Elżbieta RYCHŁOWSKA-MUSIAŁ
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

OPTYMALIZACJA WARTOŚCI PRZEDSIĘBIORSTWA W MODELU Z ZAPASAMI

Polityka w zakresie gospodarki zapasami jest ważnym elementem długookresowej strategii przedsiębiorstwa i ma istotny wpływ na efektywność jego funkcjonowania. Zagadnienia poruszane w artykule dotyczą problemu zapasów, powstających na wyjściu procesu produkcyjnego, czyli zapasów dystrybucyjnych. Rozważany jest dynamiczny model firmy i zadanie maksymalizacji wartości przedsiębiorstwa, w którym dopuszcza się możliwość sterowania poziomem sprzedaży. Strategia optymalna modelowego przedsiębiorstwa formułowana jest na dwóch płaszczyznach: gospodarki zapasami i polityki dywidendy.

1. Model

Rozważany będzie dynamiczny model przedsiębiorstwa, w którym zagregowany produkt jest efektem wykorzystania w procesie produkcyjnym dwóch czynników: pracy i trwałego majątku produkcyjnego. Zasoby pracy są w modelu nieograniczone – zakładamy, że firma w każdym momencie jest w stanie zatrudnić taką liczbę pracowników, aby w maksymalnym stopniu wykorzystać posiadany majątek produkcyjny (oznacza to natychmiastowe dostosowywanie się zasobów pracy do poziomu majątku), zatem:

$$L(t)=lK(t), \tag{1}$$

gdzie:

$K(t)$ – zasób majątku trwałego w momencie t,
$L(t)$ – poziom zatrudnienia w momencie t,
l – odwrotność technicznego uzbrojenia pracy ($l=\text{const}$, $l>0$).

Wielkość produkcji, jaką wytwarza przedsiębiorstwo, jest zatem funkcją wyłącznie poziomu majątku trwałego i zakładamy, że jest to zależność liniowa:

$$Q_W(t) = qK(t), \tag{2}$$

przy czym:

$Q_W(t)$ – wielkość produkcji wytworzonej w momencie t,

q – współczynnik produktywności majątku trwałego ($q = \text{const}$, $q > 0$).

W klasycznym modelu przedsiębiorstwa zakłada się, że cała wytworzona produkcja zostaje natychmiast sprzedana. Uchylenie tego założenia pozwala na rozważenie problemu utrzymywania zapasów w przedsiębiorstwie (por. [1], s. 102). Przyjęto, że firma może gromadzić zapasy, czyli zachowywać część wytworzonej produkcji lub też może się ich pozbywać, sprzedając więcej niż wytwarza w momencie t, zatem:

$$\dot{V}(t) = Q_W(t) - Q(t), \tag{3}$$

gdzie:

$\dot{V}(t)$ – przyrost stanu zapasów w momencie t (może być dodatni lub ujemny);

$Q(t)$ – wielkość sprzedaży w momencie t.

W zapisie księgowym zapasy stanowią część majątku obrotowego, tworzącego razem z majątkiem trwałym aktywa przedsiębiorstwa, stąd:

$$A(t) = K(t) + pV(t), \tag{4}$$

przy czym:

$A(t)$ – wartość aktywów przedsiębiorstwa w momencie t,

$V(t)$ – poziom zapasów w momencie t,

p – jednostkowa księgowa wartość zapasów.

Po stronie pasywów w modelowym przedsiębiorstwie ujmowany będzie wyłącznie kapitał własny firmy (dla uproszczenia modelu zakładamy, że firma nie zaciąga zobowiązań), a zatem:

$$P(t) = X(t), \tag{5}$$

gdzie:

$P(t)$ – wartość pasywów w momencie t,

$X(t)$ – zasób kapitału własnego firmy w momencie t.

Strumień przychodu uzyskiwanego w firmie ze sprzedaży bieżącej produkcji oraz ewentualnej redukcji poziomu zapasów zaspokaja zobowiązania fiskalne firmy (podatek dochodowy), zobowiązania wobec pracowników (płace), służy pokryciu kosztów utrzymania zapasów (koszty obsługi i magazynowania) oraz jest przeznaczany na fundusz amortyzacyjny; pozostała część jest zatrzymywana w przedsiębiorstwie. Podział przychodu opisuje formuła:

$$S(Q)=f(S(Q)-wL(t)-aK(t)-hV(t))+wL(t)+hV(t)+aK(t)+ZN(Q), \quad (6)$$

przy czym:

$S(Q)$ – wartość przychodu ze sprzedaży w momencie t, o funkcji S zakładamy, że jest rosnąca i wklęsła ($S'(Q)>0$, $S''(Q)<0$) oraz że $S(0)=0$,
$ZN(Q)$ – wartość zysku netto w momencie t,
f – stawka podatku dochodowego od osób prawnych ($f=\text{const}$, $f\in[0,1)$),
w – stawka płac ($w=\text{const}$, $w>0$),
h – jednostkowe koszty utrzymywania zapasów ($h=\text{const}$, $h>0$),
a – stopa deprecjacji ($a=\text{const}$, $a\in[0,1)$).

Uzupełnieniem rachunku wyników przedsiębiorstwa jest informacja o podziale zysku netto, związana ściśle z prowadzoną w firmie polityką w zakresie dywidendy. Zysk netto wypracowany w przedsiębiorstwie może być bowiem dzielony pomiędzy akcjonariuszy – wypłata dywidendy, oraz firmę – zysk zatrzymany służący zwiększaniu wartości kapitału przedsiębiorstwa. Stąd:

$$ZN(Q)=\dot{X}(t)+D(t), \quad (7)$$

przy czym $D(t)$ to wielkość dywidendy w momencie t.

Natomiast wzrost trwałego majątku produkcyjnego odbywa się poprzez inwestycje, które muszą także restytuować fizycznie zużytą część majątku (fizyczna deprecjacja utożsamiana będzie z księgowym pojęciem amortyzacji), zatem:

$$I(t)=\dot{K}(t)+aK(t), \quad (8)$$

gdzie $I(t)$ to wielkość inwestycji w momencie t.

Z podstawowego równania bilansowego zrównującego aktywa i pasywa przedsiębiorstwa otrzymujemy zależność:

$$K(t)+pV(t)=X(t). \tag{9}$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu (9) oraz uwzględnieniu równań (7), (8) możemy napisać:

$$I(t)-aK(t)+p\dot{V}(t)=ZN(Q)-D(t). \tag{10}$$

Wygospodarowana przez firmę w okresie bilansowym nadwyżka finansowa $CF(Q)$ składa się z zysku netto oraz amortyzacji. Na podstawie tej definicji równość (10) można przekształcić do postaci:

$$CF(Q)-p\dot{V}(t)=I(t)+D(t), \tag{11}$$

z której odczytujemy, że przy danej nadwyżce finansowej $CF(Q)$ zmniejszenie stanu zapasów ($\dot{V}(t)<0$) prowadzi do zwiększenia środków dostępnych do finansowania inwestycji bądź przeznaczanych na dywidendę, natomiast wzrost poziomu zapasów ($\dot{V}(t)>0$) ma działanie przeciwne.

Problem decyzyjny, który będzie rozważany polega na sformułowaniu optymalnej strategii przedsiębiorstwa w zakresie jego polityki dotyczącej zapasów oraz dywidendy.

2. Zadanie optymalizacyjne

Celem działalności przedsiębiorstwa jest, zgodnie z nowoczesną teorią firmy, maksymalizacja korzyści akcjonariusza, na które składają się: strumień bieżącej dywidendy oraz wartość kapitału własnego firmy w ustalonym, końcowym momencie horyzontu (obie wielkości zaktualizowane). A zatem funkcja kryterium wyrażona jest formułą:

$$\max\left\{\int_0^z D(t)e^{-i_D t}dt+X(z)e^{-i_X z}\right\}, \tag{12}$$

w której:

i_D – stopa dyskontowa dywidendy, ustalona przez akcjonariuszy ($i_D>0$, $i_D=\text{const}$),

i_X – stopa dyskontowa zysku z kapitału, ustalona przez akcjonariuszy, ($i_X>0$, $i_X=\text{const}$),

z – ustalony horyzont analizy ($z>0$, $z=\text{const}$).

Przy formułowaniu strategii postaramy się znaleźć odpowiedź na pytanie, kiedy przedsiębiorstwu opłaca się utrzymywać zapasy oraz zastanowimy się, kiedy warto wypłacać dywidendę akcjonariuszom. Koszty utrzymywania zapasów są w modelu wyróżnione, można więc zadać pytanie, czy którekolwiek z równań modelu usprawiedliwia utrzymywanie zapasów? Korzyści firmy z posiadania zapasów zapisane zostały w funkcji celu. Funkcjonał (12) po uwzględnieniu (9) przyjmuje postać:

$$\max\left\{\int_0^z D(t)e^{-i_D t}dt+(K(z)+pV(z))e^{-i_X z}\right\}. \tag{13}$$

Po koniecznych przekształceniach otrzymujemy rozważany problem w postaci zadania sterowania optymalnego, w którym zmiennymi sterującymi są: $Q(t)$ – wielkość sprzedaży w momencie t oraz $D(t)$ – wielkość dywidendy w momencie t, a zmiennymi stanu: $K(t)$ – zasób majątku trwałego w momencie t oraz $V(t)$ – poziom zapasów w momencie t.

Zadanie optymalizacyjne

Znaleźć maksimum funkcji celu (13), gdy dynamikę zmiennych stanu opisują równania:

$$\dot{K}(t)=(1-f)[S(Q)-(wl+a)K(t)-hV(t)]-p[qK(t)-Q(t)]-D(t), \tag{14}$$

$$\dot{V}(t)=qK(t)-Q(t), \tag{15}$$

spełnione są ograniczenia:

$$V(t)\geqslant 0, \quad K(t)>0, \quad Q(t)>0, \quad D(t)\geqslant 0 \tag{16}$$

i dane są warunki początkowe:

$$K(0)=K_0>0, \quad V(0)=V_0\geqslant 0. \tag{17}$$

Szukając rozwiązania zadania przyjmować będziemy, że w momencie początkowym firmie opłaca się rozwijać działalność, tzn. założymy, że marginalny przychód ze sprzedaży nie jest niższy niż jednostkowe koszty produkcji w fazie równowagi stacjonarnej, co oznacza spełnienie w momencie początkowym następującego warunku (zob. Dodatek matematyczny):

$$\left.\frac{\partial S}{\partial Q}\right|_{Q=Q_0}\geqslant\frac{1}{q}\left(\frac{i_D}{1-f}+wl+a\right). \tag{18}$$

3. Strategie optymalne

Strategie optymalne przedsiębiorstwa w zakresie gospodarki zapasami oraz polityki dywidendy wyznaczymy w dwóch przypadkach (zob. Dodatek matematyczny):

I. Dywidenda i zysk z kapitału uzyskiwany ze sprzedaży aktywów firmy na koniec horyzontu są dla akcjonariuszy w jednakowym stopniu atrakcyjne ($i_D = i_X$).

II. Akcjonariusze preferują zysk z kapitału realizowany na koniec horyzontu nad bieżące korzyści w postaci dywidendy ($i_X < i_D$).

W obu wypadkach strategie optymalne zależą od długości horyzontu oraz stanu zapasów i wielkości majątku trwałego w momencie początkowym.

ad. I. Jeżeli w momencie początkowym spełniony jest warunek $K_0 + pV_0 < \bar{K}$, w którym $\bar{K}$ oznacza zasób majątku przedsiębiorstwa w fazie równowagi stacjonarnej[1], to w długim horyzoncie czasu[2] ($z > \bar{z}$) strategia optymalna opisana jest przez trajektorię optymalną, składającą się z dwóch faz: dochodzenia do magistrali i rozwoju po niej. W fazie dochodzenia do magistrali firma może utrzymywać zapasy, jeśli dysponowała nimi w momencie rozpoczęcia działalności, jednak stopniowo stan zapasów powinien ulegać zmniejszeniu. Podczas tej wstępnej fazy wzrasta sprzedaż, a także bieżąca produkcja – proporcjonalnie do przyrostu majątku produkcyjnego. Majątek trwały wzrasta, gdyż cała nadwyżka finansowa przeznaczana jest na inwestycje. Dywidenda w tej fazie nie jest wypłacana (ścieżka 2). Jeżeli całkowity stan zapasów ulegnie redukcji do zera zanim firma osiągnie magistralę lub jeśli w momencie początkowym firma nie dysponuje zapasami, to faza intensywnego wzrostu przebiega przy zerowym poziomie zapasów (ścieżka 3). Dynamiczny wzrost w całej fazie dochodzenia do magistrali, bez względu na to, czy składa się z jednej czy z dwóch ścieżek, firma uzyskuje dzięki temu, że marginalny zysk netto przekracza wymaganą przez akcjonariuszy stopę zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K} > i_D = i_X$).

---

[1] Faza równowagi stacjonarnej jest magistralą analizowanego zadania.

[2] $\bar{z}$ oznacza krytyczną długość horyzontu, po przekroczeniu której w rozwiązaniu pojawia się faza równowagi stacjonarnej. Jest ona równa τ_{21} lub τ_{31} w zależności od typu trajektorii optymalnej.

Gdy marginalny przychód ze sprzedaży obniży się do poziomu jednostkowych kosztów produkcji ($\frac{\partial S}{\partial Q}=\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f}+wl+a\right]$), a marginalny zysk netto zrówna się z wymaganą przez akcjonariuszy stopą zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K}=i_D=i_X$), rozwój firmy wchodzi w fazę równowagi stacjonarnej. Sprzedaż i produkcja utrzymywane są na stałym poziomie ($\bar{Q}=q\bar{K}$). Firma realizuje tylko inwestycje odtworzeniowe na poziomie $\bar{I}=a\bar{K}$, a cała reszta nadwyżki finansowej (cały zysk netto) jest przeznaczana na wypłatę dywidendy akcjonariuszom (ścieżka 1).

W miarę wydłużania horyzontu wydłuża się czas rozwoju firmy po magistrali. W krótkim horyzoncie ($z\leqslant\bar{z}$), o ile tylko firma nie znajduje się na magistrali w momencie początkowym, faza intensywnego wzrostu jest jedyną fazą jej rozwoju.

ad. II. Gdy akcjonariusze preferują zysk z kapitału nad dywidendę, pojawia się zmiana w strategii optymalnej. W długim horyzoncie ($z>\bar{z}$) strategia jest teraz wyznaczona przez trajektorię trójfazową, na którą składają się: faza dochodzenia do magistrali, rozwój po niej i, nieobecna w punkcie I, faza końcowa, w której firma opuszcza magistralę. Początkowa faza, tak jak w pierwszym przypadku, jest okresem dynamicznego wzrostu i trwa dopóki marginalny zysk netto przekracza wymaganą przez akcjonariuszy stopę zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K}>\max\{i_D, i_X\}$). Magistralę, ze stałym poziomem sprzedaży i produkcją ($\bar{Q}=q\bar{K}$), stałym majątkiem produkcyjnym ($\bar{K}$), zerowymi zapasami i dodatnią dywidendą cechuje marginalny zysk netto na poziomie ustalonej przez akcjonariuszy stopy zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K}=\max\{i_D, i_X\}$). W rozważanym przypadku akcjonariusze preferują zysk z kapitału, jaki mogą uzyskać na koniec horyzontu, dlatego w ostatniej fazie następuje wytrącenie firmy z rozwoju po magistrali. Akcjonariusze są zainteresowani maksymalnym wzrostem aktywów przedsiębiorstwa, których sprzedaż w momencie końcowym zapewni im zysk. Ponieważ preferencje akcjonariuszy dotyczą wzrostu aktywów, bez różnicowania ich na majątek trwały (produkcyjny) i obrotowy (zapasy), nie można jednoznacznie wskazać, czy zapasy powinny być gromadzone w fazie końcowej czy nie. Charakterystyka trajektorii optymalnych pozwala jedynie stwierdzić, że oba warianty wzrostu aktywów (z zapasami i bez ich udziału) są w rozważanym zadaniu dopuszczalne.

Ze względu na to, że opuszczenie przez firmę fazy równowagi zostaje wymuszone celem akcjonariuszy, a nie jest wynikiem sytuacji wewnętrznej przedsiębiorstwa, wskaźniki charakteryzujące działalność firmy są mniej korzystne niż w początkowej fazie wzrostu: marginalny przychód ze sprzedaży jest niższy niż jednostkowe koszty produkcji w fazie równowagi ($\frac{\partial S}{\partial Q} < \frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right]$), a marginalny zysk netto spada poniżej ustalonej przez akcjonariuszy stopy zwrotu kapitału ($\frac{\partial ZN}{\partial K} < \max\{i_D, i_X\}$); dlatego długość tej fazy jest zawsze ograniczona, a wydłużenie horyzontu analizy powoduje wydłużenie okresu równowagi stacjonarnej w rozwoju firmy.

W przypadku krótkiego horyzontu ($z \leqslant \bar{z}$) w rozwiązaniu optymalnym nie występuje faza rozwoju firmy po magistrali, a rozwiązanie redukuje się do procesu jednofazowego – akumulacji aktywów.

4. Przykładowe trajektorie optymalne

W celu zaprezentowania przebiegu przykładowych trajektorii optymalnych majątku, zatrudnienia, sprzedaży, zapasów, inwestycji i dywidendy, ustalono funkcję przychodu następującej postaci:

$$S(Q) = p_0 \sqrt{\frac{Q_0}{Q(t)}}\, Q(t), \tag{19}$$

w której p_0 to jednostkowa cena sprzedaży w momencie początkowym.

Dla funkcji przychodu opisanej tą formułą, uwzględniając (D.12) oraz (1), (2), (8) i (10), można wyznaczyć optymalne wartości sprzedaży, majątku, zatrudnienia, zapasów, inwestycji i dywidendy osiągane w fazie równowagi stacjonarnej. Są to wielkości stałe, których wartości zależą wyłącznie od parametrów modelu:

$$\bar{Q} = Q_0 \left(\frac{p_0 q(1-f)}{2[i_D + (1-f)(wl+a)]}\right)^2, \tag{20}$$

$$\bar{K} = \frac{1}{q}\bar{Q}, \tag{21}$$

$$\bar{L} = l\bar{K}, \tag{22},$$

$$\bar{V}=0, \tag{23}$$

$$\bar{I}=a\bar{K}, \tag{24}$$

$$\bar{D}=(1-f)(p_0\sqrt{Q_0}\sqrt{\bar{Q}}-(wl+a)\bar{K}). \tag{25}$$

Aby wygenerować trajektorie optymalne, posłużymy się równaniami modelu w wersji dyskretnej. Z dyskretnej postaci równania (14) można wyprowadzić formułę opisującą przebieg trajektorii majątku:

$$K_{t+1}=(1-f)p_0\sqrt{Q_0}\sqrt{Q_t}-[(1-f)(wl+a)+pq-1]K_t-pQ_t-(1-f)hV_t, \tag{26}$$

dyskretna postać równania (15) pozwoli wyznaczyć trajektorię zapasów:

$$V_{t+1}=V_t+qK_t-Q_t \tag{27}$$

i sprzedaży:

$$Q_{t+1}=qK_{t+1}-V_{t+1}+V_t, \tag{28}$$

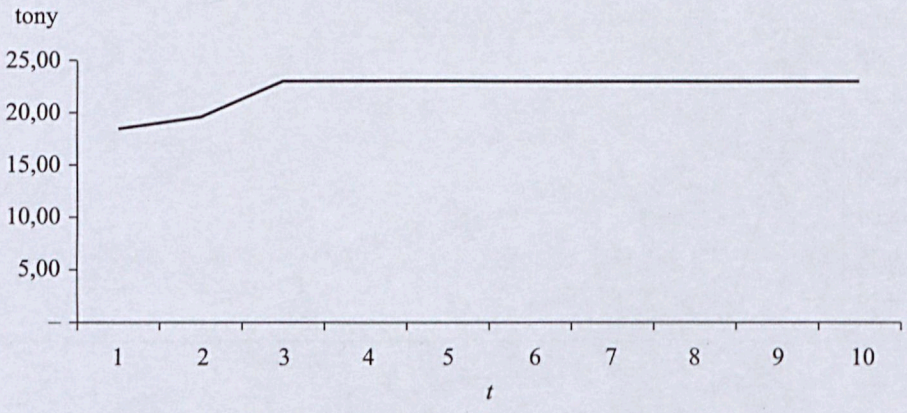
a z (8) otrzymamy trajektorię inwestycji:

$$I_{t+1}=(1+a)K_{t+1}-K_t. \tag{29}$$

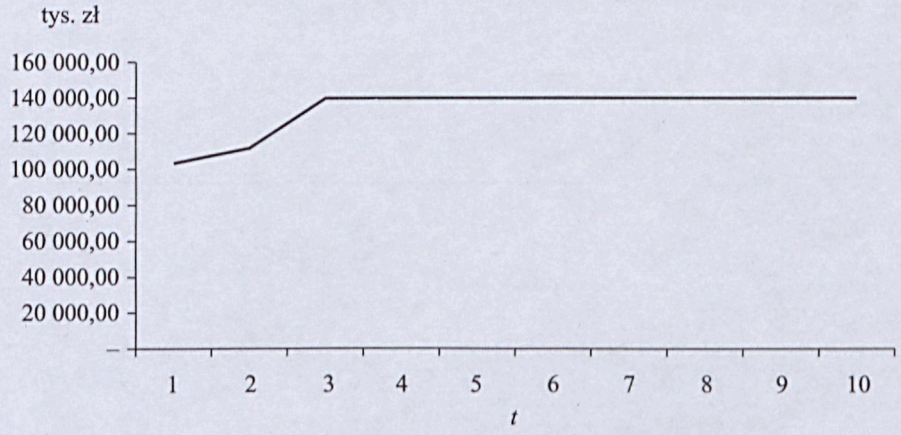
Ustalmy moment początkowy ($t=0$) 1 stycznia 2004 roku, horyzont analizy $z=10$ lat oraz jednostkę czasu $t=1$.

Wartości początkowe (K_0, L_0, Q_0, V_0) charakteryzują spółkę akcyjną sektora spożywczego: $K_0=103\ 299$ tys. zł, $L_0=864$ osoby (średnio), $pV_0=17\ 048$ tys. zł, $Q_0=18\ 475$ ton (szacunkowo, na podstawie danych z lat ubiegłych). Z równań modelu wyznaczono następujące wartości parametrów: $l=0{,}000008364$, $q=0{,}0001646$, $p_0=5846{,}62$, $p=9234{,}33$ (przy obliczeniach wartości parametrów p_0 i p uwzględniono również 40% współczynnik materiałochłonności). Wykorzystując metody heurystyczne, oszacowano parametry: $h=0{,}10$ oraz $i_D=i_X=0{,}06$. Parametry egzogeniczne w modelu to: $w=26\ 766{,}72$ (szacunkowo, na podstawie danych statystycznych, roczne jednostkowe wynagrodzenie) oraz $f=0{,}19$, $a=0{,}10$.

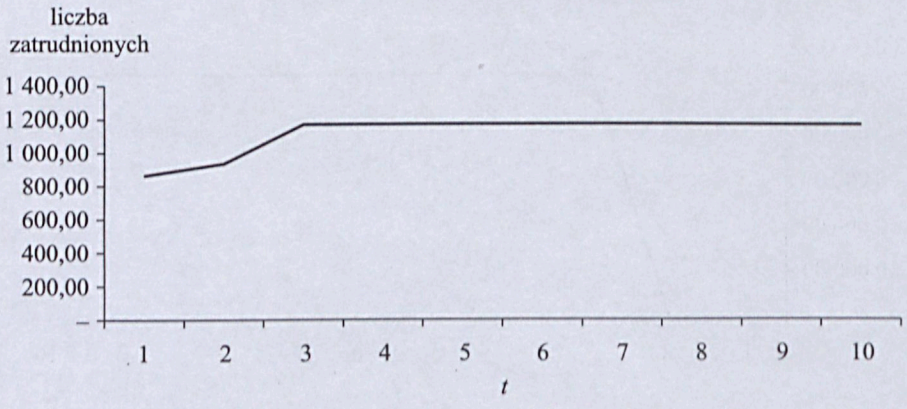
Trajektorie optymalne sprzedaży, majątku, zatrudnienia, zapasów, inwestycji i dywidendy przy tak określonym zbiorze zmiennych i parametrów modelu ilustrują poniższe wykresy.



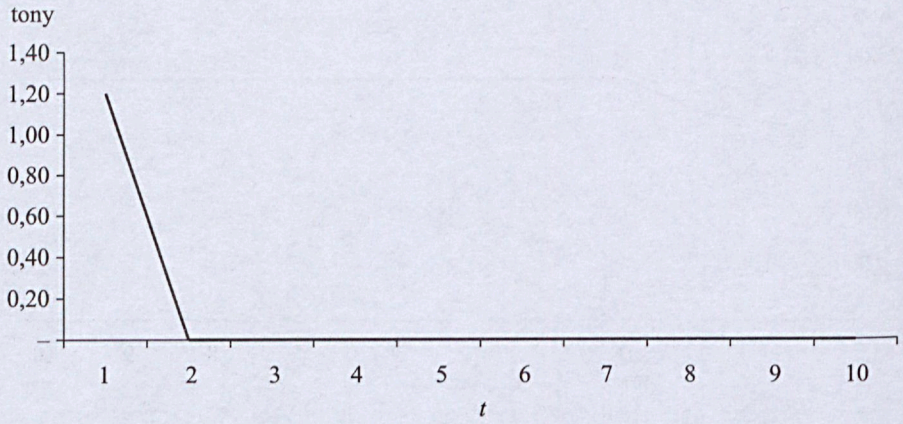
Rys. 1. Optymalna trajektoria sprzedaży $Q(t)$



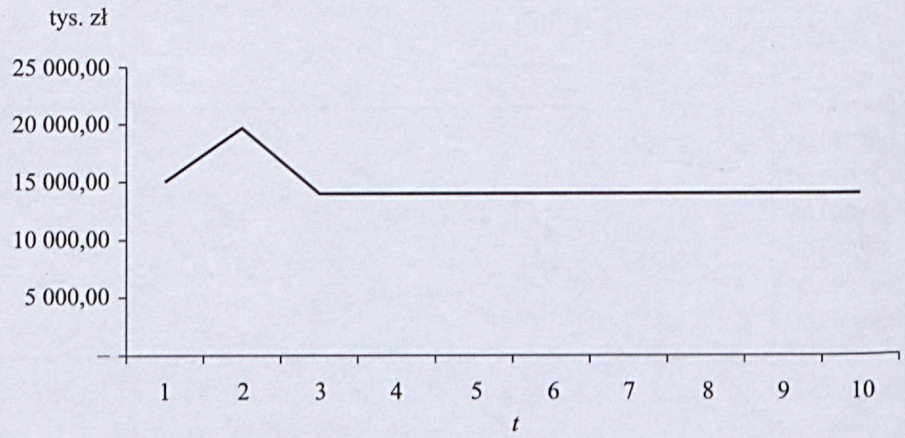
Rys. 2. Optymalna trajektoria majątku $K(t)$



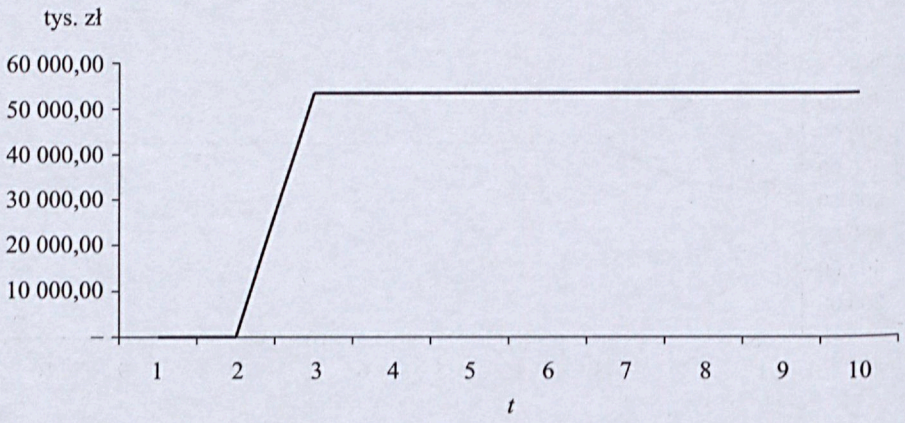
Rys. 3. Optymalna trajektoria zatrudnienia $L(t)$



Rys. 4. Optymalna trajektoria zapasów $V(t)$



Rys. 5. Optymalna trajektoria inwestycji $I(t)$



Rys. 6. Optymalna trajektoria dywidendy $D(t)$

W analizowanym przykładzie empirycznym przyjęto dla uproszczenia, że $i_D = i_X$; stąd w przypadku każdej trajektorii wejście na magistralę (faza równowagi stacjonarnej) jest bezpowrotne. Faza dochodzenia do równowagi trwająca około dwóch lat, to dla firmy czas redukcji zapasów, powiększania wolumenu sprzedaży oraz zwiększania zasobów majątku produkcyjnego i, związanego ze wzrostem majątku, zatrudnienia.

Podsumowanie

Tematyka artykułu koncentrowała się wokół zagadnienia dysponowania zapasami w przedsiębiorstwie. Na podstawie dynamicznego modelu firmy sformułowano zadanie wyboru optymalnej polityki w zakresie gospodarki zapasami i dywidendy. Rozwiązanie zadania pozwala zauważyć występujący w długim horyzoncie efekt magistrali, co w rozwoju firmy oznacza pozostawanie okresowo w stanie równowagi. Przeprowadzona analiza uprawnia do sformułowania następujących wniosków:

1) Dywidenda powinna być wypłacana akcjonariuszom wyłącznie wówczas, gdy firma pozostaje w stanie równowagi.
2) Stan równowagi charakteryzują zerowe zapasy.
3) Równoczesne utrzymywanie zapasów i wypłacanie dywidendy akcjonariuszom nie jest dopuszczalne.
4) Zapasy mogą być utrzymywane w przedsiębiorstwie jedynie okresowo (w fazie początkowej, jeśli firma dysponuje zapasami w momencie rozpoczynania działalności oraz w fazie końcowej, jeżeli akcjonariusze preferują wzrost aktywów firmy nad bieżącą dywidendą).

Oczywiście postulowana w rozwiązaniu radykalna redukcja zapasów do zera może oznaczać w praktyce utrzymywanie zapasów na pewnym poziomie normatywnym, a redukcji ulegać będzie jedynie pewna ich nadwyżka.

Literatura

[1] Blok, M.W.J., *Dynamic Models of the Firm*, Springer-Verlag, Berlin 1996.
[2] Hilten, O. van, Kort, P.M., Loon, P.J.J.M. van, *Dynamic Policies of the Firm. An Optimal Control Approach*, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg 1993.
[3] Rychłowska-Musiał E., *Optymalne strategie rozwoju firmy w świetle teorii sterowania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2003.

DODATEK MATEMATYCZNY

Zadanie sterowania optymalnego (13)-(17) rozwiążemy posługując się zmodyfikowaną zasadą maksimum Pontriagina[3]. Ponieważ jest to zadanie z ograniczeniami, tworzymy, uwzględniającą je, funkcję Lagrange'a:

$$L(K(t), V(t), Q(t), D(t), \lambda(t)) =$$
$$= D(t) + \lambda_1(t)\{(1-f)[S(Q)-(wl+a)K(t)-hV(t)]-p[qK(t)-Q(t)]-D(t)\} +$$
$$+ \lambda_2(t)\{qK(t)-Q(t)\} + v(t)V(t) + \mu(t)D(t).$$

Zgodnie z zasadą maksimum, jeżeli proces optymalny $(Q^*(t), D^*(t), K^*(t), V^*(t))$ jest rozwiązaniem zadania (13)-(17), to istnieje funkcja wektorowa $\lambda(t)=[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$ ciągła, przedziałami różniczkowalna, będąca rozwiązaniem układu równań:

$$\dot{\lambda}_1(t) = i_D \lambda_1(t) - \{\lambda_1(t)[-(1-f)(wl+a)-pq] + q\lambda_2(t)\}, \tag{D.1}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = i_D \lambda_2(t) - \{\lambda_1(t)[-(1-f)h] + v(t)\}, \tag{D.2}$$

z warunkiem transwersalności w postaci układu:

$$\begin{aligned} \lambda_1(z) &= e^{(i_D - i_x)z}, \\ \lambda_2(z) &= (p+\gamma)e^{(i_D - i_x)z}, \\ \gamma &\geqslant 0 \wedge \gamma V(z) = 0. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Spełnione są ponadto zależności:

$$\lambda_1(t)\left[(1-f)\frac{\partial S}{\partial Q} + p\right] - \lambda_2(t) = 0 \tag{D.4}$$

$$1 - \lambda_1(t) + \mu(t) = 0, \tag{D.5}$$

gdzie:

$$\mu(t) \geqslant 0 \wedge \mu(t)D(t) = 0, \tag{D.6}$$

$$v(t) \geqslant 0 \wedge v(t)V(t) = 0. \tag{D.7}$$

---

[3] Twierdzenie to formułuje co prawda jedynie warunki konieczne optymalności, jednak spełnienie dodatkowych założeń o wklęsłości Hamiltonianu zapewnia także ich dostateczność.

Z założeń o zmiennej stanu K wynika, że funkcja $\lambda_1(t)$ jest ciągła na całym przedziale $[0, z]$, natomiast w punktach nieciągłości funkcji $\lambda_2(t)(\tau)$ spełnione są warunki:

$$\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) + \eta(\tau),$$

$$\eta(\tau) \geqslant 0 \wedge \eta(\tau) V(\tau) = 0.$$

Ponieważ zagadnienie (13)-(17) jest przykładem nieklasycznego zadania sterowania, rozwiązanie wyznaczymy stosując tzw. procedurę łączenia ścieżek (zob. np. [2]). Jej pierwszy etap polega na scharakteryzowaniu wszystkich ścieżek, wynikających z analizy warunków koniecznych, następnie określamy ścieżki dopuszczalne oraz ustalamy te, które mogą być fazami końcowymi.

Procedurę kończy etap szukania dopuszczalnych przełączeń i tworzenia optymalnych trajektorii (łańcuchów ścieżek).

Tabela 1. Zestawienie ścieżek dopuszczalnych w rozwiązaniu zadania (13)-(17)

Ścieżki	Zmienne			
	$v(t)$	$\mu(t)$	$V(t)$	$D(t)$
1	+	0	zerowe	dodatnia
2	0	+	dodatnie	brak
3	+	+	zerowe	brak
4	0	0	dodatnie	dodatnia

Analiza układu warunków koniecznych wskazuje na możliwość istnienia czterech ścieżek. Podamy teraz charakterystykę każdej z nich.

Ścieżka 1: Ponieważ $\mu(t) = 0$, $v(t) > 0$, więc z (D.6)-(D.7) wynika, że fazę tę charakteryzują zerowe zapasy ($V(t) = 0$) oraz dodatnia dywidenda ($D(t) > 0$). Warunki optymalności (D.1)-(D.7) są równoważne układowi:

$$\lambda_2(t) = (1-f)\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right] + p, \tag{D.8}$$

$$v(t) = i_D \lambda_2(t) + (1-f)h, \tag{D.9}$$

$$\lambda_2(t) = (1-f)\frac{\partial S}{\partial Q} + p, \tag{D.10}$$

$$\lambda_1(t) = 1. \tag{D.11}$$

Zależności (D.8) i (D.10) prowadzą do wniosku, że w fazie tej spełniony jest warunek:

$$\frac{\partial S}{\partial Q}=\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f}+wl+a\right]=\text{const.} \tag{D.12}$$

Marginalny przychód ze sprzedaży jest równy jednostkowemu kosztowi produkcji, co oznacza, że w fazie tej sprzedaż utrzymywana jest na stałym poziomie $(\bar{Q})$[4]. Ze względu na zerowe zapasy cała produkcja wytworzona jest sprzedawana $(\bar{Q}=q\bar{K})$, implikuje to stały poziom majątku produkcyjnego $(\bar{K})$, a wówczas z (11) możemy odczytać, że nadwyżka finansowa jest dzielona między firmę (inwestycje) i akcjonariuszy (wypłata dywidendy) w taki sposób, że $I(t)=a\bar{K}$ oraz $D(t)=ZN(\bar{Q})$.

Na mocy (2), (3) i (7) warunek (D.12) jest równoważny warunkowi $\frac{\partial ZN}{\partial K}=i_D=\max\{i_D, i_X\}$, który oznacza, że marginalny zysk netto jest równy stopie zwrotu kapitału wymaganej przez akcjonariuszy. Fazę o tej własności będziemy nazywali magistralą badanego zadania.

Ścieżka 2: Na tej ścieżce $\mu(t)>0$, $v(t)=0$, a więc z (D.6)-(D.7) wynika, że w tej fazie firma dysponuje nieujemnymi zapasami $(V(t)\geqslant 0)$, a dywidenda nie jest wypłacana $(D(t)=0)$. Zatem zgodnie z (11) na sfinansowanie inwestycji firma przeznacza nadwyżkę finansową, która może być powiększana (lub zmniejszana) poprzez zmniejszenie (lub zwiększenie) stanu zapasów.

Warunki optymalności (D.1)-(D.7) są równoważne układowi:

$$\dot{\lambda}_1(t)=\lambda_1(t)q\left\{(1-f)\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f}+wl+a\right]+p\right\}-\lambda_2(t)q, \tag{D.13}$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=i_D\lambda_2(t)+\lambda_1(t)(1-f)h, \tag{D.14}$$

$$\lambda_2(t)=\lambda_1(t)\left[(1-f)\frac{\partial S}{\partial Q}+p\right], \tag{D.15}$$

$$\lambda_1(t)=1+\mu(t). \tag{D.16}$$

Przeanalizujmy przebiegi funkcji $\lambda_1(t)$ oraz $\lambda_2(t)$.

[4] W artykule symbol $\bar{x}$ oznacza stałą wartość zmiennej x w fazie równowagi stacjonarnej.

Zauważmy, że z (D.13), (D.15) i (D.16) wynika:

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\left\{\frac{\partial S}{\partial Q} - \frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right]\right\} q(1-f)\lambda_1(t), \tag{D.17}$$

$\lambda_1(t) > 1$ na całej ścieżce 2 ewentualnie poza jej punktami brzegowymi i może dążyć do jedynki na jej początku lub końcu:

(a) jeżeli $\lim_{t \to \tau_{a2}^+} \lambda_1(t) = 1$, to $\dot{\lambda}_1(t) > 0$ dla $t > \tau_{a2}$,

gdzie τ_{a2} to punkt połączenia ścieżki poprzedzającej ze ścieżką 2.

Wówczas z (D.17) odczytujemy, że:

$$\frac{\partial S}{\partial Q} < \frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right], \tag{D.18}$$

który z kolei oznacza, że: $\frac{\partial ZN}{\partial K} < i_D = \max\{i_D, i_X\}$.

Skoro marginalny przychód ze sprzedaży jest niższy niż marginalny koszt produkcji w tej fazie, to, poziom sprzedaży w fazie 2: $Q(t) > \bar{Q}$.

(b) jeżeli $\lim_{t \to \tau_{a2}^-} \lambda_1(t) = 0$, to $\dot{\lambda}_1(t) < 0$ dla $t < \tau_{a2}$,

gdzie τ_{2a} to punkt połączenia ścieżki 2 ze ścieżką następną.

Podobnie jak w punkcie (a), można wykazać, że w tym przypadku:

$$\frac{\partial S}{\partial Q} > \frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right], \tag{D.19}$$

oraz $\frac{\partial ZN}{\partial K} > i_D = \max\{i_D, i_X\}$, a ponadto $Q(t) < \bar{Q}$.

Natomiast z (D.14), (D.15) i (D.16) wynika, że $\dot{\lambda}_2(t) > 0$ na całej ścieżce drugiej.

Ścieżka 3: Dla $\mu(t) > 0$, $\nu(t) > 0$ z (D.6)-(D.7) odczytujemy, że ścieżkę tę charakteryzują zerowe zapasy ($V(t) = 0$) oraz zerowa dywidenda ($D(t) = 0$). Zatem zgodnie z (11) nadwyżka finansowa jest przeznaczana na inwestycje: $CF(Q) = I(t)$.

Warunki optymalności (D.1)-(D.7) są równoważne układowi:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_1(t) q\left\{(1-f)\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right] + p\right\} - \lambda_2(t) q, \tag{D.20}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = i_D \lambda_2(t) + \lambda_1(t)(1-f)h - v(t), \tag{D.21}$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_1(t)\left[(1-f)\frac{\partial S}{\partial Q} + p\right], \tag{D.22}$$

$$\lambda_1(t) = 1 + \mu(t). \tag{D.23}$$

Podobnie jak dla ścieżki 2 przeanalizujmy przebiegi funkcji $\lambda_1(t)$ oraz $\lambda_2(t)$.

Zauważmy, że z (D.13), (D.15) i (D.16) oraz (D.20), (D.22) i (D.23) wynika, że na ścieżce 3 przebieg funkcji $\lambda_1(t)$ jest taki, jak dla ścieżki 2.

Natomiast z (D.21) i (D.22) wynika, że:

$$\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t)\left\{\left[(1-f)\frac{\partial S}{\partial Q} + p\right] i_D + (1-f)h\right\} - v(t), \tag{D.24}$$

Zatem ze względu na dowolną, dodatnią wartość $v(t)$ funkcja$\lambda_2(t)$ może być rosnąca lub malejąca na tej ścieżce.

Ścieżka 4: Gdy $\mu(t) = 0$, $v(t) = 0$ warunki (D.6)-(D.7) wskazują, że ścieżkę tę charakteryzują nieujemne zapasy ($V(t) \geqslant 0$) oraz nieujemna dywidenda ($D(t) \geqslant 0$).

Warunki optymalności (D.1)-(D.7) są równoważne układowi:

$$\lambda_2(t) = (1-f)\frac{1}{q}\left[\frac{i_D}{1-f} + wl + a\right] + p, \tag{D.25}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = i_D \lambda_2(t) + (1-f)h, \tag{D.26}$$

$$\lambda_2(t) = (1-f)\frac{\partial S}{\partial Q} + p, \tag{D.27}$$

$$\lambda_1(t) = 1. \tag{D.28}$$

Nietrudno zauważyć, że jest to układ sprzeczny.

Kolejnym etapem procedury budowania trajektorii optymalnej jest wyłonienie spośród wszystkich ścieżek dopuszczalnych tych, które mogą być fazami kończącymi, tzn. spełniają warunki transwersalności (D.3).

Dopuszczając nieciągłość funkcji $\lambda_2(t)$ w momencie końcowym z zapiszmy równoważną postać warunków transwersalności (D.3):

$$\lambda_1(z)=e^{i_D-i_X},$$

$$\lambda_2(z^+)=pe^{i_D-i_X}, \quad \lambda_2(z^-)=(p+\gamma)e^{i_D-i_X}, \tag{D.29}$$

$$\gamma\geqslant 0\wedge\gamma V(z)=0.$$

Zauważmy, że dla $\gamma=0$ warunki (D.4) i (D.29) prowadzą do sprzeczności z założeniami o funkcji przychodu S, co implikuje nieciągłość funkcji $\lambda_2(t)$ w momencie końcowym z.

Warunek (D.29) równoważny jest z trójką implikacji:

I. gdy $i_D=i_X$, wtedy $\lambda_1(z)=1\wedge\lambda_2(z^+)=p\wedge\lambda_2(z^-)=p+\gamma$,

II. gdy $i_D>i_X$, wtedy $\lambda_1(z)>1\wedge\lambda_2(z^+)>p\wedge\lambda_2(z^-)>p+\gamma$,

III. gdy $i_D<i_X$, wtedy $\lambda_1(z)<1\wedge\lambda_2(z^+)<p\wedge\lambda_2(z^-)<p+\gamma$,

gdzie:

$$\gamma\geqslant 0\wedge\gamma V(z)=0.$$

W przypadku I fazą końcową trajektorii może być jedynie ścieżka 1, niemniej warunek transwersalności może być spełniony w punkcie końcowym każdej ze ścieżek.

Fazami końcowymi w przypadku II mogą być ścieżki 2 lub 3.

Nierówności przypadku III nie pozwalają na sformułowanie strategii optymalnej w zadaniu (13)-(17).

Ostatni etap procedury łączenia ścieżek polega na ustaleniu trajektorii optymalnych. Możliwe przełączenia wyznaczamy korzystając z założeń modelu, znaków zmiennych dodatkowych i warunków transwersalności.

Przypadek I dopuszcza trzy długookresowe trajektorie, kończące się wejściem trajektorii optymalnej na magistralę (ścieżka 1):

a) gdy $V_0>0$, wówczas otrzymujemy trajektorie: $2\to1$, $2\to3\to1$,

b) gdy $V_0=0$ dopuszczalna jest wyłącznie trajektoria: $3\to1$.

W przypadku II w każdej z powyższych trajektorii pojawia się faza końcowa zejścia z magistrali, stąd długookresowe trajektorie optymalne to:

a) gdy $V_0>0$, otrzymujemy: $2\to1\to2$, $2\to1\to3$, $2\to1\to3\to2$;
$2\to3\to1\to2$, $2\to3\to1\to3$, $2\to3\to1\to3\to2$,

b) natomiast gdy $V_0=0$, mamy: $3\to1\to2$, $3\to1\to3$, $3\to1\to3\to2$.

FIRM'S VALUE OPTIMISATION PROBLEM IN A MODEL WITH AN INVENTORY OF FINISHED GOODS

Summary

In this paper a dynamic model of a firm is formulated in which the firm may hold a part of final output as an inventory. The aim of the paper is to formulate optimal inventory and dividend policies for a model firm. Solving the optimal control problem we are able to derive the optimal trajectory of: the capital goods, labour, sales, inventory of finished goods, investment and dividend.

Theoretical results are illustrated by empirical example.