Jerzy MARCINKOWSKI
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

RYZYKO DŁUGOTERMINOWYCH SEKWENCYJNYCH INWESTYCJI GIEŁDOWYCH

Wstęp

W pracy przedstawiono istotę ryzyka i problemy związane z jego pomiarem w przypadku długoterminowych inwestycji giełdowych o charakterze sekwencyjnym. Do oceny długoterminowego ryzyka inwestycyjnego niezbędne jest przyjęcie szeregu założeń, określających własności procesu generującego zmiany cen instrumentów finansowych w czasie. W artykule zostanie podana klasyfikacja procesów generujących przebieg cen. Jej podstawą jest wpływ rodzaju procesu na poziom ryzyka. Wpływ typu procesu na poziom ryzyka zostanie zilustrowany wynikami badań symulacyjnych.

1. Sekwencyjne procesy inwestycyjne

Rozważmy sekwencyjny proces inwestycyjny. W momentach $t=0, 1, \ldots$ inwestujemy kapitał C_t, nabywając Z_t jednostek instrumentu finansowego po cenie X_t, $Z_t=\frac{C_t}{X_t}$, $t=0, 1, \ldots$ Zakłada się brak kosztów transakcyjnych i prowizji. Przyjmuje się możliwość nabywania ułamkowej liczby jednostek instrumentu. Wartość portfela P_t w momencie t jest równa $s_t X_t$, gdzie s_t – ilość jednostek nabyta do momentu t.

Przez inwestycję jednorazową będziemy rozumieć inwestycję, polegającą na nabyciu Z jednostek instrumentu w momencie $t=0$.

Przedmiotem rozważań będzie przebieg wartości P_t, $t=0, 1, ..., T$. W wypadku inwestycji jednorazowej, tj. gdy $s_t=Z$, $t=0, 1, ...$ własności P_t są jednoznacznie określone przez X_t, a wartość portfela w momencie t zależy od liczby jednostek nabytych w momencie $t=0$ i ceny instrumentu w momencie $t>0$, nie zależy natomiast od ewolucji układu, tj. trajektorii X_t w przedziale $(0, T)$[1]. Dla inwestycji sekwencyjnej s_t dane jest wzorem

$$s_t=\sum_{j=0}^{t}\frac{C_j}{X_j}=\sum_{j=0}^{t}Z_j. \tag{1}$$

Własności s_t zależą w tym wypadku nie tylko od wartości X_t, ale i trajektorii określającej ceny X_t w przeszłości.

Analiza portfelowa koncentruje się na badaniu własności inwestycji jednorazowych, pomimo że inwestycje długoterminowe są w zdecydowanej większości wypadków inwestycjami sekwencyjnymi. Wykażemy, że w przypadku inwestycji sekwencyjnych należy zupełnie inaczej spojrzeć na istotę i pomiar ryzyka, zestawiając uzyskane wyniki z rezultatami uzyskanymi dla inwestycji jednorazowej.

Ryzyko inwestycyjne utożsamia się zazwyczaj z wybranymi parametrami rozkładu – najczęściej prostych lub logarytmicznych stóp zwrotu – a jego wielkość określa się, wyznaczając wartości parametrów rozkładów bądź ich funkcji dla danego okresu. Zaprezentowane podejście nie uwzględnia faktu, że proces inwestowania nie jest aktem jednorazowym, ale procesem rozłożonym w czasie. W przypadku inwestycji o charakterze sekwencyjnym dla oceny ryzyka inwestycyjnego nie wydaje się zasadne wykorzystywanie wartości parametrów rozkładu otrzymanego na podstawie analizy procesu generującego przebieg cen akcji.

Po pierwsze, wartość inwestycji w momencie t zależy od inwestycji poczynionych w okresach poprzednich, a rozkład wartości zgromadzonego w ten sposób kapitału może znacząco odbiegać od rozkładu charakteryzującego przebieg cen akcji.

Po drugie, brak jednoznacznego związku pomiędzy typem rozkładu stóp zwrotu a rodzajem procesu, generującego przebieg cen akcji. Gdybyśmy znali rodzaj procesu, moglibyśmy bez problemu wygenerować rozkład stóp zwrotu i rozkład wartości końcowej inwestycji. W praktyce na podstawie znajomości empirycznego rozkładu stóp zwrotu próbujemy wnioskować o typie procesu odpowiedzialnego za przebieg cen akcji.

[1] Rozpatrywane w artykule procesy stochastyczne mają ciągłe trajektorie, nas będą interesować wartości procesu w kolejnych jednostkach czasu.

Jest to postępowanie dość ryzykowne, gdyż trudno w praktyce określić, który z rozkładów teoretycznych stanowi najlepsze przybliżenie rozkładu empirycznego – trudno zatem stwierdzić, jaki proces generuje zmiany cen akcji, a właśnie on w dużym stopniu decyduje o typie rozkładu końcowej wartości inwestycji.

Pomiar ryzyka w przypadku inwestycji długoterminowych nie jest zadaniem trywialnym, w szczególności dla inwestycji sekwencyjnych. Ryzyko można pojmować na co najmniej dwa sposoby: utożsamiając je z nieokreślonością wartości portfela w momencie t lub ze zmiennością wartości portfela w przyjętym przedziale czasu. Nieokreśloności wartości portfela na dany moment – najczęściej utożsamianej z jego zmiennością – nie należy utożsamiać ze zmiennością wartości portfela w czasie, w szczególności w przypadku sekwencyjnych procesów inwestycyjnych.

Dokonując pomiaru ryzyka, będziemy korzystać z ceny instrumentu finansowego, a nie prostej bądź logarytmicznej stopy zwrotu. Jest to uzasadnione tym, że interesuje nas wartość portfela, a nie tylko stopa zwrotu, której wyznaczenie jest kłopotliwe w wypadku inwestycji sekwencyjnych. Ponadto nie istnieje jednoznaczny związek między średnią stopą zwrotu instrumentu finansowego w pewnym okresie a przyrostem wartości inwestycji sekwencyjnej w ten instrument w tym okresie.

2. Własności portfeli dla jednorazowych procesów inwestycyjnych

Analizę własności portfela przeprowadzimy w przypadku, gdy ceny instrumentu dane są przez autoregresyjne procesy losowe, wskazując na zalety i słabości wykorzystywania wyżej wymienionych procesów do modelowania przebiegu cen.

Rozważmy proces stochastyczny dany równaniem

$$\mu_t = \rho(\mu_{t-1} - \mu) + \mu + \xi_t, \qquad t = 1, \ldots, \ \mu_t > 0, \ \mu_0 = \mu, \quad \mu > 0 \tag{2}$$

gdzie $\xi_t (t = 1, \ldots)$ są zmiennymi losowymi o średniej 0 i odchyleniu standardowym równym σ_t.

Jeżeli ξ_t są niezależnymi identycznymi zmiennymi losowymi, to dla $\rho = 0$ równanie (2) jest równaniem białego szumu. Wykorzystywanie tego równania do opisu zachowania się cen akcji jest uzasadnione wtedy, gdy cena akcji w wyniku zaburzeń losowych odchyla się od niezmieniającej się

w czasie wewnętrznej wartości akcji. Założenie to nie jest spełnione, zwłaszcza dla długiego horyzontu inwestycyjnego, ze względu na nierealne w tych warunkach założenie o stabilności wewnętrznej wartości akcji. Ponadto rozkład μ_t jest przy tych założeniach niezmienniczy względem czasu, co implikuje, że wariancja ceny instrumentu finansowego nie zmienia się ze wzrostem t, tj. wydłużeniem horyzontu inwestycji, co jest założeniem mało realistycznym. Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa μ_t jest jednomodalny, to dla dowolnego $\mu_t = m$, $m > 0$ i większego od mody, prawdopodobieństwo że w momencie $t+1$ cena instrumentu przyjmie wartość o s większą niż w momencie t, będzie mniejsze od prawdopodobieństwa, że przyjmie o s mniejszą, co można zinterpretować w ten sposób, że dla dużej wartości instrumentu bardziej prawdopodobny jest spadek jego ceny niż wzrost. Jest to jedyny argument, przemawiający za wykorzystaniem białego szumu do opisu zmian wartości instrumentów finansowych.

Jeżeli $\rho = 1$ i ξ_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0, 1)$, to (2) jest równaniem procesu Wienera ([7], [9]), a μ_t mają rozkłady normalne $N(0, t)$. Ta własność procesu Wienera odzwierciedla w bardziej realistyczny sposób wzrost nieokreśloności μ_t, mierzony odchyleniem standardowym, rosnącej z wydłużaniem się horyzontu inwestycyjnego. Prawdopodobieństwa spadku i wzrostu wartości zmiennej w kolejnych okresach są sobie równe, tj. wynoszą $1/2$, i nie zależą od tego, jaką wartość przybrała zmienna μ_t w danym okresie, nawet jeżeli wartość ta znacząco – na skutek zmian czysto losowych – odchyliła się od wartości średniej. Z tego względu można kwestionować zasadność wykorzystywania procesu Wienera do opisu zmian cen instrumentów finansowych. Ponadto dla $t \to \infty$ odchylenie standardowe μ_t dąży do ∞, co może budzić pewne zastrzeżenia, gdyż nieokreśloność ceny instrumentu powinna rosnąć z wydłużeniem horyzontu, ale niekoniecznie do ∞. Można jedynie dowieść nieco słabszej własności.

Twierdzenie 1 ([9]). *Jeżeli X_t jest procesem Wienera, to*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} \to 0. \tag{3}$$

Korzystając z (3), nazywanym prawem wielkich liczb dla procesu Wienera, łatwo dowieść, że dla dowolnych dodatnich a, b

$$P(-at < X_t < bt) = 1 \text{ dla dostatecznie dużych } t. \tag{4}$$

Wybór pośredniej wartości ρ daje proces o własnościach określonych w twierdzeniu 2.

Twierdzenie 2 ([13]). *Jeżeli zmienne* μ_t *spełniają równanie* (2) *oraz* ξ_t $(t=1,...)$ *są identycznymi niezależnymi zmiennymi losowymi, to przy* $t \to \infty$ *odchylenie standardowe* μ_t *dąży do* $p<\infty$, *gdy* $0<\rho<1$ *oraz do* ∞, *gdy* $\rho=1$.

Z twierdzenia 2 wynika, że dla $0<\rho<1$ odchylenie standardowe $D(P_t)$ dąży do $\rho\sqrt{Z}$.

Dla $\rho=0$ wartość portfela jest równa

$$P_t=Z(\mu+\xi_t)=Z\mu+Z\xi_t,$$

gdyż dla $\rho=0$ zachodzi równość $\mu_t=\mu+\xi_t$.

Przy dodatkowym założeniu, że ξ_t mają średnią 0 i odchylenie standardowe równe σ, ryzyko portfela mierzone odchyleniem standardowym jego wartości w przypadku inwestycji jednorazowej w momencie t jest równe $\sigma\sqrt{Z}$ i jest niezmiennicze względem czasu, co wynika z identyczności i niezależności zmiennych ξ_t oraz definicji inwestycji jednorazowej. Prawdopodobieństwo, że P_t zawiera się w przedziale $[a, b]$ jest równe

$$P(a\leqslant P_t\leqslant b)=P(a\leqslant Z\xi_t\leqslant b)=P\left(\frac{a}{Z}\leqslant\xi_t\leqslant\frac{b}{Z}\right)=\Theta\left(\frac{b}{Z}\right)-\Theta\left(\frac{a}{Z}\right), \quad (5)$$

gdzie $\Theta(\cdot)$ oznacza dystrybuantę ξ_t. Prawdopodobieństwo zawierania się wartości portfela w przedziale $[a, b]$, ze względu na niezależność i identyczność ξ_t, nie zależy od t.

Prawdopodobieństwo że pomiędzy momentami t_1 i t_2 wartość portfela zmieni się o s jest równe

$$P(a-s\leqslant P_t\leqslant a+s)=P(a-s\leqslant Z\xi_t\leqslant a+s)=$$

$$=P\left(\frac{a-s}{Z}\leqslant\xi_t\leqslant\frac{a+s}{Z}\right)=\Theta\left(\frac{a+s}{Z}\right)-\Theta\left(\frac{a-s}{Z}\right), \quad (6)$$

gdzie a to wartość przyjmowana przez ξ_t dla $t=t_1$. Ze względu na niezależność i identyczność ξ_t nie zależy ono od wyboru momentu t_1 oraz różnicy t_2-t_1.

Dla każdego ρ oczekiwana wartość inwestycji dla każdego t jest równa μZ, co wynika z (2) i definicji inwestycji jednorazowej.

3. Własności portfeli dla sekwencyjnych procesów inwestycyjnych

Poddajmy analizie ryzyko inwestycji sekwencyjnej. Ze względu na długość horyzontu inwestycyjnego skoncentrujemy uwagę na asymptotycznych

własnościach mierników ryzyka. Ryzyko będziemy utożsamiać z nieokreślonością wartości portfela na dany moment lub zmiennością wartości portfela w przedziale czasu $[t_1, t_2]$.

Niezależnie od wartości przyjmowanej przez ρ, przy $t \to \infty$ oczekiwana wartość portfela $E(P_t)$ będzie dążyć do ∞, natomiast przeciętna liczba jednostek instrumentu nabywana w każdej jednostce czasu s_t/t do[2] $E(C_t)/\mu$.

Dla inwestycji sekwencyjnej i $\rho = 0$ można podać asymptotyczne własności rozkładu wartości portfela. Skorzystamy w tym celu z twierdzeń granicznych, mianowicie twierdzenia Lindeberga-Levy'ego i Lindeberga-Fellera ([7], [9]).

Jeżeli X_t są niezależnymi zmiennymi losowymi, to Z_t są zmiennymi niezależnymi dla dowolnych dodatnich C_t, a gdy ponadto założymy, że X_t są identyczne i $C_t = C$ dla $t = 0, \ldots$, to zmienne Z_t są nie tylko niezależne, ale także identyczne.

Rozważmy ciąg zmiennych losowych $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ o dystrybuantach $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ O zmiennych losowych zakładamy, że mają skończone wartości oczekiwane m_t i skończone, różne od 0, wariancje σ_t^2 $(t = 1, \ldots, n, \ldots)$[3].

Niech

$$\begin{aligned} \eta_n &= Z_1 + \ldots + Z_n, \\ M_n &= m_1 + \ldots + m_n, \\ B_n^2 &= \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2, \end{aligned} \tag{7}$$

oraz

$$\zeta_n = \frac{\sum_{t=1}^{n} (Z_t - m_t)}{B_n}. \tag{8}$$

Ciąg zmiennych losowych $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ spełnia warunek Lindeberga, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{t=0}^{n} \int_{|x - m_k| > \varepsilon B_n} (x - m_t)^2 \, dF_t(x) = 0. \tag{9}$$

Warunek ten – ogólnie mówiąc – powinien być spełniony dla każdego ciągu takich niezależnych zmiennych losowych, których wartości „mocno" koncentrują się wokół wartości oczekiwanej.

---

[2] Zakłada się, że C_t oraz Z_t są niezależne. Gdy C_t są zdeterminowane, $E(C_t)$ możemy zastąpić średnią tylko w przypadku, gdy $C_t = C$, $t = 0, 1, \ldots$

[3] Ponieważ Z_0 jest stałą, więc zmienne indeksujemy, zaczynając od 1.

Twierdzenie Lindeberga-Fellera ([7], [9]). *Jeżeli ciąg niezależnych zmiennych losowych* $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ *o dystrybuantach* $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ *spełnia warunek Lindeberga, to ciąg dystrybuant zmiennych losowych* (8) *jest zbieżny do dystrybuanty rozkładu normalnego* $N(0, 1)$.

Z powyższego twierdzenia wynika następująca ważna postać twierdzenia centralnego.

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego ([7], [9]). *Jeżeli niezależne zmienne losowe* $Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ *o identycznych rozkładach mają skończoną wartość oczekiwaną* m *i skończoną wariancję* σ^2, *to ciąg dystrybuant zmiennych losowych*

$$\zeta_n = \frac{\eta_n - n \cdot m}{\sigma \sqrt{n}} \tag{10}$$

jest zbieżny do dystrybuanty rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

W zależności od tego, czy $C_t = C$ czy też nie, korzystając z twierdzenia Lindeberga-Levy'ego lub Lindeberga-Fellera, możemy otrzymać oszacowania rozkładu wartości portfela dla dostatecznie dużych t. Na ich podstawie szacujemy wariancję wartości portfela oraz przedział, w którym z danym prawdopodobieństwem będzie zawierać się jego wartość. Problem dokładności oszacowania pozostaje sprawą otwartą.

Dla $0 < \rho \leqslant 1$, w szczególności dla procesu Wienera, niezależne są jedynie przyrosty zmiennych, a nie same zmienne – X_t są w tym przypadku zależne. Uniemożliwia to wykorzystanie przytoczonych twierdzeń do wyznaczenia asymptotycznych własności rozkładu wartości portfela.

Można jedynie udowodnić twierdzenie, określające własności s_t/t dla $t \to \infty$.

Twierdzenie 3 ([13]). *Jeżeli*

$$Z_t = \rho(Z_{t-1} - \omega) + \omega + \xi_t, \qquad t = 1, \ldots, \; Z_t > 0, \; Z_0 = \omega_0, \; \omega > 0, \tag{11}$$

oraz ξ_t $(t = 1, \ldots)$ *są identycznymi niezależnymi zmiennymi losowymi, to przy* $t \to \infty$ *odchylenie standardowe* s_t/t *dąży do stałej, gdy* $0 < \rho < 1$ *oraz do* ∞, *gdy* $\rho = 1$.

W tabeli 1 zestawiono oczekiwaną wartość lub oczekiwaną średnią liczbę jednostek nabywanego instrumentu finansowego oraz ryzyko inwestycji mierzone odchyleniem standardowym dla analizowanych w artykule rodzajów inwestycji i typów procesów autoregresyjnych.

Tabela 1. Oczekiwana wartość portfela lub oczekiwana średnia liczba nabywanych jednostek instrumentu i ryzyko inwestycji w zależności od rodzaju inwestycji i procesu generującego przebieg cen

Rodzaj inwestycji	Wartość współczynnika autokorelacji		
	$\rho=0$	$0<\rho<1$	$\rho=1$
Jednorazowa	$E(P_t)=\mu Z$ $D(P_t)=\sigma\sqrt{Z}$ $t=1,\ldots$	$E(P_t)=\mu Z,\ t=1,\ldots$ $\lim_{t\to\infty} D(P_t)=p\sqrt{Z},$ $p<\infty$	$E(P_t)=\mu Z,\ t=1,\ldots$ $\lim_{t\to\infty} D(P_t)=\infty$
Sekwencyjna	$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{s_t}{t}\right)=\frac{E(C_t)}{\mu}$ $\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{s_t}{t}\right)=p$ $p<\infty$	$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{s_t}{t}\right)=\frac{E(C_t)}{\mu}$ $\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{s_t}{t}\right)=p$ $p<\infty$	$\lim_{t\to\infty} E\left(\frac{s_t}{t}\right)=\frac{E(C_t)}{\mu}$ $\lim_{t\to\infty} D\left(\frac{s_t}{t}\right)=\infty$

4. Ocena zyskowności inwestycji długoterminowej

Powszechnie przyjmuje się, że skoro w przeszłości w długich okresach inwestycje giełdowe przynosiły relatywnie wysokie stopy zwrotu – wyższe niż obligacje i bony skarbowe – to zasadne jest przyjęcie założenia, że podobnie będzie w przyszłości, co ma uzasadniać celowość dokonywania długoterminowych inwestycji giełdowych przez inwestorów instytucjonalnych. Można wykazać, że przekonanie to opiera się na założeniu, że w długich okresach ceny akcji nie będą znacząco odchylać się od sekularnego wykładniczego trendu wzrostowego z nałożonym składnikiem losowym.

Analizę stabilności stopy zwrotu poprzedzimy krótką analizą wariancji wartości portfela P_t, której wyniki wykorzystamy do oceny ryzyka stopy zwrotu z inwestycji jednorazowej i sekwencyjnej dla wybranych procesów autoregresyjnych. Pełna analiza tego zagadnienia wykracza poza ramy artykułu, ograniczymy się więc do rozpatrzenia kilku szczególnych przypadków.

Rozważmy przypadek, gdy cena dana jest przez (2), $0\leqslant\rho<1$, a ξ_t są identycznymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej równej zeru i odchyleniu standardowym σ. Wówczas dla inwestycji jednorazowej przeciętną stopę zwrotu r otrzymuje się, rozwiązując równanie

$$P_t = P_0(1+r)^t. \tag{12}$$

Rozwiązaniem (12) jest

$$r = \left(\frac{P_t}{P_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1.$$

Dla inwestycji jednorazowej $P_t = ZX_t$, więc

$$r = \left(\frac{ZX_t}{Z}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = X_t^{\frac{1}{t}} - 1. \tag{13}$$

$X_t^{\frac{1}{t}} \to 1$ dla $t \to \infty$, skąd wynika (ze względu na skończoność odchylenia standardowego X_t), że $r \to 0$. Oznacza to, że dla $0 \leqslant \rho < 1$ z wydłużeniem się horyzontu inwestycji maleje zaburzający wpływ składnika losowego na stopę zwrotu. Otwartym problemem jest wpływ składnika losowego dla $\rho = 1$.

Jeżeli więc składnik losowy o podanych wyżej własnościach zostanie nałożony addytywnie na dowolny trend opisujący tendencję zmian ceny instrumentu finansowego, to przy wydłużającym się horyzoncie inwestycji będzie on wywierał malejący wpływ na stopę zwrotu, co nie musi być prawdą dla składników losowych danych przez dowolne procesy stochastyczne lub nałożone multiplikatywnie.

Jeżeli inwestycja będzie inwestycją sekwencyjną i wielkość inwestycji będzie stała (tj. $C_t = C$, $t = 0, ...$), to działanie składnika losowego, o ile przybiera on postać białego szumu nałożonego addytywnie na trend, będzie miało znaczenie marginalne, co wynika z twierdzenia Lindeberga-Fellera.

Istotnie, Z_t są w tym wypadku identycznymi zmiennymi losowymi o średniej m i odchyleniu standardowym σ, których suma ma dla dostatecznie dużych t rozkład asymptotycznie normalny $N(mt, \sigma\sqrt{t})$, a współczynnik zmienności jest równy $\frac{\sigma\sqrt{t}}{m} = \frac{\sigma}{m\sqrt{t}}$. Z tego, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma}{m\sqrt{t}} = 0, \tag{14}$$

wynika, że znaczenie odchylenia standardowego maleje z wydłużaniem się horyzontu inwestycji. W ogólnym wypadku wartość współczynnika zmienności nie musi dążyć do 0.

Jeżeli ceny instrumentu dane są przez procesy z pamięcią długoterminową, to cena instrumentu w momencie t może znacząco się różnić od

wartości z trendu. W takim wypadku wartość portfela dla inwestycji jednorazowej i sekwencyjnej może znacząco odbiegać od wyznaczonej na podstawie trendu.

Różnice te będą tym większe, im wolniej proces będzie powracał do średniej. Istnieje szereg mierników mierzących szybkość powrotu do średniej, takich jak persystencja czy też entropia. Ze względu na ograniczony zakres artykułu nie będziemy dalej rozwijać tego tematu.

Procesy opisujące zmiany cen instrumentów finansowych, w szczególności akcji, charakteryzują się niestabilną średnią i odchyleniem standardowym, silną autokorelacją krótkookresową i stosunkowo słabą autokorelacją długookresową oraz występowaniem quasi-cyklicznych zmian ([2], [4], [5], [6], [10], [12], [17]). Występowanie autokorelacji przejawia się tendencją do pojawiania się trendów. Oznacza to między innymi możliwość systematycznego osiągania stopy zwrotu z portfela wyższej od stopy zwrotu z indeksu giełdowego (reprezentującego portfel giełdowy) (np. [16]). Gdyby przebieg cen akcji był dany przez biały szum, nie byłoby możliwe uzyskiwanie w sposób systematyczny stopy zwrotu wyższej od stopy zwrotu z portfela rynkowego.

4.1. Wyniki badań symulacyjnych

W tabeli 2 podano sposoby generowania ceny jednostki instrumentu finansowego. Tabela 3 przedstawia wybrane parametry empirycznych rozkładów wartości końcowej portfela uzyskane po wykonaniu 1000 symulacji dla każdego sposobu kształtowania się ceny instrumentu finansowego. Zakłada się, że horyzont inwestycyjny wynosi 120 jednostek czasu (miesięcy). W każdym miesiącu inwestujemy 1000 zł, a początkowa wartość instrumentu finansowego (cena) równa się 100 zł.

Celem badań symulacyjnych była ocena wpływu rodzaju procesu generującego ceny instrumentu, trendu, oraz sposobu nałożenia zmian okresowych na rozkład wartości portfela.

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 3, łatwo zauważyć, że wszystkie rozkłady wartości końcowej portfela cechują się stosunkowo małym ryzykiem, mierzonym odchyleniem standardowym i współczynnikiem zmienności wyznaczanym jako iloraz odchylenia standardowego przez średnią.

Stosunkowo niewielkie znaczenie szumu nakładanego addytywnie na deterministyczny przebieg ceny wynika ze znoszenia się odchyleń losowych. Odchylenia te powodują, że raz kupujemy mniej, raz więcej jednostek

Tabela 2. Sposób generowania ceny instrumentu finansowego

Symulacja	Sposób generowania ceny
1	trend liniowy $p_t = 0{,}25(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$
2	trend liniowy $p_t = 0{,}25(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 2)$
3	trend liniowy $p_t = 0{,}25(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 3)$
4	trend liniowy $p_t = 0{,}5(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$
5	trend liniowy $p_t = 0{,}5(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 2)$
6	trend liniowy $p_t = 0{,}5(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 3)$
7	trend liniowy $p_t = 0{,}75(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 1)$
8	trend liniowy $p_t = 0{,}75(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 2)$
9	trend liniowy $p_t = 0{,}75(t-1)$, $p_1 = 100$, $t = 1, \ldots, 121$ z nałożonym addytywnie szeregiem czasowym danym przez realizacje niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0, 3)$
10	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $10\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{120}\right)$, $t = 1, \ldots, 121$
11	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $20\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{120}\right)$, $t = 1, \ldots, 121$

cd. tab. 1

Symulacja	Sposób generowania ceny
12	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $30\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{120}\right)$, $t=1,\ldots,121$
13	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $10\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
14	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $20\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
15	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $30\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
16	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $-10\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
17	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $-20\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
18	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 2 nałożone wahania okresowe dane przez funkcję $-30\sin\left(\frac{2\pi(t-1)}{240}\right)$, $t=1,\ldots,121$
19	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 3 nałożono addytywnie realizacje zmiennych losowych dane przez proces autoregresyjny drugiego rzędu o wartościach współczynników autoregresji równych 0,4 i 0,2
20	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 3 nałożono addytywnie realizacje zmiennych losowych dane przez proces autoregresyjny drugiego rzędu o wartościach współczynników autoregresji równych 0,6 i 0,2
21	na przebieg ceny instrumentu finansowego p_t z symulacji 3 nałożono addytywnie realizacje zmiennych losowych dane przez proces autoregresyjny drugiego rzędu o wartościach współczynników autoregresji równych 0,6 i 0,3

instrumentu, niemniej jednak w przypadku długiego horyzontu inwestycyjnego różnice te częściowo się znoszą (por. (14) i twierdzenie 3). Addytywnie nałożony składnik losowy wywiera tym mniejszy wpływ na odchylenie wartości końcowej portfela, im większą wartość przyjmuje współczynnik kierunkowy trendu – symulacje 1-9.

Wykorzystanie w symulacji procesów autoregresyjnych pozwala na zbadanie wpływu pamięci systemu mierzonej wielkością opóźnień i wartościami współczynników autokorelacji na charakterystyki portfela – symulacje 19-21. Jak można było się spodziewać, odchylanie się cen znacząco i przez dłuższe okresy od trendu, wpływa na wzrost odchylenia standardowego i współczynnika zmienności wartości końcowej portfela.

Sposób nałożenia wahań okresowych na trend liniowy z nałożonym zaburzeniem losowym nie wywarł istotnego wpływu na parametry rozkładów wartości portfela z wyjątkiem wartości średniej. W symulacjach 10-12 okres funkcji sinus jest równy okresowi inwestycji. W przypadku symulacji 13-18 okres funkcji sinus jest dwukrotnie większy od okresu inwestycji. Powoduje to istotne zmiany wartości końcowej portfela. W przypadku symulacji 10-18 składowa okresowa przyjmuje wartość zerową na początku i na końcu okresu inwestowania, podwyższając wartość końcową portfela dla symulacji 16-18 i obniżając ją w przypadku symulacji 13-15. Powoduje to, że możemy nabyć mniejszą (symulacje 13-15) lub większą (symulacje 16-18) liczbę jednostek, gdyż składowa okresowa powoduje podwyższenie (obniżenie) ceny instrumentu finansowego w okresie pomiędzy początkiem a końcem inwestycji.

Cena końcowa w przypadku symulacji 10-18 jest równa w przybliżeniu 130 zł (w przybliżeniu, gdyż zależy ona także od realizacji zmiennej losowej o rozkładzie $N(0, 2)$. Przeciętna roczna stopa zwrotu wynosi około 2,3%[4].

Wartość portfela zależy nie tylko i nie przede wszystkim od początkowej i końcowej ceny jednostki instrumentu, ale od przebiegu tej ceny w czasie. Średnia stopa zwrotu nie jest sensownym miernikiem zyskowności sekwencyjnych inwestycji długookresowych. W przypadku symulacji 10-18 jest niemalże identyczna (nieznaczne różnice wynikają z oscylacji ceny końcowej wokół 130 zł w związku z nałożeniem składnika losowego).

[4] Przeciętna stopa zwrotu została wyznaczona na podstawie (12), a nie jako średnia z (rocznych) stóp zwrotu. Dlatego nie zależy od trajektorii ceny instrumentu finansowego.

Tabela 3. Wybrane wartości parametrów rozkładów wartości końcowej portfela

Symulacja	Średnia	Minimum	Maksimum	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności (w %)	Skośność	Kurtoza
1	137572	134361	141155	1074	0,78	−0,0356	−0,0204
2	137564	131585	143519	2114	1,54	0,0113	−0,1634
3	137700	128356	148279	3163	2,30	−0,0172	−0,0342
4	151672	148674	154597	945	0,62	−0,0315	−0,1755
5	151718	146076	157380	1821	1,20	−0,0632	0,0405
6	151812	142884	163427	2998	1,97	0,0065	0,0583
7	164053	161145	166666	875	0,53	−0,0454	0,1043
8	163949	158944	171382	1769	1,08	0,0590	0,2240
9	164130	157242	174235	2605	1,59	0,0647	0,0263
10	137164	130706	143298	2044	1,49	−0,0452	−0,0745
11	137768	130821	145002	2240	1,63	−0,0944	−0,0152
12	139524	132115	146156	2170	1,56	0,0782	0,0071
13	130443	124547	136652	1963	1,51	−0,0600	0,1294
14	124338	117908	130492	1974	1,59	−0,0284	−0,0445
15	118807	113146	125308	1812	1,53	−0,0167	0,1259
16	145789	138539	152662	2230	1,53	−0,0224	−0,1605
17	155267	146281	162448	2427	1,56	0,0808	0,0619
18	166376	157808	176239	2703	1,62	0,1587	0,2905
19	137826	127582	150567	3687	2,68	0,1543	0,0135
20	138090	121686	153576	4870	3,53	−0,0358	−0,0780
21	138274	93150	189675	14007	10,13	−0,1031	0,2031

Znajomość średniej stopy zwrotu akcji nie pozwala na wyznaczenie średniej wartości portfela na dany moment, a przyjmowanie przez nią dużych wartości nie musi świadczyć o efektywności długookresowych sekwencyjnych inwestycji giełdowych. Może być ona miernikiem zyskowności inwestycji tylko w przypadku inwestycji jednorazowej i to pod warunkiem, że jest stabilna w długich okresach. Symulacje 13-15 i 16-18 wskazują, że dla końcowej średniej wartości portfela nie zawsze są istotne losowe zmiany cen, ale występowanie długookresowych trendów. To właśnie one są odpowiedzialne za liczbę nabytych jednostek instrumentu.

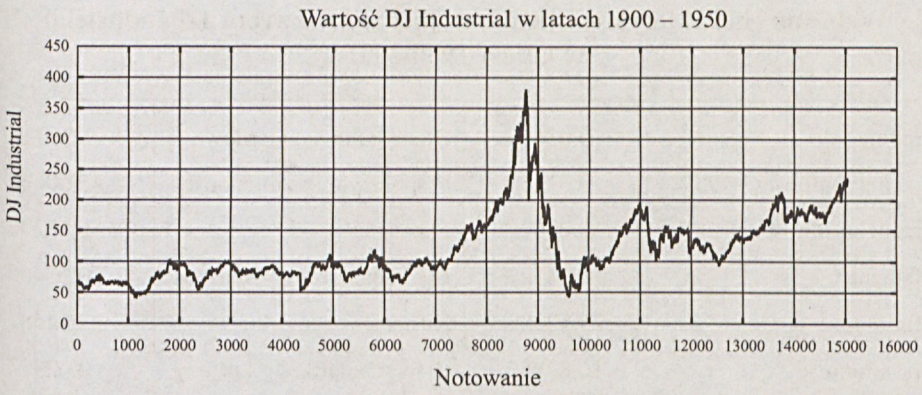
5. Przykład empiryczny

W celu ukazania jak duże mogą być wahania wartości indeksów w dłuższym okresie, na rysunkach 1 i 2 przedstawiono wykresy wartości DJ Industrial w latach 1900-1950 i 1950-2001, a w tabeli 3 podano nominalne średnioroczne stopy zwrotu z indeksu w okresach dziesięcioletnich. Przebieg indeksu uświadamia rolę zmian długookresowych. Rola zmian krótkookresowych ze względu na uprzednio podaną argumentację wydaje się niezbyt istotna.

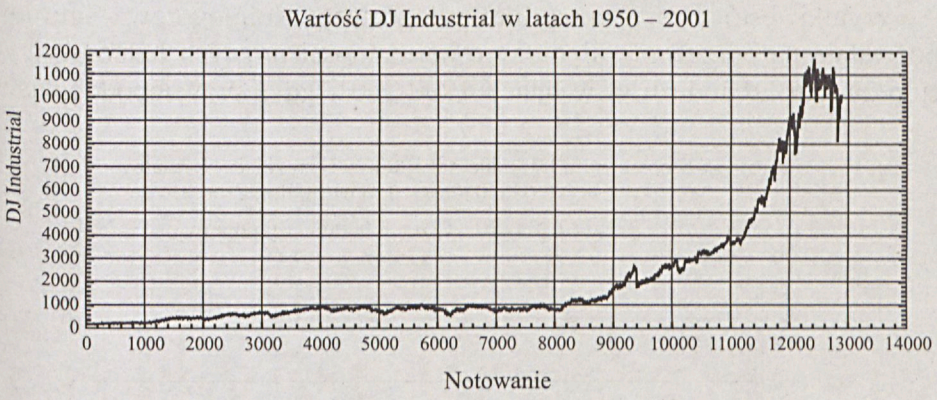
Jeżeli cena instrumentu podlega długookresowym, znaczącym wahaniom o okresie przekraczającym okres inwestycji, to rentowność instrumentu w przeszłości w bardzo długich okresach nie pozwala na wyciągnięcie żadnych sensownych wniosków, dotyczących zyskowności inwestycji w przyszłości – w przypadku inwestycji tak jednorazowej, jak i sekwencyjnej. Jakkolwiek przeciętna rentowność inwestycji giełdowych w ciągu 100 lat znacznie przekracza rentowność inwestycji w papiery rządowe, to waha się ona znacząco w okresach dwudziesto-czterdziestoletnich, tj. typowych okresach oszczędzania w funduszach emerytalnych.

Podważa to sensowność często przytaczanego argumentu o wyższej w długich okresach rentowności inwestycji giełdowych, mającego uzasadniać celowość funkcjonowania funduszy emerytalnych. Dokonywanie predykcji zyskowności jest szczególnie niebezpieczne w przypadku, gdy cena instrumentu dana jest przez proces, mający tendencję do odbiegania od średniej, cechujący się długoterminową pamięcią, a takie procesy, jak się wydaje, generują ceny akcji w długich okresach.

Tendencja do odbiegania procesu od średniej, która wpływa na zwiększenie zmienności wartości portfela i na rozbieżność między średnią stopą zwrotu indeksu giełdowego w okresie inwestycji a stopą zwrotu portfela w przypadku procesu sekwencyjnego stanowi uzasadnienie poszukiwania



Rys. 1. Przebieg wartości DJ Industrial w latach 1900-1950



Rys. 2. Przebieg wartości DJ Industrial w latach 1950-2001

Tabela 3. Średnioroczne nominalne stopy zwrotu DJ Industrial w okresach dziesięcioletnich

Okres	1900--1909	1910--1919	1920--1929	1930--1939	1940--1949	1950--1959	1960--1969	1970--1979	1980--1989	1990--1999
Stopa zwrotu (w %)	3,378	1,012	8,425	−4,667	2,769	13,065	1769	0,188	13,045	14,989

6. Problem pomiaru ryzyka

Jeżeli ceny dane są przez ciąg geometryczny $p_{t+1} = qp_t$, gdzie p_t jest ceną[7] akcji w okresie t, to prosta stopa zwrotu jest równa $q-1$. Istotnie,

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{qp_{t-1} - p_{t-1}}{p_{t-1}} = \frac{(q-1)p_{t-1}}{p_{t-1}} = q-1. \tag{15}$$

W przypadku logarytmicznej stopy zwrotu jest ona równa $\ln(q)$. Oznacza to stałość stopy zwrotu tylko wtedy, gdy ceny dane są przez ciąg geometryczny.

Jeżeli przebieg cen akcji jest dany przez pewną funkcję (bez nałożonego szumu), to ryzyko (niezależnie od wyboru miernika) powinno być równe zeru, bo o żadnej niepewności co do kształtowania się ceny akcji nie ma mowy. Jeżeli miernikiem ryzyka jest odchylenie standardowe, to dodatnia wartość odchylenia standardowego stopy zwrotu w pozostałych przypadkach, tj. gdy kształtowanie się cen akcji nie jest dane przez ciąg geometryczny, wynika nie z nieprzewidywalności ceny, ale własności stóp zwrotu. Rzeczywistą zmienność można więc wyznaczyć po elementarnym przekształceniu szeregu, polegającym na odjęciu trendu. Z wielu względów tak się nie czyni, niemniej jednak jest to równoważne z nieuwzględnieniem pewnej informacji i konsekwentnie prowadzi do przeszacowania rzeczywistej zmienności.

Analizując szeregi cen akcji, trudno w praktyce w sposób jednoznaczny określić, czy jest to szereg czysto losowy czy też szereg losowy z nałożonym trendem – niekoniecznie liniowym. Nawet jeżeli ewidentne jest występowanie trendu, to wybór postaci analitycznej trendu jest rzeczą dyskusyjną. Sprowadza się on do wyboru modelu ekonometrycznego „najlepiej" dopasowanego do wyników obserwacji. Ponieważ, ze względu na brak reguł pozwalających na jednoznaczny wybór modelu, trudno dokonać bezdyskusyjnego wyboru, nie można w sposób jednoznaczny ocenić zmienności szeregu, powstałego po odjęciu od szeregu wyjściowego uzyskanego trendu. Problem oceny ryzyka jest zatem nie tylko kwestią wyboru jego miernika, ale też problemów metodologicznych, związanych z eliminacją trendu z szeregu.

Stała stopa zwrotu sugeruje brak zmienności, a więc konsekwentnie brak ryzyka. Jeżeli ceny dane są przez ciąg geometryczny (w przypadku ciągłym

[7] Cena jest tutaj wielkością zdeterminowaną, dlatego oznaczamy ją przez p_t.

funkcję wykładniczą), to wzrost taki nie może trwać długo – zwłaszcza dla dużych q. Często, po dłuższym okresie wzrostu zbliżonego do wykładniczego, następuje gwałtowne załamanie. Tak więc posługiwanie się stopami zwrotu dla oceny ryzyka inwestycji długookresowych może prowadzić do doboru do portfela akcji, których cena może ulec załamaniu w okresie utrzymywania ich w portfelu.

Odchylenie standardowe nie zawsze jest właściwym miernikiem nieokreśloności ceny bądź stopy zwrotu w przyszłości. Rozważmy dwa szeregi cen akcji: pierwszy dany przez sinusoidę, drugi przez biały szum. Powiedzmy, że dla każdego szeregu odchylenie standardowe przyjmuje tę samą wartość. W pierwszym wypadku można podać cenę akcji w przyszłości, w drugim nie jest to możliwe. Wynika stąd, że wartość odchylenia standardowego nie może być traktowana jako miernik nieprzewidywalności ceny instrumentu finansowego. Niezbędna jest analiza stabilności średniej i zbadanie, czy szereg nie cechuje się quasi-cyklicznymi przebiegami maskowanymi przez komponentę losową. Dlatego też coraz większą popularność zyskują mierniki ryzyka, mierzące stopień „postrzępienia" wykresu, wywodzące się z teorii chaosu.

Jeżeli rozkład stóp zwrotu odbiega od normalnego – w szczególności cechuje się znaczną asymetrią lub/i spłaszczeniem – odchylenie standardowe nie stanowi najlepszego miernika oscylacji realizowanych stóp zwrotu wokół średniej. W wymienionych wyżej przypadkach miary ryzyka wyznaczane na podstawie momentów rozkładu mogą budzić zastrzeżenia nawet w przypadku inwestycji jednorazowej.

Występowanie „grubych ogonów" w rozkładach stóp zwrotu sugeruje, że proces generujący ceny akcji nie jest procesem nieobciążonego błądzenia przypadkowego. Wskazuje to na istnienie pamięci krótko- i długookresowej, której występowanie wpływa na wielkość ryzyka w sposób opisany w pracy.

Ze wskazanych wyżej powodów zarówno stopa zwrotu, jak i odchylenie standardowe (ceny i stopy zwrotu) nie są właściwymi miernikami zyskowności i ryzyka. Dlatego w pracy wykorzystywano cenę instrumentu oraz inne – oprócz odchylenia standardowego – mierniki ryzyka.

Podsumowanie

W pracy poddano analizie problem ryzyka długoterminowych inwestycji giełdowych. Dokonano podziału procesów inwestycyjnych na procesy jednorazowe – tj. takie, w przypadku których inwestycja następuje na

początku okresu inwestowania i sekwencyjne, w przypadku których lokata nowych środków finansowych następuje w kolejnych jednostkach czasu.

Dokonano analizy własności portfela budowanego w ramach inwestycji jednorazowych i sekwencyjnych dla wybranych procesów losowych, opisujących kształtowanie się cen akcji w czasie. Wyniki teoretyczne zilustrowano wynikami badań symulacyjnych. Przedstawiono krótką analizę własności indeksu DJ Industrial w latach 1900-2001 oraz prostych jednosesyjnych stóp zwrotu sugerującą istnienie pamięci i występowanie zjawiska autokorelacji.

Literatura

[1] Cootner P., red., *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge 1964.

[2] Domański Cz., *Testy statystyczne*, PWE, Warszawa 1990.

[3] Engle R., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation*, Econometrica 1982, no. 50.

[4] Fama E. F., *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*, w: P. Cootner (red.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge 1964.

[5] Fama E. F., *The Behavior of Stock Market Prices*, Journal of Business 1965, no. 38.

[6] Fama E. F., *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance 1970, no. 25.

[7] Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.

[8] Goszczyńska M., *Percepcja i akceptacja ryzyka. Psychologia i poznania*, PWN, Warszawa 1992.

[9] Jakubowski J., Sztencel R., *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, SCRIPT, Warszawa 2001.

[10] Konarzewska I., *Metody modelowania i prognozowania wartości instrumentów rynku kapitałowego*, w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '00*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice 2000.

[11] Marcinkowski J., *Problem pomiaru ryzyka inwestycyjnego i wpływ jego percepcji na kształtowanie się cen akcji*, w: E. Ignasiak (red.), *Optymalizacja decyzji, symulacja i prognozowanie procesów gospodarczych*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002.

[12] Marcinkowski J., *Analiza spektralna szeregów czasowych wartości wybranych indeksów na GPW w Warszawie*, w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '02*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice 2002.

[13] Marcinkowski J., *Ryzyko długoterminowych inwestycji giełdowych,* w: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie preferencji a ryzyko '03"*, Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice 2003.
[14] Purczyński J., Guzowska M., *Zastosowanie rozkładu alfa-stabilnego i rozkładu GED do modelowania rozkładu stóp zwrotu indeksu SP&500*, w: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. 1, Międzyzdroje 8-10 września 2002, Materiały i Konferencje 53, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2002.
[15] Siemieniuk N., *Fraktalne własności polskiego rynku kapitałowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2001.
[16] Sikora W., Juraszek R., *Czy długoterminowo można wygrać z rynkiem*, w: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. 1, Międzyzdroje 8-10 września 2002, Materiały i Konferencje 53, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2002.
[17] Ziemba D., *Zjawisko sezonowości i inne anomalia na rynkach kapitałowych*, w: *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. 2, Międzyzdroje 21-23 września 2000, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2000.

RISK OF LONG TERM STOCK INVESTMENT

Summary

In the paper the problem of risk measurement in the case of long term stock investment was investigated. It was demonstrated that risk depends on the type of investment and properties of autoregressive processes governing price fluctuations. Two types of investment were investigated : sequential and non-sequential. In the case of sequential processes capital is invested throughout the investment period, while in the latter case – only at the beginning. It was proved that in the case of sequential processes risk cannot be calculated on the basis of the rate of return distribution. The impact of autocorrelation and long term memory on investment risk was investigated. Theoretical results were confirmed by and illustrated with the results of simulation experiments.