(t+1)=(\hat{p}_1^f(t+1),\ldots,\hat{p}_{n-1}^f(t+1))^T$. Oczekiwania cenowe konsumentów i producentów nie muszą być identyczne, zatem niekoniecznie $\hat{p}^e(t)=\hat{p}^f(t)$.

Przy tym założeniu odpowiednikiem układu równań dynamiki cen (5) jest teraz układ:

$$\hat{p}(t+1)=\hat{p}(t)+\hat{\sigma}\hat{z}(\hat{p}(t),\hat{p}^e(t+1),\hat{p}^f(t+1)), \tag{8}$$

gdzie

$$\hat{z}(\hat{p}(t),\hat{p}^e(t+1),\hat{p}^f(t+1))=\sum_{k=1}^{l}\hat{f}^k(\hat{p}(t),\hat{p}^e(t+1))-\sum_{j=1}^{m}\hat{g}^j(\hat{p}(t),\hat{p}^f(t+1)),$$

$$\hat{f}^k=(f_1^k,\ldots,f_{n-1}^k)^T,\qquad \hat{g}^j=(g_1^j,\ldots,g_{n-1}^j)^T.$$

Dynamikę cen oczekiwanych wyrazimy za pomocą układu równań:

$$\begin{aligned}\hat{p}^e(t+1)&=\hat{p}^e(t)+\zeta^e[\hat{p}(t)-\hat{p}^e(t)],\\ \hat{p}^f(t+1)&=\hat{p}^f(t)+\zeta^f[\hat{p}(t)-\hat{p}^f(t)],\end{aligned} \tag{9}$$

gdzie: $\zeta^e=\operatorname{diag}(\zeta_1^e,\ldots,\zeta_{n-1}^e)$, $\zeta^f=\operatorname{diag}(\zeta_1^f,\ldots,\zeta_{n-1}^f)$ z dodatnimi elementami $\zeta_i^e$, $\zeta_i^f$ na głównych przekątnych obu macierzy. Jeżeli zatem na przykład $\zeta_i^e>0$ oraz cena faktyczna $\hat{p}_i(t)$ jest wyższa od oczekiwanej ceny $\hat{p}_i^e(t)$, to następuje korekta w górę oczekiwań cenowych konsumentów w okresie następnym. Gdy $\hat{p}_i(t)<\hat{p}_i^f(t)$, wtedy warunek (9) wymusi korektę w dół oczekiwań cenowych producentów.

Wprowadzenie do modelu cen oczekiwanych $\hat{p}_i^e(t)$, $\hat{p}_i^f(t)$ będzie rzecz prosta miało wpływ na ceny faktyczne $\hat{p}_i(t)$, $i=1,\ldots,n-1$. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy wpływ ten będzie na tyle silny, żeby doprowadzić do destabilizacji gospodarki, przyjmiemy naturalne założenie, że warunek $\hat{p}=\hat{\bar{p}}$ pociąga za sobą dwa następne: $\hat{p}^e=\hat{\bar{p}}$ oraz $\hat{p}^f=\hat{\bar{p}}$ (w równowadze ceny oczekiwane są identyczne z cenami faktycznymi).

Rozwijając w szereg Taylora funkcję popytu nadwyżkowego w otoczeniu cen równowagi, otrzymujemy jej liniową aproksymację:

$$\hat{z}(\hat{p}(t),\hat{p}^e(t+1),\hat{p}^f(t+1))=A(\hat{p}(t)-\hat{\bar{p}})+B(\hat{p}^e(t+1)-\hat{\bar{p}})+C(\hat{p}^f(t+1)-\hat{\bar{p}}), \tag{10}$$

gdzie:

$$A=\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{p}}\bigg|_{\hat{p}=\hat{\bar{p}}}, \qquad B=\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{p}^e}\bigg|_{\hat{p}^e=\hat{\bar{p}}}, \qquad C=\frac{\partial \hat{z}}{\partial \hat{p}^f}\bigg|_{\hat{p}^f=\hat{\bar{p}}} \tag{11}$$

są macierzami kwadratowymi $(n-1, n-1)$ pochodnych cząstkowych funkcji popytu nadwyżkowego w punkcie równowagi. Stąd, zważywszy na (9), otrzymujemy:

$$\hat{z}(\hat{p}(t), \hat{p}^e(t+1), \hat{p}^f(t+1)) =$$

$$= A(\hat{p}(t)-\hat{\bar{p}}) + B(\hat{p}^e(t)-\hat{\bar{p}}) + B\zeta^e(\hat{p}(t)-\hat{p}^e(t)) +$$

$$+ C(\hat{p}^f(t)-\hat{\bar{p}}) + C\zeta^f(\hat{p}(t)-\bar{p}^f(t)).$$

Po podstawieniu tej funkcji do (8) i zastąpieniu cen $\hat{p}(t)$, $\hat{p}^e(t)$, $\hat{p}^f(t)$ ich odchyleniami od cen równowagi $\hat{\bar{p}}$:

$$\hat{u}(t)=\hat{p}(t)-\hat{\bar{p}}, \qquad \hat{v}(t)=\hat{p}^e(t)-\hat{\bar{p}}, \qquad \hat{w}(t)=\hat{p}^f(t)-\hat{\bar{p}},$$

uwzględniając (9), otrzymujemy ostatecznie liniowy układ równań rekurencyjnych

$$z(t+1)=Dz(t) \tag{12}$$

gdzie:

$$z(t)=\begin{pmatrix} \hat{u}(t) \\ \hat{v}(t) \\ \hat{w}(t) \end{pmatrix}$$

jest wektorem $(3n-3)$-wymiarowym,

$$D=\begin{bmatrix} E+\hat{\sigma}A+\hat{\sigma}B\zeta^e+\hat{\sigma}C\zeta^f & \hat{\sigma}B(E-\zeta^e) & \hat{\sigma}C(E-\zeta^f) \\ \zeta^e & E-\zeta^e & 0 \\ \zeta^f & 0 & E-\zeta^f \end{bmatrix} \tag{13}$$

jest macierzą kwadratową $(3n-3, 3n-3)$.

Układ (12) nazywamy aproksymacją liniową układu (nieliniowego) (8)-(9) w punkcie równowagi. Jak wiadomo (np. [6]) nieliniowy układ (8)-(9) jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny w otoczeniu cen równowagi $\hat{\bar{p}}$, gdy jego aproksymacja liniowa (12) jest globalnie asymptotycznie stabilna w 0, tzn. gdy każde rozwiązanie $\{z(t)\}_{t=0}^{\infty}$ układu (12) spełnia warunek:

$$\lim z(t)=0.$$

Natomiast liniowy układ (12) wtedy i tylko wtedy jest globalnie asymptotycznie stabilny w 0, gdy wszystkie wartości własne kwadratowej, rzeczywistej macierzy $D$ mają moduły mniejsze od 1, [6]. Otrzymujemy w ten sposób następujące warunki co najmniej lokalnej asymptotycznej stabilności gospodarki konkurencyjnej z oczekiwaniami cenowymi:

TWIERDZENIE 1. *Gospodarka konkurencyjna z układem równań dynamiki cen względnych* (8)-(9) *jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilna (w otoczeniu cen równowagi* $\hat{\bar{p}}$*), jeżeli macierz D tego układu postaci* (13) *jest stabilna.*

## 2. Warunki stabilności lokalnej gospodarki bez oczekiwań cenowych

Gdy konsumenci i producenci przyjmą najprostszą postawę, oczekując w okresie $t+1$ powtórzenia cen, które faktycznie obowiązywały w okresie $t$, tzn. gdy

$$\hat{p}^e(t+1)=\hat{p}(t) \qquad \text{oraz} \qquad \hat{p}^f(t+1)=\hat{p}(t)$$

(jest to swoista wersja modelu bez oczekiwań cenowych lub, jak się niekiedy mówi, z oczekiwaniami naiwnymi), wówczas aproksymacja liniowa układu (8) w otoczeniu cen równowagi redukuje się do układu

$$\hat{u}(t+1)=H\hat{u}(t) \tag{14}$$

z macierzą $H=E+\hat{\sigma}(A+B+C)$. Przyjmijmy oznaczenie $\|x\|=\sum_i |x_i|$.

Liczbę

$$\|H\| = \sup_{\|x\|=1} \|Hx\|$$

nazywamy normą macierzy $H$. Łatwo wykazać, że

$$\|H\| = \max_j \sum_{i=1}^{n-1} |h_{ij}|. \tag{15}$$

Niech $\lambda$ będzie wartością własną macierzy $H$ oraz $\bar{u}$ odpowiadającym jej (prawym) wektorem własnym:

$$H\bar{u} = \lambda\bar{u}, \qquad \|\bar{u}\| = 1.$$

Wówczas

$$\|H\bar{u}\| = |\lambda|\|\bar{u}\| = |\lambda| \leqslant \sup_{\|u\|=1} \|Hu\| = \|H\|.$$

Dochodzimy w ten sposób do następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 2.** *Macierz H układu* (14) *jest stabilna, gdy jej norma jest mniejsza od* 1.

Zgodnie z (15) warunek $\|H\| < 1$ zachodzi, gdy

$$\forall j \left( \sum_{i=1}^{n-1} |h_{ij}| < 1 \right), \tag{16}$$

tj. gdy suma wartości bezwzględnych elementów każdej kolumny macierzy $H$ jest mniejsza od 1. Kolumna $j$ tej macierzy ma następującą postać:

$$h_j = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1(a_{1j} + b_{1j} + c_{1j}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 + \hat{\sigma}_j(a_{jj} + b_{jj} + c_{jj}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\sigma}_{n-1}(a_{n-1,j} + b_{n-1,j} + c_{n-1,j}) \end{bmatrix}.$$

Warunek (16) oznacza zatem, że

$$\forall j \left( |1 + \hat{\sigma}_j(a_{jj} + b_{jj} + c_{jj})| + \sum_{i \neq j} \hat{\sigma}_i |a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}| < 1 \right). \tag{17}$$

Powyższy warunek zapewnia globalną asymptotyczną stabilność liniowego układu (14), a tym samym co najmniej lokalną asymptotyczną stabilność gospodarki Walrasa bez oczekiwań cenowych, z równaniem dynamiki cen (8). Przyjrzyjmy się mu bliżej. Zauważmy, że jeżeli w gospodarce obserwujemy typowe reakcje konsumentów na zmiany cen towarów, tzn. gdy wszystkie proste elastyczności cenowe $\frac{\partial \hat{z}_i}{\partial \hat{p}_i} \cdot \frac{\hat{p}_i}{\hat{z}_i}$ są ujemne, to elementy $a_{jj}$ na głównej przekątnej macierzy $A$ też są ujemne. Warunek (17) będzie zatem spełniony, gdy elementy te będą odpowiednio duże co do wartości bezwzględnej, przy relatywnie małych (bliskich zera) zarówno pozostałych elementach macierzy $A$, jak i wszystkich elementach macierzy $B$, $C$ oraz diagonalnej macierzy $\hat{\sigma}$. Element $(i, j)$ macierzy $A$, poza jej główną przekątną, informuje o ile zmieni się popyt na towar $i$, gdy wzrośnie cena faktyczna towaru $j$. Jeśli $a_{ij} > 0$, to mamy do czynienia z substytucją towaru $j$ przez $i$, gdy $a_{ij} < 0$, wówczas mamy do czynienia z towarami komplementarnymi. Natomiast element $(i, j)$ macierzy $B$ i $C$ informuje o wpływie, jaki na dzisiejszy popyt na towar $i$ będzie miał przewidywany wzrost ceny towaru $j$ jutro (w grupie konsumentów – macierz $B$, w grupie producentów – macierz $C$). Relatywnie małe (bliskie zera) wartości elementów poza główną przekątną macierzy $A$ oraz wszystkich elementów macierzy $B$, $C$, przy dużych co do wartości bezwzględnej ujemnych składowych $a_{jj}$ na głównej przekątnej macierzy $A$, są charakterystyczne dla „normalnej" gospodarki, w której (a) wzrost ceny towaru $i$ silniej wpływa na spadek popytu na ten towar niż na zmianę popytu na jakikolwiek inny towar, (b) na decyzje konsumentów i producentów silniej wpływają ceny bieżące niż przewidywane, hipotetyczne ceny przyszłe. Natomiast względnie małe wartości (dodatnie) diagonalnych elementów macierzy $\hat{\sigma}$ oznaczają, że stabilność gospodarki wymaga łagodnych zmian cen, bez ich gwałtownych skoków zarówno w górę, jak i w dół.

## 3. Wpływ oczekiwań cenowych

Twierdzenie 2 pozwala także na sformułowanie warunków stabilności (lokalnej) gospodarki konkurencyjnej z oczekiwaniami cenowymi, spełniającej układ równań (8)-(9). Ponieważ stabilność macierzy $D$ układu (12) jest dostatecznym warunkiem (co najmniej) lokalnej asymptotycznej stabil-

ności, zatem zgodnie z twierdzeniem 2 dla lokalnej stabilności gospodarki konkurencyjnej z cenami oczekiwanymi wystarczy, by

$$\forall j\left(\sum_{i=1}^{n-1}|d_{ij}|<1\right)$$

(por. (16)). Zważywszy na postać (13) macierzy $D$, łatwo sprawdzić, że warunek ten jest spełniony, gdy

$$\forall j\in\{1,\ldots,n-1\}\Big(\zeta_j^e+\zeta_j^f+|1+\hat{\sigma}_j(a_{jj}+\zeta_j^e b_{jj}+\zeta_j^f c_{jj})|+$$

$$+\sum_{i\neq j}\hat{\sigma}_i|a_{ij}+\zeta_j^e b_{ij}+\zeta_j^f c_{ij}|<1\Big), \qquad (18)$$

$$\forall j\in\{n,\ldots,2n-2\}\Big(|1-\zeta_j^e|+\sum_{i=1}^{n-1}\hat{\sigma}_i|(1-\zeta_j^e)b_{ij}|<1\Big), \qquad (19)$$

$$\forall j\in\{2n-1,\ldots,3n-3\}\Big(|1-\zeta_j^f|+\sum_{i=1}^{n-1}\hat{\sigma}_i|(1-\zeta_j^f)c_{ij}|<1\Big). \qquad (20)$$

Warunki te są zbieżne z warunkami (17), a więc typowe dla gospodarki „normalnej" z popytem silniej reagującym na zmianę cen bieżących niż przyszłych i łagodnymi wahaniami cen (duże co do wartości bezwzględnej wartości elementów diagonalnych macierzy $A$, bliskie zera wartości pozostałych elementów macierzy $A$ oraz macierzy $B$, $C$ i diagonalnej macierzy $\hat{\sigma}$). Dodatnie diagonalne elementy macierzy $\zeta^e$, $\zeta^f$ nie mogą być ani nadmiernie małe (bliskie zera), ani nadmiernie duże.

O związku warunków (18)-(20) gwarantujących globalną stabilność układu (12) z warunkami (17), zapewniającym globalną stabilność układu (14), mówi poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3.** *Istnieje taka liczba* $\varepsilon_1\in(0,1)$, *że jeżeli elementy diagonalnej macierzy* $\hat{\sigma}$ *są dostatecznie małe,*

$$\sum_i\hat{\sigma}_i|b_{ij}|<\varepsilon_2,$$

$$\sum_i\hat{\sigma}_i|c_{ij}|<\varepsilon_2, \qquad (21)$$

*gdzie* $\varepsilon_2$ *jest dowolnie wybraną liczbą dodatnią mniejszą od* $\varepsilon_1$, *a elementy diagonalnych macierzy* $\zeta^e$, $\zeta^f$ *spełniają warunki*:

$$\zeta_j^e+\zeta_j^f<\varepsilon_1, \tag{22}$$

$$\zeta_j^e>\varepsilon_2, \quad \zeta_j^f>\varepsilon_2, \tag{23}$$

*to stabilność układu* (14) *pociąga za sobą stabilność układu* (12).

**Dowód.** Wystarczy wykazać, że przy założeniach twierdzenia z warunku (17) wynikają warunki (18)-(20). Przyjmijmy oznaczenia:

$$\xi_j=|1+\hat{\sigma}_j(a_{jj}+b_{jj}+c_{jj})|+\sum_{i\neq j}\hat{\sigma}_i|a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}|,$$

$$\gamma_j=\zeta_j^e+\zeta_j^f+|1+\hat{\sigma}_j(a_{jj}+\zeta_j^e b_{jj}+\zeta_j^f c_{jj})|+\sum_{i\neq j}\hat{\sigma}_i|a_{ij}+\zeta_j^e b_{ij}+\zeta_j^f c_{ij}|.$$

Wykażemy najpierw, że jeżeli spełniony jest warunek (22), to z nierówności $\xi_j<1$ wynika nierówność $\gamma_j<1$, $j=1,\ldots,n-1$ (czyli zachodzi warunek (18)). Ponieważ $\zeta_j^e+\zeta_j^f<1$, więc (zważywszy, że $\zeta_j^e>0$ oraz $\zeta_j^f>1$) warunek $\xi_j<1$ pociąga za sobą nierówność

$$\gamma_j-\zeta_j^e-\zeta_j^f\leqslant\xi_j$$

(równość będzie zachodziła tylko, gdy $B=C=0$), zatem

$$\gamma_j\leqslant\xi_j+\zeta_j^e+\zeta_j^f<1$$

o ile tylko

$$\zeta_j^e+\zeta_j^f<1-\xi_j.$$

Niech

$$\varepsilon_1=\max\{1-\xi_j\}.$$

Wtedy $\gamma_j<1$, gdy tylko $\zeta_j^e+\zeta_j^f<\varepsilon_1$, tj. gdy zachodzi warunek (22).

Weźmy teraz dowolną dodatnią liczbę $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ i załóżmy, że diagonalne elementy macierzy $\hat{\sigma}$ są tak małe, iż zachodzi warunek (21). Wówczas

$$\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\sigma}_i |(1-\zeta_j^e) b_{ij}| < \varepsilon_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \hat{\sigma}_i |(1-\zeta_j^f) c_{ij}| < \varepsilon_2$$

dla $j=1,\ldots,n-1$ oraz dowolnych dodatnich diagonalnych macierzy $\zeta^e$, $\zeta^f$, spełniających warunek (22). Łatwo zauważyć, że warunki (19), (20) zachodzą, gdy diagonalne elementy macierzy $\zeta^e$, $\zeta^f$ spełniają ponadto warunek

$$\zeta_j^e > \varepsilon_2 \quad \text{oraz} \quad \zeta_j^f > \varepsilon_2, \quad j=1,\ldots,n-1,$$

tj. gdy zachodzi warunek (23), co kończy dowód twierdzenia.

Globalna stabilność układu (12) pociąga za sobą co najmniej lokalną stabilność układu (8)-(9), a globalna stabilność układu (14) oznacza przynajmniej lokalną stabilność układu (8). Przy założeniach twierdzenia 3, z lokalnej stabilności gospodarki konkurencyjnej bez oczekiwań cenowych wynika więc co najmniej lokalna stabilność gospodarki konkurencyjnej z oczekiwaniami cenowymi konsumentów i producentów.

Twierdzenie 3 pokazuje, że warunki stabilności gospodarki konkurencyjnej są podobne, bez względu na to, czy występują w niej oczekiwania cenowe konsumentów i producentów, czy też nie. Innymi słowy, w świetle naszego modelu oczekiwania cenowe nie mają istotnego wpływu na stabilność gospodarki konkurencyjnej.

## 4. Przykład numeryczny

Rozpatrzmy gospodarkę z 3 towarami, $l$ konsumentami i $m$ producentami, w której konsument $k$ kieruje się funkcją popytu postaci

$$f^k(p(t), p^e(t+1)) = \begin{pmatrix} a_1^k \sqrt{\dfrac{p_1^e(t+1)\, p_2(t)\, p_3^2(t)}{p_3^e(t+1)\,(p_1(t))^3}} \\ a_2^k \sqrt{\dfrac{p_2^e(t+1)\, p_1(t)\, p_3^2(t)}{p_3^e(t+1)\,(p_2(t))^3}} \\ a_3^k \sqrt{\dfrac{p_3^e(t+1)\, p_1(t)\, p_2(t)}{p_1^e(t+1)\,(p_3(t))^2}} \end{pmatrix},$$

z takimi nieujemnymi parametrami $a_1^k, a_2^k, a_3^k$, że $\sum_i a_i^k > 0, k=1,\ldots,l$. Łatwo zauważyć, że w każdym wypadku popyt reaguje silniej na zmiany cen bieżących niż przyszłych, których spodziewają się konsumenci. Ponadto wzrost bieżącej ceny każdego z towarów wywołuje wzrost popytu na pozostałe towary (zachodzi pełna substytucja towarów).

Każdy producent dostarcza na rynek towary zgodnie z funkcją podaży postaci

$$g^j(p(t),p^f(t+1)) = \begin{pmatrix} b_1^j \dfrac{p_1(t)p_3^f(t+1)}{p_1^f(t+1)p_3(t)} \\ b_2^j \dfrac{p_2(t)p_3^f(t+1)}{p_2^f(t+1)p_3(t)} \\ b_3^j \dfrac{p_3(t)p_1^f(t+1)}{p_3^f(t+1)p_1(t)} \end{pmatrix},$$

gdzie $b_1^j, b_2^j, b_3^j$ są nieujemnymi parametrami, $\sum_i b_i^j > 0, j=1,\ldots,m$. Tutaj wzrost ceny towaru wytwarzanego wpływa na zwiększenie jego podaży. Jeśli jednak producent spodziewa się wzrostu ceny w przyszłości, to dążyć będzie do ograniczania podaży po to, by w kolejnych okresach móc osiągnąć wyższe przychody ze sprzedaży.

Przyjmijmy, że

$$\sum_{k=1}^{l} a_1^k = 4, \quad \sum_{k=1}^{l} a_2^k = 4, \quad \sum_{k=1}^{l} a_3^k = 4{,}2172,$$

$$\sum_{j=1}^{m} b_1^j = 3, \quad \sum_{j=1}^{m} b_2^j = 5, \quad \sum_{j=1}^{m} b_3^j = 4.$$

Funkcja popytu nadwyżkowego przyjmuje wówczas postać

$$z(p(t),p^e(t+1),p^f(t+1)) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\sqrt{\dfrac{p_1^e(t+1)p_2(t)p_3^2(t)}{p_3^e(t+1)(p_1(t))^3}} - 3\dfrac{p_1(t)p_3^f(t+1)}{p_1^f(t+1)p_3(t)} \\ 4\sqrt{\dfrac{p_2^e(t+1)p_1(t)p_3^2(t)}{p_3^e(t+1)(p_2(t))^3}} - 5\dfrac{p_2(t)p_3^f(t+1)}{p_2^f(t+1)p_3(t)} \\ 4{,}2172\sqrt{\dfrac{p_3^e(t+1)p_1(t)p_2(t)}{p_1^e(t+1)(p_3(t))^2}} - 4\dfrac{p_3(t)p_1^f(t+1)}{p_3^f(t+1)p_1(t)} \end{pmatrix}.$$

Przypisując trzeciemu towarowi rolę pieniądza i zastępując ceny bezwzględne cenami względnymi, przedstawioną wyżej funkcję popytu nadwyżkowego możemy zapisać w postaci

$$\hat{z}(\hat{p}(t), \hat{p}^e(t+1), \hat{p}^f(t+1)) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1^e(t+1)\hat{p}_2(t)}{(\hat{p}_1(t))^3}} - 3\dfrac{\hat{p}_1(t)}{\hat{p}_1^f(t+1)} \\ 4\sqrt{\dfrac{\hat{p}_2^e(t+1)\hat{p}_1(t)}{(\hat{p}_2(t))^3}} - 5\dfrac{\hat{p}_2(t)}{\hat{p}_2^f(t+1)} \end{pmatrix}.$$

Wektor cen równowagi $\hat{\bar{p}} = \hat{\bar{p}}^e = \hat{\bar{p}}^f$ spełniający warunek $\hat{z}(\hat{\bar{p}}, \hat{\bar{p}}^e, \hat{\bar{p}}^f) = 0$ jest wówczas określony jednoznacznie:

$$\hat{\bar{p}} = (1{,}2647 \quad 0{,}8997)^T.$$

Aby zobrazować dynamikę względnych cen faktycznych oraz oczekiwanych, których dynamikę reguluje układ (8)-(9), przyjmiemy następujące diagonalne macierze $\hat{\sigma}$, $\zeta^e$, $\zeta^f$:

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} 0{,}175 & 0 \\ 0 & 0{,}088 \end{bmatrix}, \quad \zeta^e = \begin{bmatrix} 0{,}22 & 0 \\ 0 & 0{,}35 \end{bmatrix}, \quad \zeta^f = \begin{bmatrix} 0{,}39 & 0 \\ 0 & 0{,}33 \end{bmatrix}$$

oraz początkowe wektory cen:

$$\hat{p}(0) = (1{,}3 \;\; 0{,}75)^T, \quad \hat{p}^e(0) = (1{,}35 \;\; 0{,}8)^T, \quad \hat{p}^f(0) = (1{,}2 \;\; 1)^T.$$

Wyznaczając macierze pochodnych cząstkowych funkcji popytu nadwyżkowego zgodnie z (11) otrzymujemy:

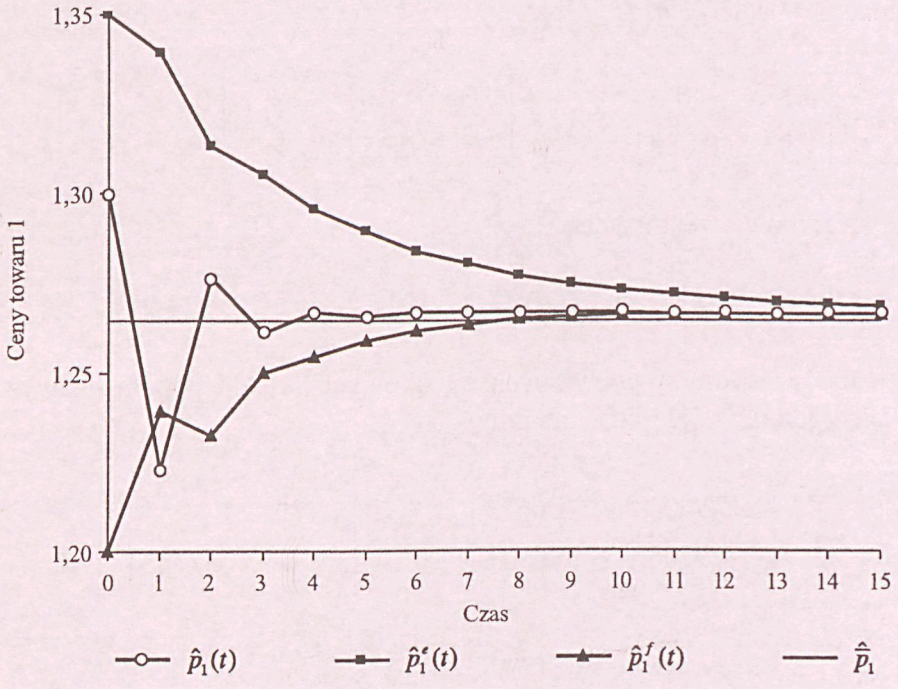
$$A = \begin{bmatrix} -5{,}9304 & 1{,}6673 \\ 1{,}9768 & -13{,}8941 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1{,}1861 & 0 \\ 0 & 2{,}7788 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2{,}3721 & 0 \\ 0 & 5{,}5576 \end{bmatrix}.$$

Macierz $D$ z układu (12) przyjmuje wówczas postać

$$D=\begin{bmatrix} 0{,}1697 & 0{,}2918 & 0{,}1619 & 0 & 0{,}2532 & 0 \\ 0{,}174 & 0{,}0243 & 0 & 0{,}1589 & 0 & 0{,}3277 \\ 0{,}22 & 0 & 0{,}78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}35 & 0 & 0{,}65 & 0 & 0 \\ 0{,}39 & 0 & 0 & 0 & 0{,}61 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0{,}67 \end{bmatrix}.$$

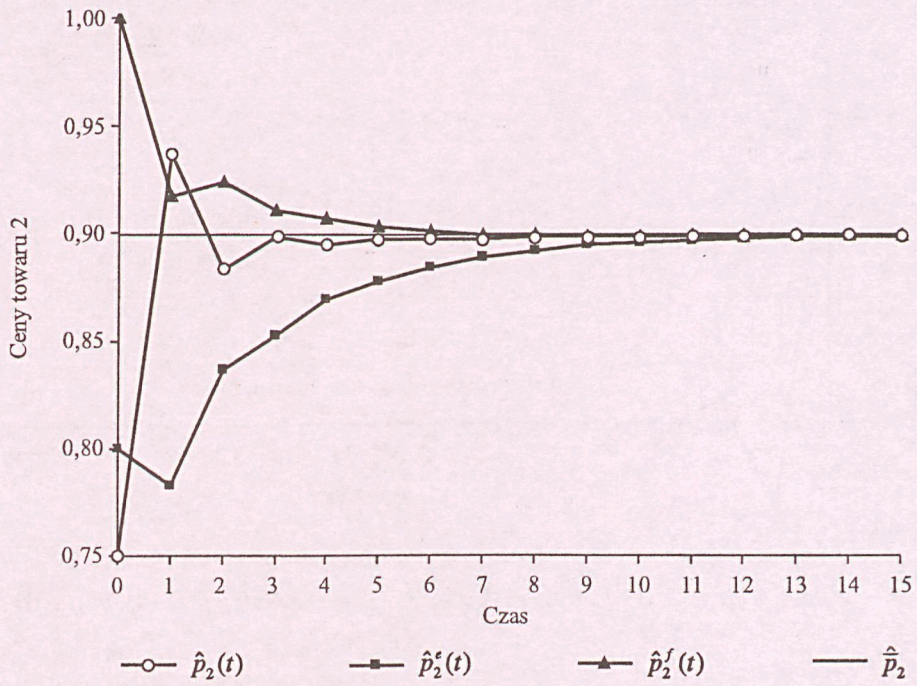
Norma $\|D\| = 0{,}9977 < 1$, co zgodnie z twierdzeniem 2 gwarantuje jej stabilność. To z kolei oznacza, że gospodarka jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilna w otoczeniu cen równowagi $\hat{\bar{p}}$ (twierdzenie 1). Zatem zarówno ceny faktyczne, jak i oczekiwane powinny w naszym przykładzie z upływem czasu dążyć do cen równowagi. Przebieg trajektorii cen ilustrują rysunki 1 i 2. Wyniki obliczeń podajemy w tabelach 1 i 2.




**Rys. 1. Trajektorie cen bieżących i oczekiwanych towaru 1 w horyzoncie $T=\{0,\ldots,15\}$**

**Tabela 1. Trajektorie cen bieżących i oczekiwanych towaru 1 w horyzoncie** $T=\{0,\ldots,15\}$

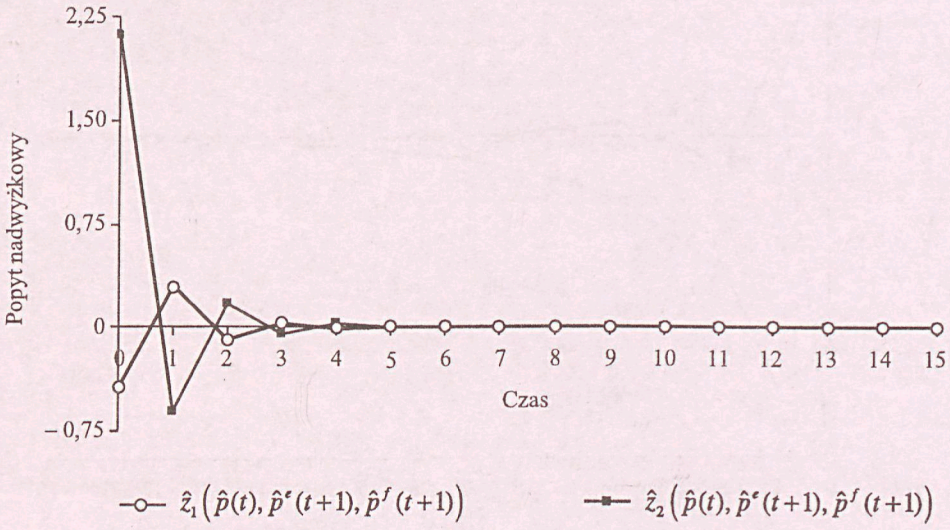
| $t$ | $\hat{p}_1(t)$ | $\hat{p}_1^e(t)$ | $\hat{p}_1^f(t)$ | $\hat{\bar{p}}_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,3 | 1,35 | 1,2 | 1,264673 |
| 1 | 1,222417 | 1,339 | 1,239 | 1,264673 |
| 2 | 1,276253 | 1,313352 | 1,232533 | 1,264673 |
| 3 | 1,261322 | 1,305190 | 1,249584 | 1,264673 |
| 4 | 1,266566 | 1,295539 | 1,254162 | 1,264673 |
| 5 | 1,265932 | 1,289165 | 1,258999 | 1,264673 |
| 6 | 1,266674 | 1,284054 | 1,261703 | 1,264673 |
| 7 | 1,266720 | 1,280230 | 1,263642 | 1,264673 |
| 8 | 1,266784 | 1,277258 | 1,264842 | 1,264673 |
| 9 | 1,266723 | 1,274954 | 1,265599 | 1,264673 |
| 10 | 1,266627 | 1,273143 | 1,266038 | 1,264673 |
| 11 | 1,266501 | 1,271709 | 1,266268 | 1,264673 |
| 12 | 1,266365 | 1,270564 | 1,266359 | 1,264673 |
| 13 | 1,266227 | 1,269640 | 1,266361 | 1,264673 |
| 14 | 1,266092 | 1,268889 | 1,266309 | 1,264673 |
| 15 | 1,265964 | 1,268274 | 1,266224 | 1,264673 |




**Rys. 2. Trajektorie cen bieżących i oczekiwanych towaru 2 w horyzoncie** $T=\{0,\ldots,15\}$

**Tabela 2. Trajektorie cen bieżących i oczekiwanych towaru 2 w horyzoncie** $T=\{0,\ldots,15\}$

| $t$ | $\hat{p}_2(t)$ | $\hat{p}_2^e(t)$ | $\hat{p}_2^f(t)$ | $\hat{\bar{p}}_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,75 | 0,8 | 1 | 0,899662 |
| 1 | 0,936921 | 0,7825 | 0,9175 | 0,899662 |
| 2 | 0,883227 | 0,836547 | 0,923909 | 0,899662 |
| 3 | 0,898833 | 0,852885 | 0,910484 | 0,899662 |
| 4 | 0,895074 | 0,868967 | 0,906639 | 0,899662 |
| 5 | 0,897221 | 0,878104 | 0,902823 | 0,899662 |
| 6 | 0,897403 | 0,884795 | 0,900974 | 0,899662 |
| 7 | 0,898009 | 0,889208 | 0,899796 | 0,899662 |
| 8 | 0,898354 | 0,892288 | 0,899206 | 0,899662 |
| 9 | 0,898673 | 0,894411 | 0,898925 | 0,899662 |
| 10 | 0,898916 | 0,895903 | 0,898841 | 0,899662 |
| 11 | 0,899116 | 0,896957 | 0,898866 | 0,899662 |
| 12 | 0,899275 | 0,897713 | 0,898949 | 0,899662 |
| 13 | 0,899403 | 0,898259 | 0,899056 | 0,899662 |
| 14 | 0,899504 | 0,898659 | 0,899171 | 0,899662 |
| 15 | 0,899584 | 0,898955 | 0,899281 | 0,899662 |




**Rys. 3. Trajektorie popytu nadwyżkowego na towary 1 i 2 w horyzoncie** $T=\{0,\ldots,15\}$

Konsekwencją zbieżności cen faktycznych i oczekiwanych do cen równowagi jest oczywiście zbieżność wielkości popytu nadwyżkowego do zera. Zbieżność tę prezentuje rysunek 3 oraz wyniki obliczeń zawarte w tabeli 3.

**Tabela 3. Trajektorie popytu nadwyżkowego na towary 1 i 2 w horyzoncie** $T=\{0,...,15\}$

| $t$ | $\hat{z}_1(\hat{p}(t), \hat{p}^e(t+1), \hat{p}^f(t+1))$ | $\hat{z}_2(\hat{p}(t), \hat{p}^e(t+1), \hat{p}^f(t+1))$ |
|---|---|---|
| 0 | −0,443331 | 2,124099 |
| 1 | 0,307636 | −0,610152 |
| 2 | −0,085322 | 0,177332 |
| 3 | 0,029965 | −0,042708 |
| 4 | −0,003621 | 0,024392 |
| 5 | 0,004239 | 0,002071 |
| 6 | 0,000266 | 0,006884 |
| 7 | 0,000365 | 0,003918 |
| 8 | −0,000351 | 0,003625 |
| 9 | −0,000548 | 0,002770 |
| 10 | −0,000719 | 0,002270 |
| 11 | −0,000777 | 0,001808 |
| 12 | −0,000791 | 0,001449 |
| 13 | −0,000769 | 0,001152 |
| 14 | −0,000731 | 0,000911 |
| 15 | −0,000681 | 0,000714 |

## Literatura


[1] Arrow K.J., Nerlove M., *A Note of Expectations and the Stability*, Econometrica 1958, 26.

[2] Enthoven A.C., Arrow K.J., *A Theorem on Expectations and the Stability of Equilibrium*, Econometrica 1956, 24.

[3] Hansen B., *Przegląd systemów równowagi ogólnej*, PWN, Warszawa 1976.

[4] Introligator M., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Clifs 1971.

[5] Karlin S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, Pergamon Press, London-Paris 1959.

[6] Lucas R.J., Stokey N., *Recursive Methods In Economic Dynamics*, Harvard University Press 1989.

[7] McKenzie P.J., Stokey N., *Classical General Equilibrium Theory*, The MIT Press, Cambridge, Mass.-London 2002.
[8] Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.

## A MODEL OF WALRASIAN COMPETITIVE ECONOMY WITH PRICE EXPECTATIONS

**Summary**

This paper presents a model of Walrasian competitive economy in which both demand for and supply of products depend not only on current prices but also on the future, expected ones. We prove that in such economy either consumers' or producers' price expectations do not affect its stability significantly.

Część druga

# Matematyka finansowa