Część pierwsza

Matematyka finansowa

Marcin BARTKOWIAK
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

PROBLEMY W IMPLEMENTACJI MODELU BLACKA-SCHOLESA-MERTONA ZWIĄZANE Z WYZNACZANIEM WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI

Wstęp

W roku 1973 ukazują się dwa artykuły autorstwa Fischera Blacka, Myrona Scholesa oraz Roberta Mertona, uznawane za przełomowe w rozwoju teorii nowoczesnych finansów. W artykułach tych zaprezentowano model wyceny opcji. Od tamtego czasu model zwany modelem Blacka-Scholesa-Mertona (model BSM) stał się najpopularniejszym sposobem wyceny opcji, a literatura go dotycząca należy do najbogatszych. O popularności może świadczyć pojawienie się w kalkulatorach finansowych funkcji wyznaczającej cenę opcji na podstawie modelu BSM. Jednak popularność oznacza również, że model BSM stosowany jest w każdym miejscu i sytuacji, bez zwracania uwagi na jego ograniczenia. I właśnie na te ograniczenia i problemy z nich wynikające autor chciałby zwrócić uwagę w artykule, koncentrując się głównie na współczynniku zmienności akcji.

1. Model BSM, uwagi ogólne

W modelu BSM przyjęto postulat, że cena akcji S_T, $T \in [0, t]$, jest procesem stochastycznym, opisanym za pomocą stochastycznego równania różniczkowego postaci:

$$dS_T = \mu S_T dt + \sigma S_T dW_T, \quad S_0 > 0, \tag{1}$$

gdzie:

μ – stała stopa aprecjacji odzwierciedlająca tendencje zmian cen akcji,
σ – współczynnik zmienności cen akcji (*volatility*),
S_0 – cena akcji w chwili $T=0$ ($S_0>0$),
W_T – jednowymiarowy proces Wienera.

Ostatecznie wzory na cenę europejskiej opcji kupna i sprzedaży przyjmują odpowiednio postać:

$$c = S_T N(d) - Ke^{-rT} N(d - \sigma\sqrt{T}), \tag{2}$$

$$p = Ke^{-rT} N(\sigma\sqrt{T} - d) - S_T N(-d), \tag{3}$$

gdzie:

$$d = \frac{\ln \frac{S_T e^{rT}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{4}$$

K – cena wykonania opcji,
r – stopa zwrotu wolna od ryzyka,
T – czas pozostały do wygaśnięcia opcji,
N – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego:

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{5}$$

Zatem w modelu BSM poczyniono następujące założenia:

1) rynek jest efektywny, nie istnieje możliwość arbitrażu,
2) rynek jest idealny – nie ma kosztów transakcji,
3) transakcje mogą być dokonywane w sposób ciągły, można dowolnie często zmieniać skład portfela,
4) akcje są doskonale podzielne liczba akcji w portfelu nie musi być całkowita,
5) dopuszczalna jest krótka sprzedaż,
6) akcje nie przynoszą dywidend,
7) stopa procentowa wolna od ryzyka jest stała,
8) współczynnik zmienności akcji σ jest stały w czasie – własności procesu stochastycznego nie zmieniają się,
9) zmiany cen akcji w czasie opisywane są przez lognormalny proces Wienera.

Nie wszystkie z powyższych założeń są jednakowo dobrze spełnione na rzeczywistych rynkach finansowych. Wątpliwości nie ma jedynie przy założeniu dotyczącym krótkiej sprzedaży.

2. Ograniczenia w stosowaniu modelu BSM

Problemowi efektywności rynku poświęcono liczne badania, z których wynika, że rozwinięte giełdy charakteryzują się mocną efektywnością[1]. Niemniej jednak przed przystąpieniem do stosowania modelu BSM na wybranym rynku powinno się sprawdzić poziom jego efektywności. Jeśli rynek jest nieefektywny, stosowanie modelu BSM należy zarzucić.

Założenie o braku kosztów transakcyjnych mocno upraszcza model. Uwzględnienie kosztów w modelu jest możliwe, ale wzrost jego skomplikowania nie uzasadnia prób wierniejszego odzwierciedlania rzeczywistości.

Podobnie ma się sprawa z założeniem dokonywania transakcji w sposób ciągły. Ponieważ wszelkich zmian w składzie portfela można dokonywać jedynie dyskretnie, pojawiły się modele, w których rezygnuje się z ciągłości. Są jednak na tyle skomplikowane, że nie zdobyły szerszego uznania.

Założenie doskonałej podzielności akcji jest kolejnym założeniem, upraszczającym model i w niewielkim stopniu odbiegającym od rzeczywistości, zwłaszcza dla inwestorów obracających dużymi liczbami akcji.

Założenie 6) można pominąć, istnieją bowiem uogólnienia modelu BSM, dopuszczające wypłatę dywidend [7].

Stałość stopy procentowej wolnej od ryzyka i współczynnika zmienności cen akcji jest formalnie niezbędne do wyprowadzenia modelu BSM, jednak powszechną praktyką rynkową jest uzmiennianie tych wielkości. Należy jednak pamiętać, że istotną cechą każdego modelu rynku finansowego powinno być generowanie zależności w ramach modelu zbliżonych do zależności faktycznie obserwowanych na rynku. Jeżeli zależności wynikające z modelu istotnie odbiegają od występujących w rzeczywistości, dany model nie może być wiarygodnym narzędziem do wyceny opcji (nawet jeśli jest poprawny pod względem formalnym) ([12], s. 52).

Współczynnik zmienności cen akcji jest źródłem największych kłopotów związanych z implementacją modelu BSM. Wynika to z tego, że współczynnik zmienności jest jedyną wielkością, występującą w modelu, która nie jest bezpośrednio obserwowana na rynku. Dlatego też należy dokonać jej estymacji. W literaturze definiuje się następujące rodzaje zmienności [11]:

---

[1] Więcej o zależności między efektywnością a arbitrażem można znaleźć w [13].

- zmienność przyszłą (*future volatility*), stanowiącą nieznaną wartość przyszłej zmienności,
- zmienność historyczną (*historical, realized volatility*), wyznaczaną na podstawie przeszłych notowań instrumentu bazowego,
- zmienność implikowaną (*implied volatility*), wyznaczaną na podstawie aktualnych cen opcji wystawionych na instrument bazowy.

Zmienność przyszła stanowi jedynie teoretyczną kategorię i nie jest stosowana przy wycenie opcji w modelu BSM, w którym najczęściej wykorzystuje się zmienność historyczną. Podstawowym błędem jest wówczas wyznaczanie parametru σ jako odchylenia standardowego stóp zwrotu z akcji. Jeśli zmiany cen akcji S_T są opisywane przez rozkład lognormalny, to stopy zwrotu $R_T = \frac{R_T}{R_{T-1}} - 1$ też mają rozkład lognormalny z wartością oczekiwaną:

$$E(R_T) = e^{\mu} - 1, \tag{6}$$

i wariancją:

$$V(R_T) = e^{2\mu}(e^{\sigma^2} - 1). \tag{7}$$

Rozwiązując równania (6) i (7), otrzymujemy wzór:

$$\sigma = \sqrt{\log\left(1 + \frac{V(R_T)}{(1+E(R_T))^2}\right.}. \tag{8}$$

Tabela 1 przedstawia wartości σ dla różnych odchyleń standardowych stóp zwrotu i wartości oczekiwanej równej 10%. Różnica między prezentowanymi wartościami nie jest duża, rzędu kilku punktów procentowych i wydaje się, że nie ma ona większego znaczenia dla praktycznych zastosowań. Pozory jednak mylą. Niewielka zmiana wartości σ implikuje istotne różnice w wartości opcji. Przykładowe obliczenia prezentuje tabela 2.

Tabela 1. Zależność między wariancją stóp zwrotu a zmiennością cen akcji σ (obliczenia wykonane dla $E(R_T) = 10\%$)

$V(R_T)$ (w %)	5	10	15	20	25	30	35	40
σ (w %)	13,26	18,57	22,53	25,77	28,56	31,01	33,22	35,22

Tabela 2. Zależności między cenami 100 opcji kupna wyznaczanymi dla wariancji i współczynnika σ (obliczenia wykonane na podstawie wzoru (2) dla danych z tabeli 1 oraz: $S_k=60$, $S_t=50$, $T=365$, $r=0{,}06$)

c dla wariancji	0,3	28,4	93,1	175,47	266,2	361,26	458,7	557,46
c dla zmienności historycznej	67,82	150,8	220,63	280,63	333,58	380,8	423,82	463,02

Zmienność historyczna byłaby bardzo dobrym sposobem estymowania zmienności, gdyby zmienność cen akcji była stała (tak jak zakłada to model BSM). Liczne badania empiryczne pokazują, że zmienność nie jest stała w czasie. Efektem tego jest systematyczny błąd w wycenie opcji, gdy korzysta się ze zmienności historycznej ([12], s. 200). Już autorzy modelu zauważyli ([2], s. 339-418), że ich wzór podaje zbyt wysoką cenę opcji, gdy zmienność historyczna jest zbyt duża, i zbyt niska, gdy zmienność jest mała.

Innym podejściem jest wyznaczanie zmienności implikowanej, na podstawie notowań opcji, będących w obrocie. Niestety nie jest możliwe w modelu BSM analityczne przedstawienie parametru zmienności jako funkcji pozostałych parametrów $\sigma=f(c, S, E, T, r)$. Dlatego też wyznaczenia zmienności dokonuje się metodami numerycznymi, przy założeniu że pozostałe parametry modelu są znane, a cena opcji na rynku jest ceną sprawiedliwą. Najczęściej stosuje się w tym rekurencyjny algorytm Newtona-Raphsona:

$$\sigma_{i+1}=\sigma_i-\frac{c(\sigma_i)-c}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}}, \tag{9}$$

gdzie:

σ_i – zmienność implikowana uzyskana w i-tym kroku algorytmu,
c – rynkowa cena opcji,
$c(\sigma_i)$ – cena wyznaczona z modelu BSM dla σ_i,
$\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}$ – parametr kappa[2].

[2] Występujący w literaturze też jako parametr vega.

Procedurę powtarza się aż do uzyskania warunku:

$$|c-c(\sigma_{i+1})|\leqslant\varepsilon, \tag{10}$$

gdzie ε to założony poziom dokładności.

Za wartość startową procedury można przyjąć ([6], s. 227-230):

$$\sigma=\sqrt{\left|\ln\frac{S_T}{K}+rT\right|\frac{2}{T}}. \tag{11}$$

Jednak, by skorzystać z algorytmu Newtona-Raphsona, niezbędna jest znajomość cząstkowej pochodnej ceny opcji względem parametru zmienności (współczynnika kappa). W wielu wypadkach współczynnik ten nie jest znany w postaci analitycznej. W takich wypadkach zmienność implikowaną wyznacza się, wykorzystując metodę bisekcji ([4], s. 170-171):

$$\sigma_{i+1}=\sigma_L+(c_i-c_L)\frac{\sigma_H-\sigma_L}{c_H-c_L}, \qquad c_L<c_i<c_H \text{ oraz } \sigma_L<\sigma_i<\sigma_H, \tag{12}$$

gdzie:

c_L – cena opcji wynikająca ze zmienności σ_L,
c_H – cena opcji wynikająca ze zmienności σ_H,
c_i – cena opcji wynikająca z poszukiwanej wartości σ_i.

W kolejnych krokach algorytmu, o ile nie jest spełniony warunek (10), dokonuje się podstawienia:

$$\sigma_L=\sigma_{i+1} \text{ jeśli } c(\sigma_{i+1})<c_m \quad \text{lub} \quad \sigma_H=\sigma_{i+1} \text{ jeśli } c(\sigma_{i+1})>c_m. \tag{13}$$

Znane są również metody niewykorzystujące rozwiązań rekurencyjnych ([3], s. 80-83, [5], s. 593-603), ale mało przydatne ze względu na zbyt duże niedokładności.

Użycie zmienności implikowanej też ma swoje ograniczenia, albowiem zależy ona w istotny sposób od czasu pozostałego do wygaśnięcia opcji oraz relacji ceny realizacji opcji do ceny akcji. W praktyce obserwowany jest tzw. uśmiech zmienności (*volatility smile*), który przejawia się wzrostem zmienności implikowanej, gdy cena waloru bazowego różni się znacznie od ceny realizacji opcji. Ponadto obserwuje się spadek zmienności wraz ze wzrostem czasu pozostałego do wygaśnięcia oraz wzrost zmienności, gdy opcja ma dużą wartość wewnętrzną ([12], s. 200).

Model BSM mimo ponad trzydziestoletniego używania wciąż stanowi użyteczne narzędzie do wyceny opcji. Należy jednak brać pod uwagę jego liczne ograniczenia i z dystansem podchodzić do wyników uzyskanych z jego pomocą.

Literatura

[1] Black, F., Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 1973, no. 81.

[2] Black, F., Scholes, M., *The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency*, Journal of Finance 1972, no. 27.

[3] Brenner, M., Subrahmanyam, M., *A Simple Solution to Compute the Implied Standard Deviation*, Financial Anaysts Journal 1988.

[4] Campbell, J.Y., Lo, A.W., MacKinlay, A.C., *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, 1997.

[5] Corrado, C., Miller, T., *A Note on a Simple, Accurate Formula to Compute Implied Standard Deviations*, Journal of Banking and Finance 1996, no. 50.

[6] Haug, E., *The Comlete Guide to Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill, 1989.

[7] Hull, J., *Option, Futures & Other Derivatives*, Prentice Hall, 1999.

[8] Jakubowski, J., Palczewski, A., Rutkowski, M., Stettner, Ł., *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.

[9] Manaster, S., Koehler, G., *The Calculation of Implied Variances from the Black-Sacholes Model*, Journal of Finance 1982, no. 37.

[10] Merton, R.C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Managment Science 1973, no. 4.

[11] Natenberg, S., *Option Volatility & Pricing*, Probus Publishing Company, Chicago 1994.

[12] Rutkowski, M. (red.), *Matematyka finansowa, instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa 2003.

[13] Szyszka, A., *Ograniczenia arbitrażu a efektywność rynku kapitałowego*, Studia Ekonomiczne 2003, nr 3.

OBSTACLES IN IMPLEMENTING THE BLACK-MERTON-SCHOLES MODEL RELATED TO DETERMINING THE VOLATILITY INDEX

Summary

The aim of the article is to indicate the obstacles in implementing the Black-Merton-Scholes model. After presenting the general assumptions of the model the author indicates the limits of where it can be applied. He concentrates on the volatility index. The analysis has proved the necessity to be cautious in implementing the discussed model. This thesis has been supported by sample calculations.