Marcin BARTKOWIAK
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

WYKORZYSTANIE OPCJI DO ZABEZPIECZANIA PORTFELA AKCJI

Wstęp

W ostatnich latach na świecie, w tym także i w Polsce, można zaobserwować żywiołowy rozwój rynku pochodnych instrumentów finansowych, zwanych też derywatywami. Ich popularność związana jest z uniwersalnością. Derywatywy umożliwiają bowiem inwestorom szerokie możliwości działania: pozwalają zarówno na osłonę, czyli zabezpieczenie się przed niekorzystnymi zmianami cen na rynku (*hedging*), jak i na spekulację. W niniejszym artykule zwracamy uwagę na możliwość wykorzystania opcji (które są jednym z instrumentów pochodnych) do osłony przed ryzykiem zmiany ceny akcji.

1. Opcje – podstawowe pojęcia

Opcją nazywamy umowę pomiędzy nabywcą (posiadaczem) a sprzedawcą (wystawcą), dającą nabywcy prawo (ale nie obowiązek) do wykonania ściśle określonych transakcji ([5], s. 77).

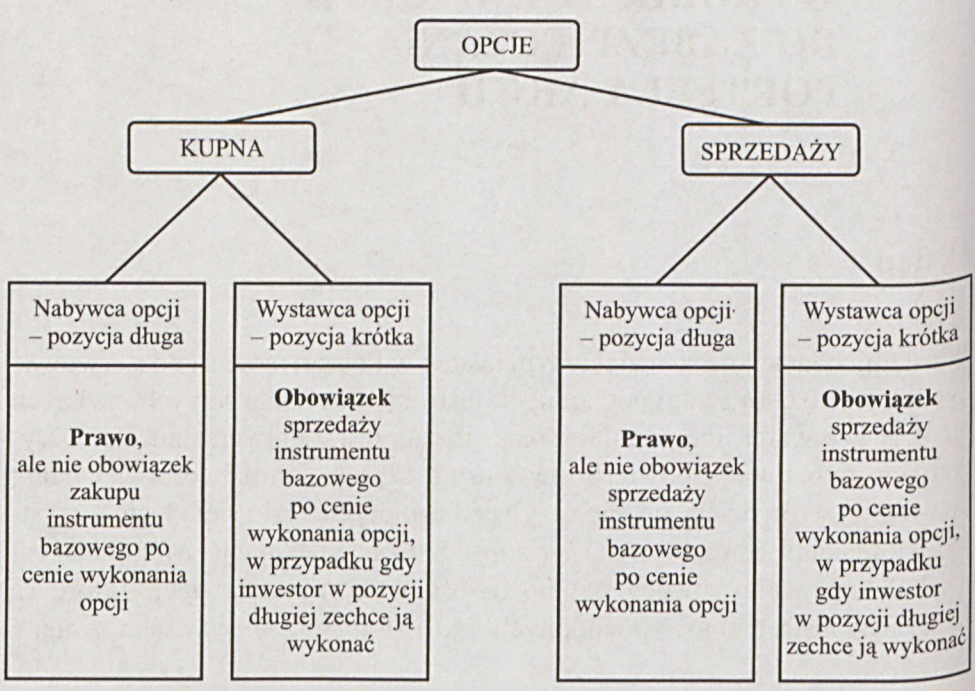
Walor, na który wystawiona jest opcja, nazywamy instrumentem bazowym (lub instrumentem pierwotnym).

Cena obowiązująca przy transakcji, na którą opiewa opcja, to cena wykonania (*striking price*).

Inwestor znajduje się w pozycji długiej, jeśli nabył opcję (kupna lub sprzedaży), a w pozycji krótkiej, gdy opcje wystawił.

Ze względu na rodzaj wykonywanej transakcji opcje dzieli się na:
- opcje kupna (*call option*),
- opcje sprzedaży (*put option*).

Na rysunku 1 w sposób syntetyczny przedstawiono prawa i obowiązki uczestników kontraktu opcyjnego, w zależności od rodzaju opcji i zajmowanych przez nich pozycji.



Rys. 1. Prawa i obowiązki inwestorów w pozycji krótkiej i długiej, wynikające z opcji kupna lub sprzedaży

Źródło: [4], s. 78

Ze względu na czas, w jakim opcja może zostać wykonana, można wyróżnić:
- opcje europejskie,
- opcje amerykańskie,
- opcje bermudzkie.

Wszystkie dalsze rozważania dotyczą opcji europejskich.

2. Funkcje dochodu opcji

Jak wynika z poprzedniego punktu, istnieją cztery kombinacje rodzaju opcji i zajmowanej pozycji. Przeanalizujmy, jak będzie kształtować się dochód inwestora w każdej z tych sytuacji. Przyjmijmy oznaczenia:

S_T – cena rynkowa instrumentu bazowego w chwili T,
K – cena realizacji opcji,
c – cena opcji kupna (w dniu zawarcia kontraktu opcyjnego),
p – cena opcji sprzedaży (w dniu zawarcia kontraktu opcyjnego).

Nabycie opcji kupna – pozycja długa (*long call*)

Posiadacz opcji zyskuje prawo do nabycia instrumentu bazowego po cenie K. Jeśli $S_T > K$, to warto skorzystać z opcji (na rynku za ten sam instrument bazowy trzeba zapłacić więcej), a zysk z takiej operacji wynosi $S_T - K$. Ponieważ za opcje kupna trzeba było zapłacić cenę c, więc kwota ta obniża zysk z transakcji. Jeśli natomiast $S_T \leqslant K$, to nie opłaca się realizować opcji (można nabyć walor na rynku taniej lub za tę samą cenę) i nabywca ponosi stratę w wysokości c. Dochód nabywcy opcji kupna wyraża się wzorem:

$$G_{lc} = \max(S_T - K, 0) - c.$$

Wystawienie opcji kupna – pozycja krótka (*short call*)

Wystawca opcji kupna ma obowiązek dostarczyć instrument bazowy po cenie K. Jeśli $S_T > K$, to posiadacz opcji zgłosi, że chce skorzystać ze swojego prawa, a wystawca poniesie stratę w wysokości $K - S_T$. Ponieważ za opcję wystawca otrzymał cenę c, zatem kwota ta zmniejsza wysokość straty. Jeśli natomiast $S_T \leqslant K$, to posiadacz nie zechce zrealizować opcji, a zatem zysk wystawcy będzie wynosić c. Dochód wystawcy opcji kupna wyraża się wzorem:

$$G_{sc} = \min(K - S_T, 0) + c.$$

Zakup opcji sprzedaży – pozycja długa (*long put*)

Posiadacz opcji sprzedaży skorzysta z przysługującego mu prawa sprzedaży instrumentu bazowego po cenie K, jeśli $K > S_T$ (wówczas za instrument bazowy otrzyma więcej niż na rynku). Zysk z tej transakcji będzie wynosić $K - S_T$, ale trzeba go pomniejszyć o cenę zakupu opcji sprzedaży p. W przypadku gdy $K \leqslant S_T$, realizacja opcji będzie dla

posiadacza nieopłacalna (na rynku za ten sam walor można uzyskać wyższą cenę), a więc poniesie stratę w wysokości ceny opcji p. Dochód nabywcy opcji sprzedaży wyraża się wzorem:

$$G_{lp} = \max(K - S_T, 0) - p.$$

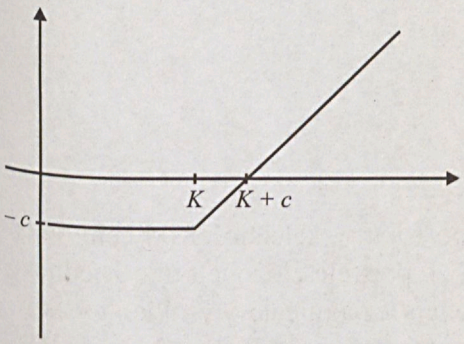
Wystawienie opcji sprzedaży – pozycja krótka (*short put*)

Wystawca opcji jest zobowiązany do kupna instrumentu bazowego po cenie K. Posiadacz opcji zrealizuje swoje prawo, jeśli $K > S_T$, a wtedy wystawca poniesie stratę w wysokości $S_T - K$. Stratę należy pomniejszyć o cenę p, jaką wystawca otrzymał za opcje. W sytuacji gdy $K \leqslant S_T$, posiadacz nie zdecyduje się na wykorzystanie swego prawa, co oznacza, że zysk wystawcy wyniesie p. Dochód wystawcy opcji sprzedaży wyraża się wzorem:

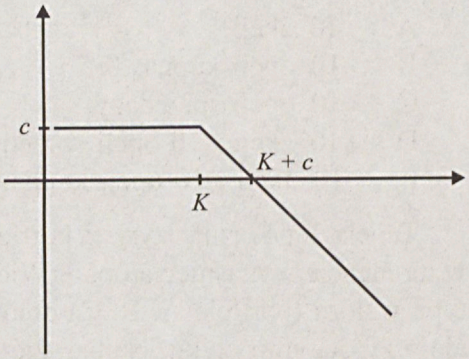
$$G_{sp} = \min(S_T - K) + p.$$

Wykresy zdefiniowanych wyżej funkcji dochodu przedstawione są na rysunkach 2-5. Można z nich wyciągnąć następujące wnioski:

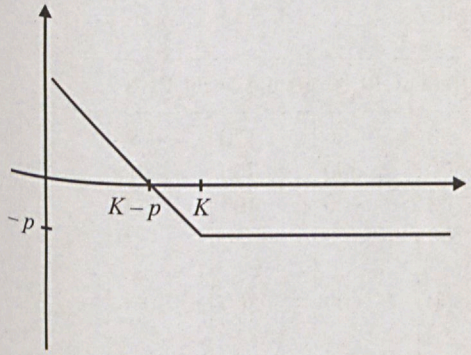
- nabywający opcję kupna osiąga zysk dopiero wtedy, gdy cena instrumentu bazowego przekroczy wartość $K + c$; potencjalny zysk jest nieograniczony,
- nabywający opcję sprzedaży osiąga zysk, jeżeli cena instrumentu bazowego spadnie poniżej $K - p$; potencjalny zysk jest ograniczony jedynie przez spadek ceny instrumentu pierwotnego do 0,
- strata kupującego opcję (zarówno kupna, jak i sprzedaży) jest ograniczona do wysokości ceny opcji,
- wystawiający opcję kupna poniesie stratę, jeżeli cena instrumentu bazowego przekroczy wartości $K + c$; wysokość straty jest nieograniczona,
- wystawiający opcję sprzedaży poniesie stratę, jeżeli cena instrumentu bazowego spadnie poniżej $K - p$; potencjalna wysokość straty jest ograniczona przez spadek ceny instrumentu pierwotnego do 0,
- zysk wystawiającego opcję (kupna i sprzedaży) jest ograniczony do wysokości ceny opcji.



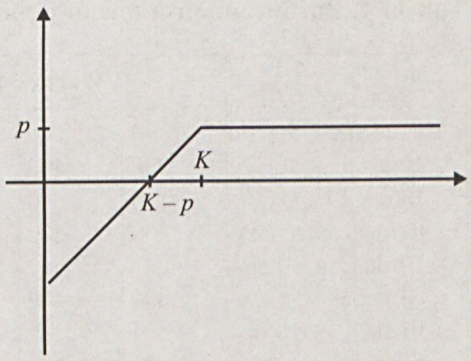
Rys. 2. Funkcja dochodu nabywcy opcji kupna



Rys. 3. Funkcja dochodu wystawcy opcji kupna



Rys. 4. Funkcja dochodu nabywcy opcji sprzedaży



Rys. 5. Funkcja dochodu wystawcy opcji sprzedaży

3. Osłona przed ryzykiem

Jednym z zastosowań opcji jest osłona przed ryzykiem nieprzewidywalnych zmian cen instrumentu bazowego. Prześledźmy na poniższym przykładzie, jakie możliwości dają opcje.

Przypuśćmy, że akcje spółki mają dziś cenę 50 PLN, a europejskie opcje kupna i sprzedaży, o dacie realizacji za rok i cenie wykonania 60 PLN, mają cenę 5 PLN[1]. Porównajmy następujące portfele, składające się z:

[1] Jeśli cena opcji wynosi 5 PLN, cena wykonania 60 PLN, a stopa wolna od ryzyka 18%, to w modelu Blacka-Scholesa odpowiada to współczynnikowi zmienności cen σ na poziomie 25%.

A. 10 akcji,
B. 10 opcji kupna,
C. 10 opcji sprzedaży,
D. 10 akcji i 10 opcji sprzedaży,
E. 10 akcji i 10 opcji kupna.

Tabela 1 pokazuje zysk z portfeli po roku w zależności od ceny akcji w momencie wygaśnięcia opcji. Widać, że portfele złożone tylko z jednego typu waloru (portfele A, B, C) umożliwiają osiągnięcie wysokich zysków, ale przy dużym ryzyku. Najbardziej jest to widoczne dla portfeli składających się jedynie z opcji (B i C) – zmiana ceny akcji o 1% w tym przykładzie powoduje zmianę przychodu z tych portfeli (o ile opcje, wchodzące w ich skład, są w cenie) o 10%.

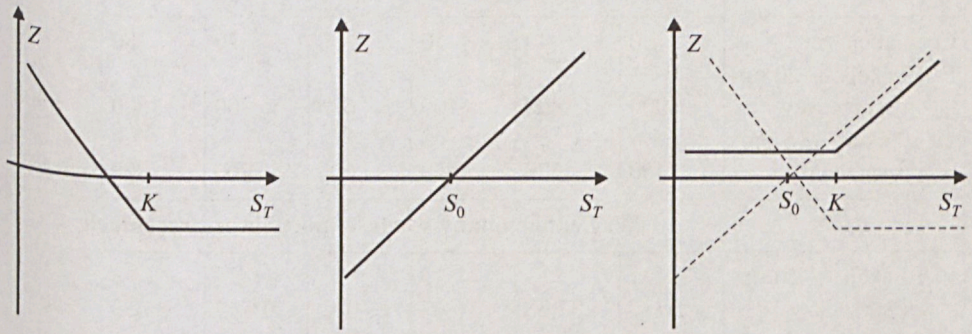
Tabela 1. Porównanie rentowności portfeli

	Wartość portfela w PLN, cena $S_0 = 50$ PLN						
Cena akcji	30	40	50	60	70	80	90
A. 10 akcji	300	400	500	600	700	800	900
B. 10 opcji kupna	0	0	0	0	100	200	300
C. 10 opcji sprzedaży	300	200	100	0	0	0	0
D. 10 akcji + 10 opcji kupna	300	400	500	600	800	1000	1200
E. 10 akcji + 10 opcji sprzedaży	600	600	600	600	700	800	900
	Względne zmiany wartości portfela w procentach						
A. 10 akcji	−40	−20	0	20	40	60	80
B. 10 opcji kupna	−100	−100	−100	−100	100	300	500
C. 10 opcji sprzedaży	500	300	100	−100	−100	−100	−100
D. 10 akcji + 10 opcji kupna	−45,45	−27,27	−29,09	9,09	45,45	81,82	118,18
E. 10 akcji + 10 opcji sprzedaży	9,09	9,09	9,09	9,09	27,27	45,45	63,64

Jednak w niekorzystnej sytuacji strata na portfelach B i C może wynieść nawet 100%. W przypadku portfela złożonego z akcji i opcji kupna (D) też ponosimy wysokie ryzyko (wyższe niż w przypadku portfela A i niższe niż

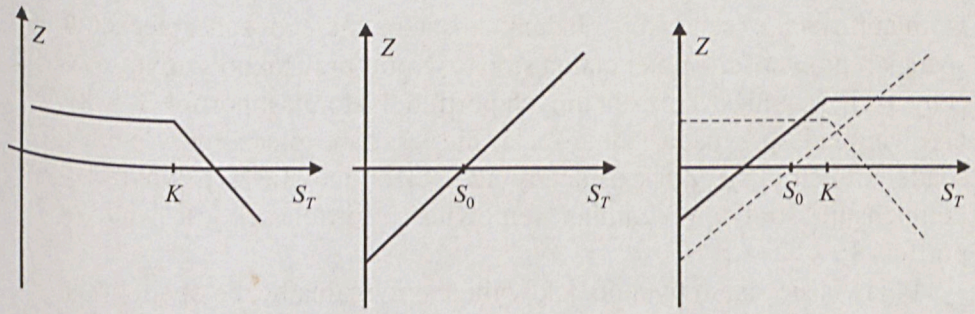
w B), mając w zamian wyższe możliwe zyski (wyższe niż z portfela A i niższe niż z B). Jedyny portfel (w tym przykładzie) zabezpieczający przed stratami to portfel złożony z akcji i opcji sprzedaży (E) – niekorzystne zmiany cen akcji są kompensowane przez wzrost wartości opcji. Jednak zyskując osłonę przed ryzykiem, tracimy na rentowności, potencjalne zyski z portfela E są niższe niż z portfeli A, B, C czy D.

Analizowany przykład wskazuje, że jednoczesne nabywanie kilku różnych instrumentów finansowych umożliwia uzyskanie korzystnych z punktu widzenia inwestora funkcji dochodu. Inwestor nabywający akcje, jest narażony na straty w przypadku spadku cen akcji. Stratę można ograniczyć, kupując opcje sprzedaży. Ilustruje to rysunek 6.



Rys. 6. Zabezpieczenie portfela akcji poprzez kupno opcji sprzedaży

Portfel akcji można również zabezpieczyć, wystawiając opcje kupna (pokazane jest to na rysunku 7), jednak ten typ zabezpieczenia jest mało skuteczny przy dużym spadku cen[2].



Rys. 7. Zabezpieczenie portfela akcji poprzez wystawienie opcji kupna

[2] Stosowanie takiej strategii jest bardziej wskazane w przypadku zabezpieczania się przez wystawcę opcji kupna.

Inwestor może zabezpieczyć swoją pozycję również w przypadku krótkiej sprzedaży akcji – kupując opcje kupna lub wystawiając opcje sprzedaży.

W dotychczasowych rozważaniach dotyczących zabezpieczania portfela akcji na jedną akcję przypadała jedna opcja. Możliwe są również strategie osłony ze współczynnikiem, w których stosunek liczby akcji do nabytych lub wystawionych opcji jest różny od 1. Przykłady takich strategii zostały podane w tabeli 2[3].

Tabela 2. Porównanie rentowności portfeli w strategiach ze współczynnikiem

	Wartość portfela w PLN, cena $S_0 = 50$ PLN						
Cena akcji	30	40	50	60	70	80	90
F. 10 akcji + 20 opcji sprzedaży	900	800	700	600	700	800	900
G. 10 akcji + 5 opcji sprzedaży	450	500	550	600	700	800	900
	Względne zmiany wartości portfela w procentach						
F. 10 akcji + 20 opcji sprzedaży	50	33,33	16,67	0	16,67	33,33	50
G. 10 akcji + 5 opcji sprzedaży	−14,29	−4,76	4,76	14,29	33,33	52,38	71,34

Widzimy, że w przypadku portfela F, w którym na jedną akcję przypadają dwie opcje kupna, zabezpieczenie jest lepsze niż w pozostałych portfelach, możliwe jest też osiąganie coraz to wyższych stóp zwrotu w miarę spadku cen akcji. Jednak kosztem takiego zabezpieczenia jest spadek rentowności – potencjalna stopa zwrotu (przy takim samym wzroście ceny akcji) jest niższa niż dla innych portfeli. Natomiast portfel G, w którym na dwie akcje przypada jedna opcja, nie jest zabezpieczony w pełni przed spadkiem cen akcji. Zysk osiągany na opcjach jedynie w pewnym stopniu kompensuje straty. W zamian rentowność portfela G jest większa niż portfela F.

Pojawia się zatem pytanie, jak wybrać optymalną liczbę opcji, przypadającą na jedną akcję. Odpowiedź na to pytanie można znaleźć, wyliczając współczynnik delta.

---

[3] Dane do tabeli 2 są takie same jak do tabeli 1.

4. Budowanie portfela na podstawie współczynnika *delta*

Stopień zmiany ceny opcji, a ogólniej, dowolnego portfela, w zależności od zmiany ceny podstawowego waloru (akcji) jest określony przez współczynnik *delta*. Mówi on o ile zmieni się wartość całego portfela przy jednostkowym wzroście ceny jednej akcji, przy czym dotyczy to tylko małych zmian ceny akcji [2]. Oznaczymy wartość portfela przez V, a jego zmianę odpowiadającą zmianie ΔS ceny akcji przez ΔV, mamy wówczas zależność:

$$\Delta V = delta \cdot \Delta S.$$

Jeśli portfel składa się z jednej akcji, to oczywiście jego *delta* jest równa 1. Jeśli mamy n akcji, to *delta* wynosi n (zmiana bowiem ceny akcji o 1 PLN oznacza zmianę wartości portfela o n PLN). *Delta* waloru, który nie zależy w ogóle od ceny podstawowej akcji, wynosi 0. Niezależność oznacza, że przy zmianie cen akcji cena waloru pozostaje taka sama (dotyczy to na przykład lokaty bankowej, która ma dynamikę niezależną od cen akcji). Matematycznie *delta* jest równa pochodnej funkcji wartości rozważanego instrumentu względem ceny pewnej akcji[4].

Zatem, by zbadać wrażliwość opcji na zmianę cen akcji, trzeba policzyć *deltę* portfela, składającego się z jednej opcji. Wzór na cenę europejskiej opcji kupna w modelu Balcka-Scholesa jest następujący:

$$c = S_T N(d) - Ke^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T}),$$

gdzie:

$$d = \frac{\ln \frac{S_T e^{rT}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

S_T – cena instrumentu bazowego w momencie wyceny opcji,
K – cena wykonania opcji,
r – stopa zwrotu wolna od ryzyka,
T – czas pozostały do wygaśnięcia opcji,
σ – odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego,
N – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

[4] Jest to zgodne z wcześniejszymi rozważaniami (gdy $f(S) = S$, wtedy $f'(S) = 1$, jeśli $f(S) = nS$, to $f'(S) = n$, jeśli $f(S) = c$, to $f'(S) = 0$).

Wartość opcji sprzedaży można wyliczyć ze wzoru:

$$p = c - S_T + \frac{K}{e^{rT}}.$$

Zatem *delta* opcji kupna (oznaczana jako *delta*(*c*)) jest pochodną ceny opcji kupna względem ceny S_T. Po nieskomplikowanych ale żmudnych rachunkach (S_T występuje w trzech miejscach) otrzymujemy, że pochodna ta jest równa $N(d)$. Natomiast *delta* opcji sprzedaży (*delta*(*p*)) jest pochodną ceny opcji sprzedaży względem ceny S_T i wynosi $N(d) - 1$[5].

By zabezpieczyć portfel akcji przed zmianami cen, na każdą akcję powinno przypadać $1/delta$ opcji.

Rozważmy następującą sytuację: kupujemy 10 akcji po cenie S_T, ale by zabezpieczyć się przed ryzykiem, wystawiamy $1/delta(c)$ opcji kupna na każdą akcję (w sumie wystawiamy $10/delta(c)$ opcji). Za każdą opcję kupna otrzymujemy cenę c (całkowita kwota wyniesie $10 \cdot (1/delta(c)) \cdot c$). Akcje kupujemy na kredyt (brakującą sumę B pożyczamy z banku). Wartość portfela wynosi[6]:

$$V = 10 \cdot S_T - \frac{10}{delta(c)} \cdot c - B,$$

a jego *delta* jest równa 0. Oznacza to, że przy małych zmianach cen akcji wartość tego portfela nie powinna ulec zmianie.

Niech[7]:

$r = 6\%$,
$K = 50$ PLN,
$S_T = 50$ PLN,
$T = 90$ dni $= 90/365$,
$\sigma = 30\%$.

Po podstawieniu tych danych do wzorów (6)-(9) otrzymujemy cenę opcji równą 2,841 PLN, a jej *deltę* równą 0,5719. Oznacza to, że trzeba wystawić 17,48 opcji[8], za które otrzymamy 49,6759 PLN. Za akcje należy zapłacić

[5] $N(d) - 1 = N(-d)$.

[6] Wystawienie opcji sprzedaży oznacza zobowiązanie finansowe, stąd minus we wzorze.

[7] Przyjmując oznaczenia takie same jak we wcześniejszych wzorach.

[8] Zzakładamy, że opcje są doskonale podzielne.

500 PLN, brakującą kwotę 450,3241 PLN pożyczamy w banku. Zatem wartość portfela jest równa:

$$V = 10 \cdot 50 - 17{,}48 \cdot 2{,}841 - 450{,}324 = 0.$$

Jak zmieni się wartość portfela po jednym dniu, jeśli pozostałe dane nie ulegną zmianie? Spadnie wartość opcji (bo uległ skróceniu czas, pozostały do jej realizacji) do 2,8232 PLN. Zmieni się również dług w banku – ulegnie zwiększeniu o odsetki i wyniesie 450,3981 PLN. Ostatecznie wartość portfela wyniesie:

$$V = 10 \cdot 50 - 17{,}48 \cdot 2{,}8232 - 450{,}3981 = 0{,}3113.$$

W tabeli 3 przedstawione zostały ceny opcji kupna i wartości portfeli po jednym dniu w zależności od ceny akcji. Przy niewielkich zmianach cen, zmiany wartości portfela są również nieduże.

Tabela 3. Wartości portfela w zależności od ceny akcji

S	*c*	*V*
48,00	1,8150	−1,9810
48,50	2,0389	−0,9750
49,00	2,2840	−0,2597
49,50	2,5455	−0,1676
50,00	2,8232	0,3113
50,50	3,1169	0,1770
51,00	3,4260	−0,2276
51,50	3,7500	−0,8935
52,00	4,0884	−1,8105

W idealnym modelu nie powinniśmy mieć ani zysków, ani strat. Źródłem różnic jest fakt, że w obliczeniach wykorzystany został wzór Blacka-Scholesa, który wyprowadzony jest dla ciągłych zmian cen ([2], s. 131). To powoduje ciągłą zmianę współczynnika *delta*, a co za tym idzie $1/delta$, który informuje ile powinniśmy mieć w danej chwili opcji, żeby zneutralizować portfel. Ze względu na koszty transakcji nie możemy często zmieniać portfela. W rozpatrywanym przykładzie portfel nie był zmieniany przez cały dzień.

Tabela 4 prezentuje ceny opcji kupna i wartość portfela w przypadku względnie dużych zmian cen. Duże straty spowodowane są tym, że *delta* informuje o wrażliwości portfela na małe zmiany cen akcji[9].

Tabela 4. Wartości portfela w zależności od ceny akcji (duże zmiany cen)

S	c	V
30	0,00003	−150,3246
40	0,1028	−52,1213
50	2,8232	0,3113
60	10,8937	−40,6270
70	20,7309	−112,8082

Przeprowadzona analiza nie jest pełna. Przedstawione zostały jedynie pewne aspekty osłony przed ryzykiem. Celem było wskazanie na możliwości zabezpieczania się przed zmianą ceny akcji za pomocą opcji, przy wykorzystaniu współczynnika *delta*. Założono, że pozostałe wielkości, mające wpływ na cenę opcji (stopa procentowa, odchylenie standardowe), nie podlegają zmianom, choć oczywiście jest możliwe przeprowadzenie podobnej analizy dla tych wielkości.

Literatura

[1] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 1973, nr 81.
[2] Capiński M., *Osłona przed ryzykiem*, w: *Instrumenty pochodne. Sympozjum matematyki finansowej*, Universitas, Kraków 1998.
[3] Ford D., *Opcje giełdowe*, K. E. Liber, Warszawa 1997.
[4] *Instrumenty pochodne: wprowadzenie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.
[5] Tarczyński W., *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawniczo-Poligraficzna Placet, Warszawa 1999.

[9] Pochodna służy do szacowania zmian wartości funkcji i daje tym lepsze przybliżenie, im przyrost argumentu jest mniejszy.

OPTIONS AS A SHARE PORTFOLIO PROTECTION

Summary

The article comments on the possibility of utilising options as a tool which protects share portfolios from the share prices fluctuations. The author explains the meaning of the basic financial terms connected with the options and analyses the effect of introducing the options into a share portfolio. In the analysis the delta index has proved to be a tool which protects portfolios in a most efficient way. This thesis has been supported by sample calculations presented in the article.