Część II

EKONOMIA MATEMATYCZNA, ZASTOSOWANIA MATEMATYKI

Marian Matłoka

STAN RÓWNOWAGI W INTERWAŁOWYM MODELU EKONOMICZNYM Z OGRANICZENIAMI

I. Wstęp

Praca ta stanowi kontynuację badań rozpoczętych w pracach [4] - [8]. Zdefiniowane w pracach [5] i [8] odpowiednio interwałowo - deterministyczny i interwałowo - probabilistyczny modele ekonomiczne z ograniczeniami stanowić będą punkt naszych zainteresowań. Podobnie jak w modelach klasycznych ([1] - [3]) wprowadzimy ważne charakterystyki - tempa wzrostu oraz stan równowagi.

II. Technologiczne i ekonomiczne tempo wzrostu

Niech M oznacza interwałowo - deterministyczny lub interwałowo-probabilistyczny model ekonomiczny z ograniczeniami.

DEFINICJA 2.1. Tempem wzrostu procesu $(x,y) \in N$ nazywamy liczbę $\alpha(x,y)$ określoną formułą

$$\alpha(x,y) = \sup\{\alpha \mid \alpha x \leqslant y\}.$$

Jeżeli $x \neq 0$ to $\alpha(x,y) < \infty$. Oczywiste jest, że $\alpha(0,0) = \infty$.

Niech $I_x = \{ i \in I : x^i > 0 \}$.

Stosując powyższe oznaczenia można zapisać, że tempo wzrostu procesu (x,y) jest równe

$$\alpha(x,y) = \min_{i \in I} \frac{y^i}{x^i} = \min_{i \in I_x} \frac{y^i}{x^i}.$$

DEFINICJA 2.2. Liczbę $\alpha(M) = \max_{\substack{(x,y)\in M \\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x,y)$ nazywamy technologicznym tempem wzrostu interwałowo-deterministycznego lub interwałowo-probabilistycznego modelu ekonomicznego z ograniczeniami.

TWIERDZENIE 2.1. (o istnieniu technologicznego tempa wzrostu modelu M). W modelu M istnieje proces $(\bar{x},\bar{y})$ taki, że $\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \alpha(M)$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że funkcja α określona na $Co(M)$ formułą $\alpha : (x,y) \longrightarrow \alpha(x,y)$ jest półciągła z góry. Niech $(x^{(n)}, y^{(n)}) \in Co(M)$ i niech $(x^{(n)}, y^{(n)}) \longrightarrow (x,y)$. Nie ujmując ogólności możemy założyć, że $x \neq 0$. Weźmy dowolny graniczny element $\bar{\alpha}$ ciągu $\alpha(x^{(n)}, y^{(n)})$ i wybierzmy z ciągu $((x^{(n)}, y^{(n)}))$ podciąg $((x^{n_k}, y^{n_k}))$, dla którego $\lim \alpha(x^{n_k}, y^{n_k}) = \bar{\alpha}$. Z określenia tempa wzrostu procesu mamy

$$\alpha(x^{n_k}, y^{n_k})\, x^{n_k} \leqslant y^{n_k}. \tag{2.1}$$

Z (2.1) wynika, że $\alpha < \infty$ (w przeciwnym wypadku $x = 0$). Przechodząc w (2.1) do granicy otrzymujemy, że $\bar{\alpha}\, x \leqslant y$, a stąd wynika, że $\bar{\alpha} \leqslant \alpha(x,y)$. Ponieważ $\bar{\alpha}$ był dowolnym, granicznym elementem ciągu $(\alpha(x^{(n)}, y^{(n)}))$, to $\overline{\lim}\, \alpha(x^{(n)}, y^{(n)}) \leqslant \alpha(x,y)$.

Pokazaliśmy, że funkcja $\alpha(x,y)$ jest półciągła z góry. Zauważmy, że $\alpha(x,y) = \alpha(\lambda x, \lambda y)$ dla $\lambda > 0$. Zatem:

$$\max_{\substack{(x,y)\in Co(M) \\ \|(x,y)\|=1}} \alpha(x,y) = \max_{\substack{(x,y)\in Co(M) \\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x,y) = \max_{\substack{(x,y)\in M \\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x,y).$$

Wykazaliśmy istnienie liczby $\alpha(M)$ a tym samym istnienie procesu $(\bar{x},\bar{y})$ takiego, że $\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \alpha(M)$.

Dotychczas rozpatrywaliśmy jedynie technologiczne aspekty modelu M. Zajmijmy się teraz stroną ekonomiczną. Rozważmy wektor cen $p \in (R_+^n)^*$,

DEFINICJA 2.3. Ekonomicznym tempem wzrostu procesu $(x,y) \in M$ nazywamy liczbę $\alpha_p(x,y)$ określoną formułą:

$$\alpha_p(x,y) = \sup\{\alpha_p \mid p(y) \geqslant \alpha_p \cdot p(x)\}.$$

Jeżeli $x \neq 0$ to $p(x) \neq 0$ i $\alpha_p(x,y) < \infty$. Oczywiste jest, że $\alpha_p(0,0) = \infty$.

DEFINICJA 2.4. Liczbę $\alpha_p(M) = \max_{\substack{(x,y)\in M \\ (x,y)\neq 0}} \alpha_p(x,y)$ nazywamy ekonomicznym tempem wzrostu modelu M ze względu na cenę p.

TWIERDZENIE 2.2. (o istnieniu ekonomicznego tempa wzrostu modelu M). W modelu M istnieje proces $(\bar{x},\bar{y})$ taki, że $\alpha_p(\bar{x},\bar{y}) = \alpha_p(M)$.

Dowód powyższego twierdzenia przeprowadza się analogicznie jak w przypadku twierdzenia 2.1 dowodząc półciągłość z góry funkcji α_p określonej formułą $\alpha_p : (x,y) \longrightarrow \alpha_p(x,y)$.

III. Stan równowagi modelu ekonomicznego z ograniczeniami

Z określenia technologicznego i ekonomicznego tempa wzrostu modelu nie wynika, że są one równe. Jeżeli ekonomiczne tempo wzrostu modelu przy cenach p jest mniejsze od technologicznego to oznacza, że ceny nie są zgodne z procesem, któremu odpowiada technologiczne tempo wzrostu. Jeżeli ekonomiczne tempo wzrostu modelu przy cenach p jest większe od technologicznego, to oznacza, że ceny nie są zgodne z technologią lub w modelu nie ma żadnego procesu, który by się rozwijał z tempem wzrostu większym od $\alpha_p(M)$.

DEFINICJA 3.1. Mówimy, że $(\alpha, p, (\bar{x}, \bar{y}))$, gdzie α oznacza liczbę większą od zera, p - wektor cen, $(\bar{x}, \bar{y})$ proces modelu M, określają stan równowagi modelu M jeżeli:

1) $\alpha \bar{x} \leqslant y$,
2) $\alpha p(x) \geqslant p(y)$ dla dowolnych $(x,y) \in M$,
3) $p(\bar{y}) > 0$.

Parę $(\bar{x}, \bar{y})$ nazywamy optymalnym procesem danego stanu równowagi a α tempem wzrostu stanu równowagi.

TWIERDZENIE 3.1. Jeżeli technologiczne tempo wzrostu procesu $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$ jest większe lub równe ekonomicznemu tempu wzrostu modelu ekonomicznemu M oraz $p(\bar{y}) > 0$, to $(\alpha(\bar{x}, \bar{y}), p, (\bar{x}, \bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu M.

Dowód. Niech $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ i $\alpha_p(M)$ oznaczają odpowiednio technologiczne tempo wzrostu procesu $(\bar{x}, \bar{y})$ i ekonomiczne tempo wzrostu modelu M. Z określenia $\alpha(\bar{x}, \bar{y})$ mamy

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \sup \{\alpha \mid \alpha \bar{x} \leqslant \bar{y}\} .$$

Stąd wynika pierwszy warunek stanu równowagi modelu M.
Zauważmy, że

$$\sup\{\alpha_p \mid p(y) \geqslant \alpha_p \cdot p(x)\} = \inf \{\alpha_p \mid p(y) \leqslant \alpha_p \cdot p(x)\} .$$

Z definicji ekonomicznego tempa wzrostu modelu wynika, że dla każdego procesu (x,y) tego modelu zachodzi następująca nierówność

$$p(y) \leqslant \alpha(M) \cdot p(x).$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla każdego $\alpha \geqslant \alpha(M)$. Stąd wynika, że spełniony jest także drugi warunek stanu równowagi. Otrzymaliśmy więc, że $(\alpha(\bar{x}, \bar{y}), p, (\bar{x}, \bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu M.

TWIERDZENIE 3.2. $(\alpha, p, (\bar{x}, \bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu M wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in < \alpha_p(M)$, $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) >$ i $p(\bar{y}) > 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\alpha \in < \alpha_p(M)$, $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) >$ i $p(\bar{y}) > 0$. Z twierdzenia 3.1 wynika, że dla $\alpha = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$ twierdzenie jest prawdziwe. Niech $\alpha \in < \alpha_p(M)$, $\alpha(\bar{x}, \bar{y}))$. Z określenia technologicznego tempa wzrostu mo-

delu wynika, że $\alpha \bar{x} \leqslant \bar{y}$ a więc pierwszy warunek stanu równowagi jest spełniony. Rozumując podobnie jak w odowodzie twierdzenia 3.1 dochodzimy do tego, że $(\alpha, p, (\bar{x},\bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu M.

Załóżmy teraz, że $(\alpha, p, (\bar{x},\bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu M. Z definicji technologicznego tempa wzrostu procesu $(\bar{x},\bar{y})$ i ekonomicznego tempa wzrostu modelu M mamy, że

$$\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \sup \left\{ \alpha \,\middle|\, \alpha \bar{x} \leqslant \bar{y} \right\} \text{ a stąd } \alpha \leqslant \alpha(\bar{x},\bar{y})$$

oraz

$$\alpha_p(M) = \max_{\substack{(x,y)\in M \\ (x,y)\neq 0}} \inf \left\{ \alpha_p \,\middle|\, p(y) \leqslant \alpha_p\, p(x) \right\}$$

a stąd wynika, że $\alpha \geqslant \alpha_p(M)$.

Łącząc obie nierówności otrzymujemy, że $\alpha \in < \alpha_p(M), \alpha(\bar{x},\bar{y}) > .$ Otrzymaliśmy więc prawdziwość twierdzenia.

Zauważmy, że przy ustalonych tempie wzrostu stanu równowagi, przy ustalonym wektorze cen może istnieć kilka procesów optymalnych danego stanu równowagi. Te procesy optymalne można podzielić na klasy abstrakcji wyznaczone przez przekształcenie u w następujący sposób:

- do danej klasy abstrakcji należą te procesy optymalne dla których przekształcenie u przyjmuje takie same wartości.

Niech $SP_{\alpha,p}$ oznacza zbiór wszystkich procesów optymalnych przy ustalonym tempie wzrostu stanu równowagi α i przy ustalonym wektorze cen p.

DEFINICJA 3.2. Mówimy, że $(\alpha, p, (\bar{x},\bar{y}))$, gdzie α oznacza liczbę większą od zera, p - wektor cen, $(\bar{x},\bar{y})$ - proces modelu M, określają optymalny stan równowagi modelu M jeżeli $(\alpha, p, (\bar{x},\bar{y}))$ jest stanem równowagi modelu oraz $u(\bar{x},\bar{y})$ jest granicznym z dołu elementem zbioru $u(SP_{\alpha,p})$.

Zauważmy, że każdy proces (x,y) należący do tej samej klasy abstrakcji co proces $(\bar{x},\bar{y})$ także określa optymalny stan równowagi modelu M. Parę $(\bar{x},\bar{y})$ nazywamy najlepszym optymalnym procesem danego stanu równowagi, a klasę abstrakcji, do której ten proces należy najlepszą klasą abstrakcji danego stanu równowagi.

Jeżeli zbiór $SP_{\alpha,p}$ jest jednoelementowy lub wszystkie elementy należą do tej samej klasy abstrakcji to każdy stan równowagi modelu jest optymalnym stanem równowagi tego modelu, a więc każdy proces optymalny danego stanu równowagi jest najlepszym optymalnym procesem tego stanu równowagi.

Z powyższych twierdzeń wynika, że w modelu M może nie istnieć stan równowagi a tym samym optymalny stan równowagi. Jednocześnie twierdzenia te pokazują, że tempo wzrostu stanu równowagi może być równe technologicznemu tempu wzrostu modelu. Zauważmy ważną własność technologicznego tempa wzrostu modelu.

TWIERDZENIE 3.3. Niech M oznacza interwałowo-deterministyczny lub interwałowo-probabilistyczny model ekonomiczny z ograniczeniami. Wtedy istnieje funkcjonał $\bar{p} > 0$ taki, że dla wszystkich $(x,y) \in M$

$$\bar{p}(y) \leqslant \alpha(M)\, \bar{p}(x),$$

gdzie $\alpha(M)$ oznacza technologiczne tempo wzrostu modelu M.

Dowód. Rozpatrzmy w przestrzeni R^n zbiór

$$C = \{ y - \alpha(M)\, x; \quad (x,y) \in M \}.$$

Ponieważ M jest zbiorem wypukłym to C także jest zbiorem wypukłym. Z określenia technologicznego tempa wzrostu modelu wynika, że $C \cap \operatorname{int} R^n = 0$ i dlatego istnieje funkcjonał $\bar{p}$ taki, że $\bar{p} \neq 0$ oraz $\max \bar{p}(z) = 0 = \min_{c \in R^n_+} \bar{p}(c)$. Funkcjonał p posiada potrzebne własności. Z twierdzenia 3.3 wynika, że $(\alpha(M), \bar{p}, (\bar{x},\bar{y}))$, gdzie $(\bar{x},\bar{y})$ oznacza proces taki, że jego tempo wzrostu jest równe $\alpha(M)$, $u(\bar{x},\bar{y})$ - jest granicznym z dołu elementem zbioru $u(SP_{\alpha(M)})$, $\bar{p}$ - funkcjonał występujący w twierdzeniu, posiada wszystkie własności optymalnego stanu równowagi oprócz warunku $\bar{p}(\bar{y}) > 0$. $SP_{\alpha(M)}$ oznacza zbiór wszystkich procesów modelu M, których tempo wzrostu jest równe $\alpha(M)$. Tym sposobem problem istnienia optymalnego stanu równowagi z tempem wzrostu równym $\alpha(M)$ sprowadza się do znalezienia funkcjonału $\bar{p}$ spełniającego warunek z twierdzenia 3.3 i takiego, że $\bar{p}(\bar{y}) > 0$ chociaż dla jednego procesu $(x,y) \in SP_{\alpha(M)}$.

Literatura

[1] Krass I.A.: Matematiceskije modeli ekonomiceskoj dinamiki, Izdatel'stwo "Sowietskoje radio", Moskva 1976.

[2] Łoś J.: Mathematical theory of von Neumann economic models, Warszawa 1977.

[3] Makarov V.L., Rubinov A.M.: Matematiceskaja teorija ekonomiceskoj dinamiki i ravnovesija, Izdatel'stwo „Nauka", Moskva 1973.

[4] Matłoka M.: Interwałowe przekształcenia punktowo - zbiorowe Zeszyty Naukowe AE w Poznaniu, Seria I, nr 97, (1981), 179-189.

[5] Matłoka M.: Interwałowo - deterministyczny model dynamiki ekonomicznej z ograniczeniami, Ibidem, nr 94 (1981), 146-154.

[6] Matłoka M.: Twierdzenie o istnieniu trajektorii technologicznej w interwałowo - deterministycznym modelu dynamiki ekonomicznej z ograniczeniami. Ibidem, w druku.

[7] Matłoka M.: Optymalne trajektorie technologiczne w interwałowo - deterministycznym modelu dynamiki ekonomicznej z ograniczeniami, Ibidem, Seria I, nr 115 (1984), s. 38-44.

[8] Matłoka M.: Interwałowo - probabilistyczny model dynamiki ekonomicznej z ograniczeniami, Ibidem, w druku.

The state of equilibrium in an interval economic model with limitations

Summary

Interval-deterministic and interval - probabilistic economic models with limitations are discussed in the paper. In these models technological and economic rate of growth is defined and the theorems on their existence are proved. Next, the notion of the state of the model equilibrium is introduced and the question of the existence of the equilibrium state is discussed.