Katarzyna APPELT

MODEL WYCENY GIEŁDOWEJ OPCJI KUPNA WEDŁUG FISHERA BLACKA I MYRONA SCHOLESA – ZAŁOŻENIA I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

Wstęp

Model Blacka-Scholesa, pozwalający na oszacowanie ceny prostej opcji kupna w warunkach równowagi rynkowej, należy do największych osiągnięć ekonomii finansowej. O doniosłości tego odkrycia świadczy uniwersalny charakter modelu[1], fakt powszechnego wykorzystywania formuły wyceny B-S w praktyce życia gospodarczego oraz rola modelu wyceny B-S w rozwoju rynków finansowych[2].

Celem poniższego opracowania jest próba wyjaśnienia tego, co kryje się za formułą wyceny prostej opcji kupna. Część pierwsza artykułu charakteryzuje założenia modelu B-S ze szczególnym uwzględnieniem procesów oddających

---

[1] Za wymiarem uniwersalnym modelu B-S kryje się szeroki wachlarz możliwości aplikacyjnych, jakie oferuje ten model. Możliwości wykorzystania teorii wyceny B-S nie ograniczają się tylko do wyceny opcji finansowych i derywatów finansowych. Metodologię wyceny Blacka Scholesa stosuje się również do wyceny tzw. corporate liabilities – instrumentów służących finansowaniu działalności inwestycyjnej przedsiębiorstw, np.: obligacji zamiennych, warrantów, akcji uprzywilejowanych i zwykłych. Koncept stojący za modelem B-S znajduje również zastosowanie w świecie oderwanym od instrumentów rynku kapitałowego: w obrębie opcji rzeczywistych.

[2] Model B-S stał się powszechnie wykorzystywanym narzędziem wyceny przez inwestorów i analityków finansowych na całym świecie. W literaturze analizującej wpływ modelu wyceny opcji na rozwój rynków finansowych mówi się często o przełomowej technologii wyceny opcji (option-pricing technology), która okazała się, po pierwsze, źródłem innowacji finansowych na niespotykaną dotąd skalę, i po drugie, uruchomiła samonapędzającą się spiralę rozwoju rynku opcji giełdowych, rynków opcji pozagiełdowych oraz badań naukowych udoskonalających teorię wyceny.

dynamikę cen akcji. W części drugiej wyjaśniono koncepcję portfela arbitrażowego oraz dokonano opisu wyprowadzenia cząstkowego równania różniczkowego B-S. Część trzecia zawiera analizę wrażliwości modelu B-S.

1. Charakterystyka założeń modelu B-S

Formuła modelu wyceny prostej opcji kupna według Blacka-Scholesa z roku 1973 ma następującą postać:

$$w = xN(d_1) - ce^{-r(t^*-t)}N(d_2),$$

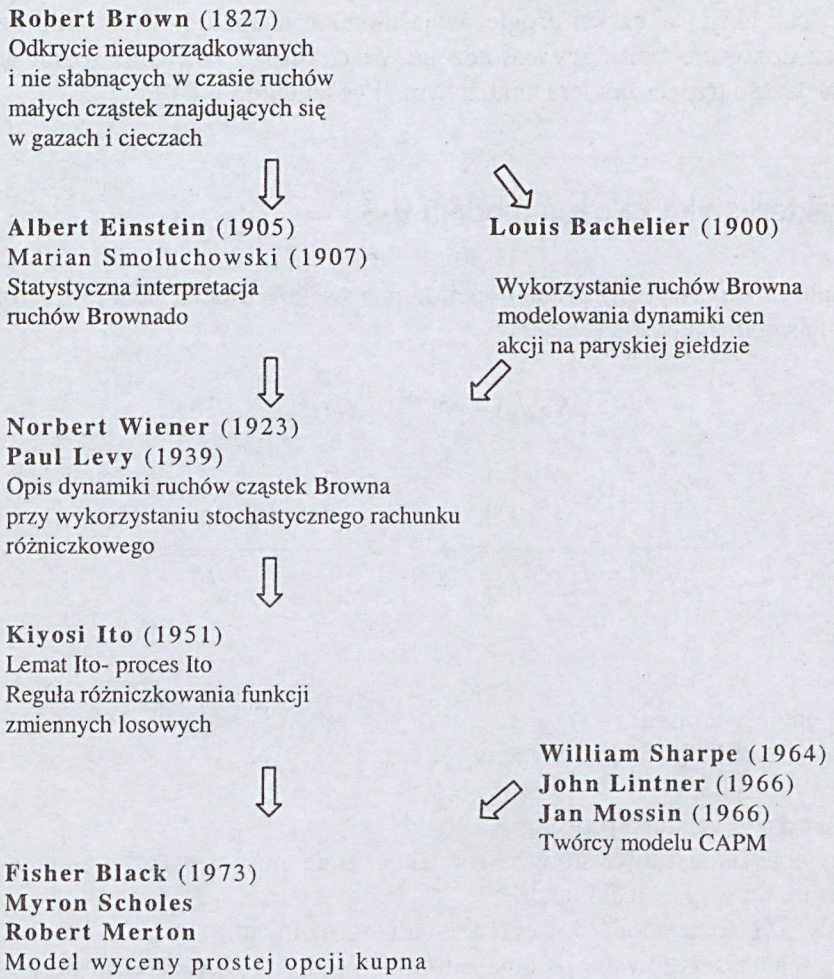
$$w = xN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r + \frac{\upsilon^2}{2})(t^*-t)}{\upsilon\sqrt{t^*-t}}\right\} - e^{-r(t^*-t)}cN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r - \frac{\upsilon^2}{2})(t^*-t)}{\upsilon\sqrt{t^*-t}}\right\}, \quad (1)$$

gdzie:
w – cena opcji (wariantu),
x – bieżąca cena akcji (w dniu wyceny),
c – cena wykonania,
r – wolna od ryzyka stopa procentowa,
υ – odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji, zmienność cen akcji,
t^*-t termin do wygaśnięcia opcji,
$N(d)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego.

Zanim scharakteryzowane zostaną założenia modelu B-S warto zauważyć, że jego korzenie sięgają zarówno nauk ekonomicznych, jak i przyrodniczych. Do wyprowadzenia modelu B-S wykorzystano dorobek naukowy światowej sławy matematyków, fizyków i ekonomistów (patrz rys. 1).

Kolejność nazwisk oraz obszary badawcze badanych zjawisk pozwalają na poznanie, już na tym etapie analizy, najważniejszych cech tego modelu:
- model wyceny opcji Blacka-Scholesa jest modelem interdyscyplinarnym,
- do estymacji modelu wykorzystano zaawansowany aparat matematyczny – rachunek stochastycznych równań różniczkowych i całkowych oddający w sposób ilościowy wpływ czasu i niepewności otoczenia na wycenę instrumentów finansowych.

Założenia modelu B-S podzielić można na grupę założeń fundamentalnych (technicznych), na których opiera się konstrukcja modelu, oraz na grupę założeń upraszczających.

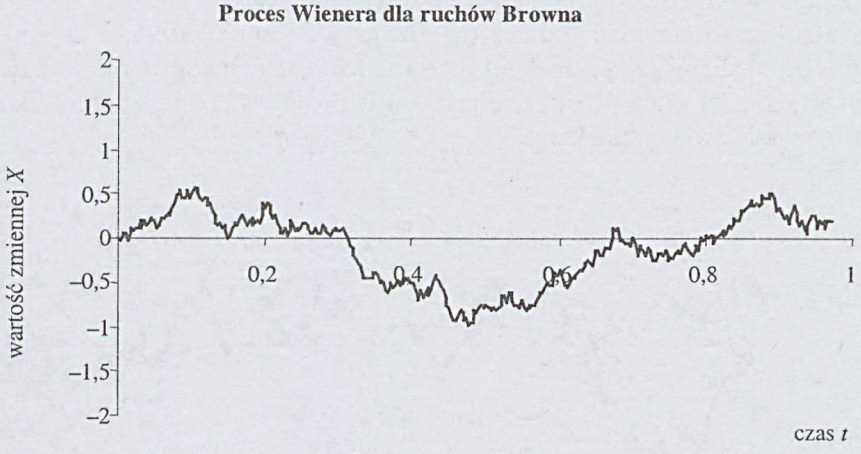


Rysunek 1. Dorobek naukowy matematyków, fizyków i ekonomistów wykorzystany do stworzenia modelu B-S

Do grupy założeń technicznych należy założenie o tym, że:
- dynamikę cen instrumentów bazowych – opisuje geometryczny ruch Browna; rozkład cen akcji jest logarytmiczno-normalny;
- cena opcji jest funkcją czynnika losowego (cena instrumentu bazowego) i deterministycznego (czas); zmiany cen opcji opisuje lemat Ito;
- istnieje możliwość zbudowanie portfela składającego się z akcji i opcji, który na bazie argumentu braku arbitrażu cenowego przynosi dochód równy wolnej od ryzyka stopie procentowej;
- oczekiwana stopa zwrotu z opcji i akcji jest funkcją parametryzowaną przez współczynnik beta z modelu CAPM.

W grupie założeń upraszczających wyszczególnia się następujące:
- krótkoterminowa stopa procentowa rynkowa i wolna od ryzyka jest znana i stała w czasie;
- z akcji w czasie życia opcji nie są wypłacane dywidendy;
- wyceniana opcja jest opcją typu europejskiego;
- sprzedaż bądź kupno akcji i opcji jest zwolnione od opłat i podatków – koszty transakcyjne są zerowe;
- prawo nie zabrania ani nie nakłada ograniczeń co do wykonywania krótkiej sprzedaży;
- akcje są nieskończenie podzielne.

Jednym z najistotniejszych założeń przyjętych przez Blacka i Scholesa jest założenie dotyczące ewolucji zachowań cen akcji. Model Blacka-Scholesa zakłada, że dynamikę cen instrumentu bazowego opcji opisuje geometryczny ruch Browna. Geometryczny ruch Browna stanowi modyfikację standardowego ruchu Browna – ruchu oddającego dynamikę nieuporządkowanych i niesłabnących w czasie cząstek Browna[3]. Ruch cząstek Browna należy do jednego z typów procesów stochastycznych[4]. Przykładową trajektorię błądzenia losowego cząstek Browna przedstawia rysunek 2.



Rysunek 2. Symulacja błądzenia losowego $W_t = W_{t-dt} + z_t$ dla dt = 1/365 roku = 0,0027
Źródło: opracowanie własne

[3] Innymi przykładami zjawisk przypominającymi ruchy Browna mogą być ciśnienie atmosferyczne, temperatura powietrza w określonym punkcie kuli ziemskiej, ilość bakterii w rozwijającej się kolonii.

[4] Proces stochastyczny (losowy) $\xi = \xi(t)$ definiuje się jako funkcję parametru rzeczywistego $t \in T$ (interpretowany jako czas), której wartości $\xi(t)$ przy każdym t są zmiennymi losowymi. Istnieje wiele typów procesów stochastycznych. Ruchy Browna (ruchy pyłów i zawiesin w gazach i cieczach) uznawane są za szczególny przypadek procesów stochastycznych typu Markowa.

Ruch Browna opisuje formuła Wienera mająca następującą postać (J. Hull, 2000, s. 220):

$$dW_t = \varepsilon\sqrt{dt},$$

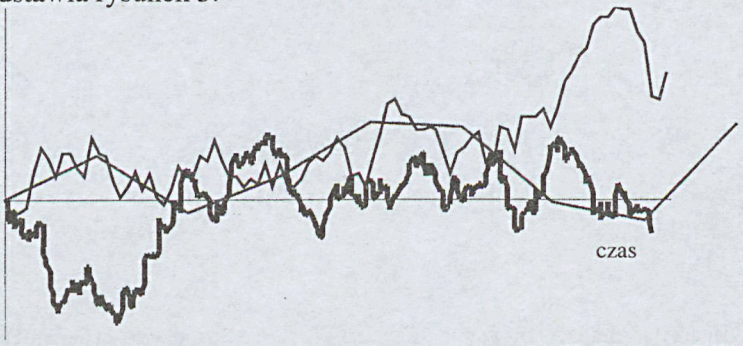
gdzie:

ε – zmienna losowa o rozkładzie normalnym $\phi(0,1)$,

dW_t – przyrosty procesu mają rozkład normalny $\phi(0, dt)$.

Podstawowe cechy standardowego ruchu Browna:

- jeśli $W_0 = 0$ i $0 < t_1 < ... < t_n$, to zmienne losowe $(W_{t1}, W_{t2} - W_{t1}, ..., W_{tn} - W_{tn-1})$ są zdarzeniami niezależnymi (J. P. Fouque, G. Pananicolaou, K. R. Sircar, s. 2);
- dW_t jest procesem o przyrostach stacjonarnych i niezależnych (A. Weron, R. Weron, 1998, s. 165);
- zdarzenia W_t nie są powiązane zależnościami przyczynowo-skutkowymi: historyczny przebieg zdarzeń jest nieistotny dla celów oszacowania wartości zmiennych losowych w przyszłości; wartość zdarzenia W w okresie t zależy wyłącznie od wartości zdarzenia w chwili $t-1$ oraz od składnika losowego nazywanego szumem: $W_t = W_{t-1} + \varepsilon$; taki proces kwalifikuje ruchy Browna do określonej grupy procesów stochastycznych nazywanych procesami typu Markowa[5];
- realizacje ruchów Browna są nieróżniczkowalne;
- ruch Browna to przykład fraktala (M. Baxter, A. Rennie, 1996, s. 49); niezależnie od skali, w jakiej analizuje się ruch cząstek, budowa morfologiczna zawsze jest taka sama. Realizacje procesu Browna wykazujące jego fraktalną naturę przedstawia rysunek 3.



W dla $dt = 0{,}0027$ W dla $dt = 0{,}1339$ W dla $dt = 0{,}0108$

Rysunek 3. Realizacje procesu Browna wykazujące jego budowę fraktalną
Źródło: opracowanie własne

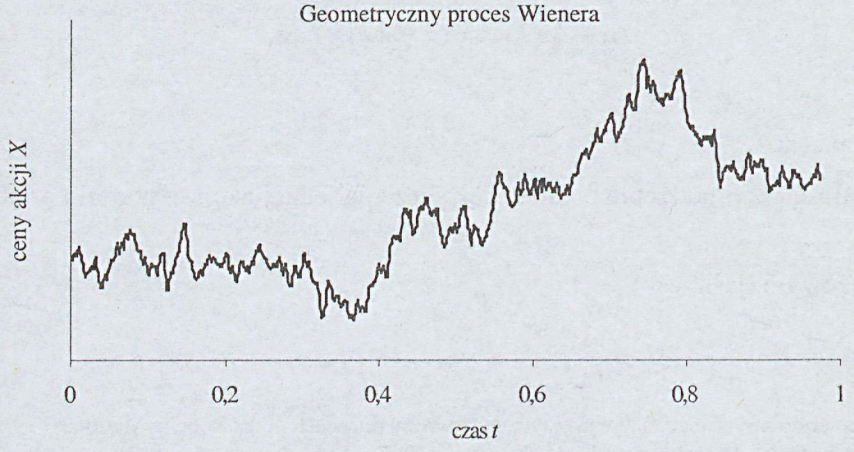
[5] Procesy Markowowskie są modelami zjawisk, w których znajomość stanu układu w danej chwili determinuje całkowicie związki probabilistyczne dla chwil przyszłych: $P\{X(t_0 + \tau)\langle y | I^* I^{**}\} = P\{X(t_0 + \tau) I^*\} = P\{X(t_0 + \tau)\langle y | X(t_0) = x\}$, gdzie: I^* i I^{**} oznaczają odpowiednio informacje w t_0 i przed t_0 (L. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew, *Matematyka*, s. 794).

Formuła opisująca geometryczny ruch Browna stanowi modyfikację ogólnego procesu Wienera i przyjmuje następującą postać:

	Ogólny proces Wienera $dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dW_t$	
	Arytmetyczny ruch Browna $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$	**GEOMETRYCZNY RUCH BROWNA** $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t dW_t$
Współczynnik przesunięcia (dryfu)	$\mu(X_t,t) = \mu$	$\mu(X_t,t) = \mu X_t$
Współczynnik zmienności	$\sigma(X_t,t) = \sigma$	$\sigma(X_t,t) = \sigma X_t$

Geometryczny proces Wienera dopuszcza tylko wartości nieujemne oraz uwzględnia parametry, które są specyficzne dla rynku walorów finansowych: zmienność cen oraz dryf, czyli wykładniczą stopę wzrostu danego aktywu finansowego. Zmienność (szczerbatość wahań) oraz trend można modelować odpowiednio za pomocą odchylenia standardowego σ oraz średniej μ. Nieujemność zmiennych losowych zapewnia analiza logarytmów zmian cen akcji.

Przykładową trajektorię geometrycznego ruchu Browna przedstawia rysunek 4.



Rysunek 4. Symulacja geometrycznego procesu Wienera
Źródło: opracowanie własne

2. Opis wyprowadzenia cząstkowego równania różniczkowego w oparciu o równanie przychodu z inwestycji w wolny od ryzyka portfel złożony z akcji i opcji

Fundamentem, na jakim opiera się model wyceny opcji B-S, jest cząstkowe równanie różniczkowe opisujące dynamikę cen opcji. Równanie to wyprowadzono z równania przychodu z inwestycji w wolny od ryzyka portfel (złożony z długiej pozycji w akcji i krótkiej w opcji)[6].

Pomysł wykorzystania koncepcji portfela arbitrażowego złożonego z długiej (krótkiej) pozycji w akcji i krótkiej (długiej) pozycji w opcji był pomysłem nowatorskimi[7]. Na bazie argumentu braku możliwości arbitrażu cenowego Black i Scholes skonstruowali wolny od ryzyka portfel złożony akcji i opcji stanowiący rodzaj idealnego zabezpieczenia (zysk/strata z akcji równoważona jest stratą/zyskiem z wystawionych opcji). Następnie dowiedli, że aby stopa zwrotu z tak skonstruowanego portfela równała się wolnej od ryzyka stopie procentowej, inwestor posiadający jedną akcję o wartości x musi sprzedać $\frac{1}{w_1}$ opcji o wartości $\frac{1}{w_1}w$. W portfelu arbitrażowym zawierającym akcję i opcje zmiana w Δx akcji rekompensuje zmiana w $\frac{1}{w_1}\Delta w$ opcji.

Równanie przychodu z inwestycji w wolny od ryzyka portfel złożony z akcji i opcji przyjmuje następującą postać:

$$\Delta x - \Delta w / w_1 = (x - w / w_1) r \Delta t, \tag{2}$$

gdzie:
x – cena akcji,
$\frac{1}{w_1}$ – ilość opcji potrzebnych do zabezpieczenia jednej akcji w portfelu arbitrażowym (jeśli $w_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$),

[6] Lemat Ito po raz pierwszy wykorzystany został w finansach przez Roberta Mertona.

[7] Patrz: C. M. Sprenkle (1961), H. F. Ayres (1963), A. J. Boness (1964); A. P. Samuelson (1964 i 1969); W. J. Baumol, B. G. Malkiel, R. E. Quandt (1966); A. Y. Chen 1970. Podejście zaprezentowane w tych pracach opierało się na formule na wartość oczekiwaną opcji.

$\frac{1}{w_1} w$ – wartość opcji potrzebnych do zabezpieczenia akcji x,

$\Delta w / w_1$ – wartość opcji potrzebnych do zabezpieczenia akcji w sytuacji, gdy cena akcji wzrosła do Δx,

$(x - w/w_1) r\Delta t$ – dochód z inwestycji $(x - w/w_1)$ w wolną od ryzyka lokatę ze stopą r.

Zakładając, że cena opcji $w(x,t)$ jest funkcją czynnika losowego (cena instrumentu bazowego) i deterministycznego (czas do wygaśnięcia kontraktu) do opisu zmian cen opcji Δw, w równaniu (2) wykorzystano lemat Ito – regułę różniczkowania funkcji zmiennych losowych:

$$\Delta w = w(x + \Delta x, t + \Delta t) - w(x,t) = w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \Delta x^2 + w_2 \Delta t, \tag{3}$$

gdzie:

$w_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$,

$w_2 = \frac{\partial w}{\partial t}$,

$w_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Kwadratowy przyrost cen akcji Δx^2 – dla małych przyrostów Δt – wyraża się jako $\Delta x^2 = x^2 \upsilon^2 \Delta t$ (gdzie υ – odchylenie standardowe stóp zwrotu akcji).

Równanie (3), po podstawieniu za Δx^2 wyrażenia $x^2 \upsilon^2 \Delta t$, przyjmuje następującą postać:

$$\Delta w = w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t. \tag{4}$$

Wykorzystując lemat Ito wyrażony równaniem (4) i podstawiając go do lewej strony równania (2) otrzymujemy następujące równanie:

$$\Delta x - (w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t) / w_1 = -\left(\frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 + w_2\right) \Delta t / w_1. \tag{5}$$

W równaniu (5) zmiany Δx wzajemnie się znoszą. Równanie przychodu z tak skonstruowanego portfela staje się równaniem niezależnym od zmian czynnika losowego Δx. Dochód z $\Delta x - \Delta w / w$ równa się dochodowi z inwestycji $(x - w/w_1)$ w wolną od ryzyka lokatę ze stopą r. Serie kolejnych prze-

kształceń doprowadzają równanie (2) do cząstkowego równania różniczkowego zwanego równaniem B-S.

$$\Delta x - (w_1 \Delta x + \frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 \Delta t + w_2 \Delta t)/w_1 = (x - w/w_1) r \Delta t$$

$$\downarrow$$

$$-\left(\frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 + w_2\right) \Delta t / w_1 = (x - w/w_1) r \Delta t$$

$$\downarrow$$

$$rw - w_1 xr - \frac{1}{2} w_{11} \upsilon^2 x^2 = w_2. \tag{6}$$

Taką samą postać cząstkowego równania różniczkowego Black i Scholes otrzymali wyprowadzając równanie ceny opcji przy wykorzystaniu modelu CAPM[8].

Równanie (6) to równanie różniczkowe dającego sprowadzić się do równania przewodnictwa cieplnego. Rozwiązaniem tego równania dla warunku brzegowego $w^* = \max[x - c, 0]$ jest następująca formuła:

$$w(x,t) = xN(d_1) - ce^{-r(t^*-t)} N(d_2),$$

$$w = xN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r + \frac{\upsilon^2}{2})(t^* - t)}{\upsilon\sqrt{t^* - t}}\right\} - e^{-r(t-t^*)} cN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r - \frac{\upsilon^2}{2})(t^* - t)}{\upsilon\sqrt{t^* - t}}\right\}, \tag{7}$$

gdzie:
w – cena opcji (warrantu),
x – bieżąca cena akcji (w dniu wyceny),
c – cena wykonania,
r – wolna od ryzyka stopa procentowa,

[8] CAPM – model wyceny aktywów kapitałowych – opisuje relację pomiędzy ryzykiem a oczekiwaną stopą zwrotu w warunkach równowagi rynkowej. Autorzy formuły założyli, że oczekiwana stopa zwrotu z opcji zależy od ryzyka opcji w taki sam sposób jak oczekiwana stopa zwrotu z akcji zależy od ryzyka cen akcji: $E(\Delta x/x) = r\Delta t + \alpha\beta_x \Delta t$; $E(\Delta w/w) = r\Delta t + \alpha\beta_w \Delta t$.

υ – odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji,
$t^* - t$ – termin do wygaśnięcia opcji,
$N(d)$ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego,
$w^* = \max[x-c,0] = \begin{cases} x-c & x \rangle c \\ 0 & x \langle c \end{cases}$ warunek brzegowy ceny opcji w dniu wygaśnięcia.

3. Współczynniki wrażliwości ceny opcji kupna

Cena opcji w modelu (7) jest funkcją następujących zmiennych:
– ceny akcji X,
– parametru zmienności oznaczanego jako υ lub σ,
– ceny wykonania c,
– czasu wygaśnięcia opcji $T = t^* - t$.
– wolnej od ryzyka stopy procentowej r [9].

Model B-S pozwala na oszacowanie współczynników wrażliwości ceny opcji. Współczynniki wrażliwości modelu B-S dla cen opcji kupna przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Współczynniki wrażliwości cen opcji kupna

DELTA	GAMMA	RHO	VEGA	THETA
$\Delta_{call} = \frac{\partial w}{\partial X}$	$\Gamma_{call} = \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial X} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}$	$\rho_{call} = \frac{\partial w}{\partial r}$	$vega_{call} = \frac{\partial w}{\partial \sigma}$	$\Theta_{call} = \frac{\partial w}{\partial T}$ $(T = t^* - t)$

Źródło: opracowanie własne.

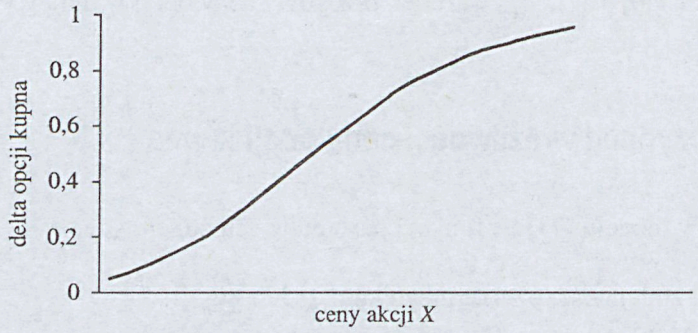
DELTA
Delta opcji kupna mierzy wpływ zmian ceny akcji na cenę opcji.

$$\Delta_{call} = \frac{\partial w}{\partial X} = N\{\frac{\ln(X/C) + [r + (\sigma^2/(t^* - t))]}{\sigma\sqrt{t^* - t}} = N(d_1) \rangle 0.$$

Delta opcji kupna przyjmuje wartości z przedziału od zera do jeden. Opcje będące silnie in the money mają deltę bliską jedności – ceny opcji będą zmieniać

[9] Inwestor wyceniający opcje ma bezpośredni dostęp do 4 z 5 zmiennych równania równowagi. Oszacowania wymaga jedynie wariancja stóp zwrotu. Istnieją dwa podejścia do wyliczenia wariancji stóp zwrotu. Pierwsze sprowadza się do wyliczenia historycznych stóp zwrotu. W drugim implikowana wartość wariancji oszacowywana jest z wartości rynkowych opcji.

się niemal dokładnie tak samo jak zmieniają się wartości instrumentu bazowego; opcje będące głęboko out of the money mają deltę bliską zeru. Kształtowanie się delty w zależności od wartości wewnętrznej opcji kupna przedstawia rysunek 5.



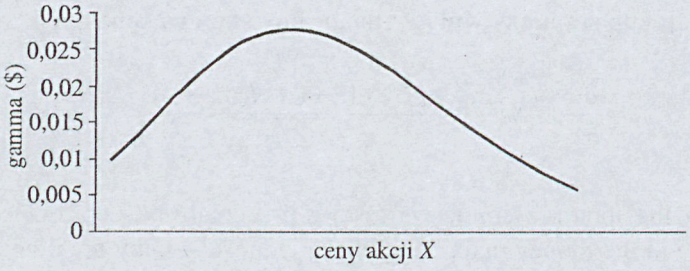
Rysunek 5. Delta opcji kupna
Źródło: opracowanie własne

GAMMA

Gamma jest miarą elastyczności delty opcji kupna względem zmian cen akcji. Gammę określa się również jako miarę niestabilności współczynnika delty.

$$\Gamma_{call} = \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial X} = \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} = e^{-d_1^2/2}\frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}.$$

Gamma opcji kupna osiąga najwyższe rozmiary w przypadku opcji at the money oraz zmienia się wraz ze zmiennością cen instrumentów bazowych[10]. Wysoki poziom gammy wskazuje na niestabilną deltę.



Rysunek 6. Gamma opcji kupna
Źródło: opracowanie własne

[10] M. Puławski, *Innowacje finansowe na światowych giełdach terminowych*, s. 144.

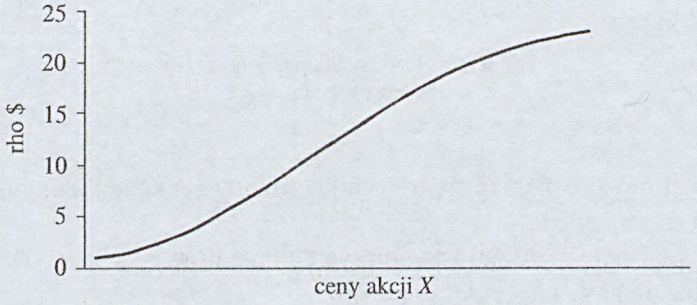
RHO

Ryzyko Rho mierzy wrażliwość opcji kupna na zmiany wolnej od ryzyka stopy procentowej.

$$\rho_{call} = \frac{\partial w}{\partial r} = (t^* - t) C e^{-r_C (t^* - t)} N\{\frac{\ln(X / C) + [r - (\sigma^2 / (t^* - t))]}{\sigma\sqrt{t^* - t}}\} > 0.$$

Wolna od ryzyka stopa procentowa odzwierciedla koszt utrzymania pozycji opcyjnej lub alternatywny koszt kapitału/zysku, jaki mogłyby przynieść kapitały zainwestowane w bezpieczne lokaty finansowe[11].

Zakłada się, że wzrost oprocentowania doprowadza do wzrostu kosztu utrzymania pozycji w akcjach, powodując wzrost atrakcyjności opcji kupna, co przekłada się na wyższą cenę opcji.



Rysunek 7. Rho opcji kupna
Źródło: opracowanie własne

THETA

Ceny opcji, przy założeniu pozostałych czynników niezmiennych, mają tendencję do spadku wraz z upływem czasu, czyli w miarę zbliżania się terminu wygaśnięcia kontraktu opcyjnego[12].

Theta mierzy wrażliwość cen opcji na upływ czasu do terminu wygaśnięcia opcji.

$$\Theta_{call} = -\frac{\partial w}{\partial T} = -\frac{Xn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rCe^{-rT} N(d_2) =$$

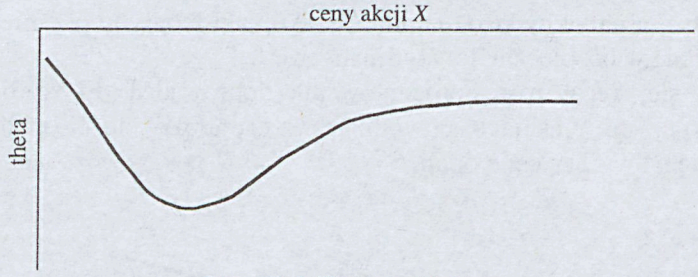
[11] A. J. Baird, *Rynek opcji*, s. 57.

[12] Wartości brzegowe cen opcji kupna dla $T = 0$ i $T = \infty$ przedstawia rysunek 5.

$$= -\frac{Xn(d_2)C / Xe^{rT}\sigma}{2\sqrt{T}} - rCe^{-rT}N(d_2) =$$

$$= -Ce^{rT}\{\frac{e^{-d_2^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} + rN(d_2)\} \text{ dla } (t = t^* - t).$$

Wartości thety dla poszczególnych cen akcji przedstawia rysunek 8.



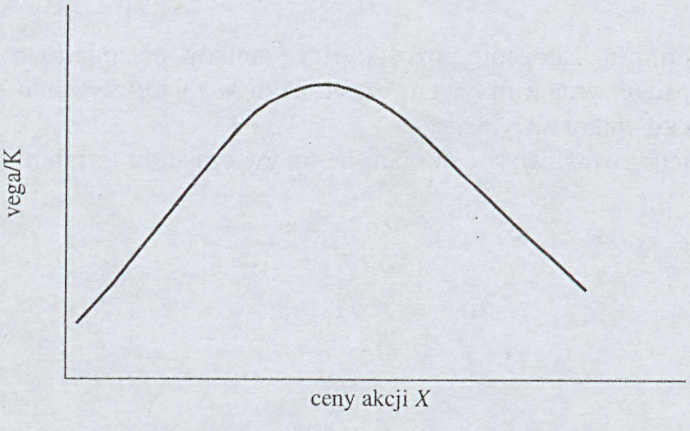
Rysunek 8. Theta opcji kupna
Źródło: opracowanie własne

VEGA

Cena opcji może zmieniać się w wyniku zmiany rynkowej zmienności implikowanej.

Ryzyko vegi należy do najważniejszych elementów ryzyka w obrocie opcjami i definiuje się je w następujący sposób:

$$Vega_{call} = \frac{\partial w}{\partial \upsilon} = Xn(d_1)\sqrt{T} = X\frac{e^{-d_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}.$$



Rysunek 9. Vega opcji kupna
Źródło: opracowanie własne

Ryzyko vegi nie jest powiązane z ryzykiem delty. Zmienności implikowane mogą wahać się w każdą stronę, niezależnie od kierunku zmian cen akcji.

Bibliografia

Baird A. J., *Rynek opcji, Strategie inwestycyjne i analiza finansowa*, Dom Wydawniczy ABC, Warszawa 1998.

Baumol W., Maekiel B., Quandt R., *The Valuation of Convertible Securities*; „Quaterly Journal of Economics" February 1996, No. 80.

Baxter M., Rennie A., *Financial Calculus*, Cambrigde University Press 1996.

Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy" May–June 1973, No. 81.

Black F., *How we Come up with the Option Formula*, „Journal of Portfolio Management" 1989, No. 15.

Black F., *Fact and Fantasy in the Use of Options*, „Financial Analysts Journal", 1975 July – August.

Bronsztejn L. N., Siemiendiajew, *Matematyka Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968.

Chance D., *An Introduction to Derivatives*, Fort Worth: The Dryden Press, 1995.

Chen A., *A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market*, „Journal of Finance" 25 December 1970.

Cutler D. M., Poterba J. M., Summers L. H., *What Moves Stock Prices?*, „The Journal of Portfolio Management", Spring 1989.

Fama E., *The Behavior of Stock Market Prices*, „Journal of Business", January 1965.

Fouque J. P, Pananicolaou G., Sircar K. R., *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press.

Gątarek D., Maksymiuk R., *Wycena i zabezpieczenie pochodnych instrumentów finansowych*, K. E. LIBER, Warszawa 1998.

Haug E. G. *A Complete Guide to Option Pricing Formulas*, New York: McGrawHill 1998.

Hull C. J., *Kontrakty terminowe i opcje*, Wydawnictwo WIG-Press, Warszawa 1997.

Hull C. J., *Options, Futures and other Derivatives*, Upper Saddle River, New York: Prentice Hall 2000.

Krzyśko M., *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, WNT, 2000.

Merton R., *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics and Management Science" Spring 1973, No. 4.

Merton R. C., *Applications of Option-Pricing Theory: Twenty- Five Rears Later*, „Amerian Economic Review", June 1998.

Pliska R. S., *Intruduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models* 1997.

Plucińska A., Pluciński E., *Probabilistyka*, PWN, Warszawa 2000.

Puławski, *Innowacje na światowych giełdach terminowych*, Warszawa: SGPiS, 1991.

Ritchen M., *Derivative Markets: Theory, Strategy and Applications*, Harper Collins College Publishers, New York 1996.

Rosenblatt M., *Procesy stochastyczne*, PWN, Warszawa 1967.

Rozanow J. A., *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1974.

Samuelson P., *Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*, „Industrial Management Review" 1965, No. 6.

Scholes M. S., *Derivatives in a Dynamic Environment*, „American Economic Review", June 1998.

Sharpe W., *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, „Journal of Finance" September, Vol. 19, Issue 3.

Smith C., *Option Pricing: A Review*, „Journal of Financial Economics" Jan–March 1976 No. 3.

Smithson C. W., Smith C. W., Wilford S. D., *Zarządzanie ryzykiem finansowym: instrumenty pochodne, inżynieria finansowa i maksymalizacja wartości*, Dom Wydawniczy ABC, Kraków 2000.

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa: wycena instrumentów pochodnych, symulacje komputerowe, statystyka rynkowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

Katarzyna Appelt

The model of estimating a stock exchange option of purchasing according to Fisher Black and Myron Scholes – assumptions and analysis of sensitivity

Summary

The price of simple call option estimates following formula:

$$w = xN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}}\right\} - e^{-rT}cN\left\{\frac{\ln(\frac{x}{c}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}}\right\}.$$

This formula was derived by Fisher Black and Myron Scholes in 1973 and today it is considered to belong to the most important accomplishments of the financial economics.

The article undertakes an attempt to explain the concept underlying the model. Part one characterizes its main assumptions. Part two presents and explains equation of zero-beta (hedged) portfolio. It also describes the process which led to derivation of Black-Scholes differential equation. Part three constitutes the Greek letters which measure sensitiveness of call option to variables influencing its price.

BIBLIOTEKA AE Poznań