Krzysztof Piasecki

SUBIEKTYWNE UPORZĄDKOWANIE WARTOŚCI WYMIERNYCH JAKO ROZMYTE RELACJE TYPU FLE I FLT

1. Wprowadzenie

W obrębie matematyki porównanie pary liczb rzeczywistych jest, w sposób obiektywny i jednoznaczny, opisane przez prawo trichotomii: pierwsza jest mniejsza od drugiej lub obie są sobie równe lub pierwsza jest większa od drugiej. Model ten nie zawsze jednak w pełni odzwierciedla realne metody porównania wartości reprezentowanych przez liczby rzeczywiste. Jedną z przyczyn zniekształcających wzorcowy model porównania jest fakt, iż metody pomiaru badanych wartości lub też same wartości mają charakter losowy. Ujęcie porównań takich wartości w świetle teorii rozmytych relacji FLE i FLT [3] zostało przedstawione w pracy [5].

Drugą grupą przesłanek wpływających na wynik porównania jest subiektywizm osoby oceniającej oraz kontekst sytuacji, w której ocena taka jest dokonywana. Uzasadniając taki pogląd, rozważmy przykład porównywania cen na określone asortymenty dóbr towarowych. Otóż osoba majętna będzie uważać sezonowe ceny kostki masła (letnia 103 zł i zimowa 108 zł w 1986 r.) za identyczne, podczas gdy człowiek borykający się z trudnościami materialnymi traktować będzie masło z letnią ceną sezonową jako tańsze. Opisany powyżej subiektywizm oceny działać będzie w zróżnicowany sposób uzależniony od konkretnej sytuacji. Obydwie wspomniane osoby urzędową cenę kawy ziarnistej (380 zł za 10 dkg w listopadzie 1986 r.) uważać będą zapewne za niższą od aktualnej ceny wolnorynkowej (750 zł za 10 dkg), podczas gdy identyczną różnicę w wysokości wkładu członkowskiego na mieszkanie spółdzielcze, traktowanego powszechnie jako cena tego mieszkania (wkład członkowski na mieszkanie typu M-5 na Osiedlu ZMP w Poznaniu wynosi w roku 1986 312 tys.zł), potraktowałyby jako nieistotną. Słusznym zatem wydaje się wniosek, że wspomniany subiektywizm zależy zarówno od skali ocenianych wartości jak i od innych cech badanych wartości zobrazowanych w powyższym przykładzie częstościami nabywania paczki kawy i wchodzenia w posiadanie mieszkania. Dalszych przykładów podob-

nego subiektywnego porównywania można szukać nie tylko w obrębie gospodarstwa domowego, ale i w innych domenach działalności gospodarczej, zarówno mikroekonomicznej jak i makroekonomicznej.

W pracy niniejszej powyższa subiektywność porównań zostanie opisana przy pomocy relacji typu FLE i FLT, których te definicje i własności, niezbędne dla dalszych rozważań, zostaną przytoczone w następnej części. Zastosowane podejście pozwoli na rozszerzenie dziedziny funkcji decyzyjnych opisanych w [6] o zbiór informamacji klasyfikowanych we wspomniany subiektywny sposób.

2. Rozmyte relacje typu FLE i FLT

Niech $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. W [3] zdefiniowano następujące pojęcia:

Definicja 2.1: Jeśli przekształcenie $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ spełnia, dla każdej trójki $(x,y,z) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ takiej, że $x < z$, warunki:

$$\rho(x,y) \geq 1 - \rho(y,x), \tag{2.1}$$

$$\rho(y,x) + \rho(z,x) \leq 1, \tag{2.2}$$

to nazywamy je rozmytą relacją typu FLE.

Definicja 2.2: Przekształcenie $\rho_s : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ określone jest dla każdej pary $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ zależnością

$$\rho_s(x,y) = 1 - \rho(y,x), \tag{2.3}$$

gdzie ρ jest rozmytą relacją typu FLE, nazywamy rozmytą relacją typu FLT.

W [3] wykazano między innymi, że dla dowolnej pary $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ takiej, że $x < y$, rozmyte relacje FLE i FLT spełniają następujące związki:

$$\rho(x, \cdot) \geq \rho(y, \cdot), \tag{2.4}$$

$$\rho(x,x) \geq \frac{1}{2} \geq \rho_s(x,x) \geq \rho(y,x). \tag{2.5}$$

Ponadto w [3] wyróżniono następujące klasy rozmytych relacji typu FLE.

Definicja 2.3: Rozmytą relację FLE ρ nazywamy nierozmycie ograniczającą prostą rzeczywistą, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \rho(-\infty,x) = \rho(x,+\infty) = 1. \tag{2.6}$$

Definicja 2.4: Rozmytą relację FLE ρ nazywamy ciągłą z góry, jeśli spełnione są warunki:

$$\forall \{x_n\} \uparrow x \qquad \{\rho(x_n, \cdot)\} \downarrow \rho(x, \cdot), \tag{2.7}$$

$$\forall \{y_n\} \downarrow y \qquad \{\rho(\cdot, y_n)\} \downarrow \rho(\cdot, y). \tag{2.8}$$

Definicja 2.5: Rozmytą relację FLE ρ nazywamy ścisłą, jeśli spełniony jest warunek

$$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \qquad y < x \Rightarrow \rho(x,y) < \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Związki relacji FLE iFLT z naturalnym porządkiem na prostej rzeczywistej i z ciałem zbiorów mierzalnych na tej prostej zostały szczegółowo opisane w [2, 3, 4,]. Na koniec tego rozdziału przytoczymy jedną z tez wykazanych w [3].

Twierdzenie 2.1: Jeśli FLE jest ciągła z góry, to dla takich ciągów $\{x_n\} \uparrow x$ i $\{y_n\} \downarrow y$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $x_n > x$ i $y_n < y$ mamy następujące związki

$$\{\rho(\cdot, x_n)\} \downarrow \rho(\cdot, x), \tag{2.10}$$

$$\{\rho(x_n, \cdot)\} \uparrow \rho_s(x, \cdot), \tag{2.11}$$

$$\{\rho_s(y_n, \cdot)\} \downarrow \rho(y, \cdot), \tag{2.12}$$

$$\{\rho(\cdot, y_n)\} \uparrow \rho_s(\cdot, y). \tag{2.13}$$

3. Ocena rozmytych preferencji w punkcie odniesienia porównania

Ustalmy pewną liczbę $y \in \mathbb{R}$ interpretowaną jako punkt odniesienia porównania. Liczbie tej możemy przypisać górny zakres identyfikacji z(y) i dolny zakres identyfikacji x(y), określające przedział [x(y), z(y)] interpretowany jako zbiór liczb równych, w sensie stosowanego kryterium porównania, liczbie y. O parze (x(y), z(y)) zakładać oczywiście będziemy, że

$$x(y) \leqslant y \leqslant z(y) \tag{3.1}$$

Jako szczególny przypadek zakresów identyfikacji rozważać będziemy zakresy spełniające warunek symetrii w sensie podanym poniżej

$$x(y) + z(y) = 2y \tag{3.2}$$

Oznaczać to będziemy, co łatwo spostrzec, iż liczba y leży po środku swojego przedziału identyfikacji.

W przypadku kiedy to wartości x(y) i z(y) byłyby określone w sposób jednoznaczny, dla porównania liczby y z liczbami z jej pewnego otoczenia, można by wykorzystać elementy matematyki interwałowej. Na przeszkodzie staje tutaj jednak fakt, iż możemy jedynie mówić o subiektywnych wyobrażeniach o wartościach x(y) i z(y). W tej sytuacji analiza interwałowa prowadziłaby do wnioskowania opartego jedynie na poglądach jednej osoby, a więc często niewystarczającego do wiarygodnego rozwiązania postawionego problemu. W celu ominięcia tej niedogodności, zwróćmy się z zapytaniem o wartości x(y) i z(y) do ekspertów z reprezentatywnej grupy (zbioru) $\mathbb{E} = \{e_k : k = \overline{1,n}\}$ ukonstytuowanej na drodze np. losowania warstwowego. Niechaj każdy z ekspertów e_k poda w niezależny sposób swoją opinię jako parę $x_k(y)$, $z_k(y)$ spełniającą warunek (3.1).

Następnie dla każdego $x \in \overline{\mathbb{R}}$ takiego, że $x \leqslant y$, oznaczamy frakcję ekspertów skłonnych uznać liczbę x jako mniejszą od liczby y przy pomocy funkcji $\varphi:\{(x,y): (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2, x \leqslant y\} \to [0,1]$ danej zależnością

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{n} \operatorname{card}\{e_k, e_k \in \mathbb{E},\ x < x_k(y)\} \tag{3.3}$$

Analogicznie jak powyżej, dla każdej liczby $x \in \overline{\mathbb{R}}$, takiej, że $x \geqslant y$, oznaczamy frakcję ekspertów skłonnych uznać liczbę x jako mniejszą równą od liczby y przy pomocy funkcji $\gamma:\{(x,y) : (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2, x \geqslant y\} \to [0,1]$ danej zależnością

$$\gamma(x,y) = \frac{1}{n} \operatorname{card}\{e_k, e_k \in \mathbb{E},\ x \leqslant z_k(y)\} \tag{3.4}$$

Dla ułatwienia dalszych rozważań utworzymy dla każdej liczby rzeczywistej y takie permutacje $\{k_l'(y)\}_{l=1}^{n_i}$ i $\{k_l''(y)\}_{l=1}^{n_n}$ pierwszych liczb naturalnych, że ciąg $\{x_{k_l'(y)}(y)\}_{l=1}^{n}$ jest ciągiem niemalejącym, zaś ciąg $\{z_{k''(y)}(y)\}_{l=1}^{n}$ jest ciągiem nierosnącym. Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy też oznaczenia:

$$x_l(y) = x_{k_l'(y)}(y), \tag{3.5}$$

$$z_l(y) = z_{k_l''(y)}(y).$$

Posługując się tymi oznaczeniami należy pamiętać, że każda z par $(x_l(y), z_l(y))$ może być określona przez dwóch różnych ekspertów. Pomimo tego zastrzeżenia symetria par $(x_k(y), z_k(y))$ określona przez (3.2) pociąga za sobą takąż symetrię par $(x_l(y), z_l(y))$. Bezpośrednio z określeń funkcji φ i γ wypływają następujące wnioski:

Wniosek 3.1: Dla każdego $y \in \overline{\mathbb{R}}$ funkcja $\varphi(\cdot,y) : \{x: x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leqslant y\} \to [0,1]$, określona zależnością (3.3), jest nierosnąca i prawostronnie ciągłą funkcją schodkową daną zależnością

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [-\infty, \tilde{x}_1(y)[\\ 1 - \frac{l}{n} & x \in [\tilde{x}_l(y), \tilde{x}_{l+1}(y)[\quad \overline{l=1,n-1} \\ 0 & x \in [\tilde{x}_n(y), y] \end{cases}$$

Wniosek 3.2: Dla każdego $y \in \mathbb{R}$, funkcja $\gamma(\cdot,y) : \{x: x \in \mathbb{R}, x \geq y\} \to [0,1]$ określona zależnością (3.4), jest niemalejącą i lewostronnie ciągłą funkcją schodkową daną zależnością

$$\gamma(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [y, \tilde{z}_n(y)] \\ \frac{l}{n} & x \in]\tilde{z}_{l+1}(y), z_l(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ 0 & x \in]\tilde{z}_1(y), +\infty] \end{cases} \tag{3.7}$$

Wniosek 3.3: Zbiór $S = \{\alpha, \alpha \in [0,1], \exists\, \overline{l=0,n}: \alpha = \frac{l}{n}\}$ jest zbiorem wartości funkcji φ i γ danych przez (3.3) i (3.4).

Weźmy teraz pod uwagę ciągłą z góry relację FLE ρ i generowaną przez nią relację FLT ρ_s związane z ekspertyzą daną przez ekspertów zależnościami

$$\rho_s(x_1,y) = f(\varphi(x_1,y)) \tag{3.9}$$

$$\rho(x_2,y) = g(\gamma(x_2,y)) \tag{3.10}$$

danymi dla każdej takiej trójki (x_1,x_2,y), że $x_1 < y < x_2$, gdzie funkcje $f: S \to [0,1]$ i $g: S \to [0,1]$ są tak dobrane, że spełnione są warunki:

(W1) założenia definicji FLE i FLT są spełniane w sposób niezależny od rozkładu opinii ekspertów;

(W2) jeżeli eksperci jednomyślnie proponują naturalne uporządkowanie prostej rzeczywistej to znaczy $\tilde{x}_k(y) = y = \tilde{z}_k(y)$ dla każdej naturalnej liczby k, to relacje FLE i FLT są odpowiednio nierozmytymi relacjami „mniejsze równe" i „mniejsze";

(W3) funkcja $f: S \to [0,1]$ obrazuje związki pomiędzy frakcjami ekspertów i ścisłym uporządkowaniem prostej rzeczywistej;

(W4) funkcja $g: S \to [0,1]$ obrazuje związki pomiędzy frakcjami ekspertów i częściowym uporządkowaniem prostej rzeczywistej.

Założenia (W3) i (W4) są uogólnieniem intuicji zaczerpniętych z [1] i sformalizowanych w [7]. Uogólnienie takie jest niezbędne, gdyż relacje opisane w [7] nie są relacjami typu FLE i FLT. Założony tutaj dodatkowo warunek ciągłości z góry przekształcenia niezbędny będzie do pełnego określenia związku pomiędzy relacjami FLE i FLT, a opiniami danych przez ekspertów.

Niechaj ciągi $\{f_l\}_{l=0}^n$ i $\{g_l\}_{l=0}^n$ określone będą zależnościami

$$f_1 = f\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.11}$$

$$g_1 = g\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.12}$$

Podsumowując zależności (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11), (3.12) uzyskujemy

$$\rho_s(x,y) = \begin{cases} f_n & x \in [-\infty, \tilde{x}_1(y)[\\ f_{n-l} & x \in [\tilde{x}_l(y), \tilde{x}_{l+1}(y)[\quad l=\overline{1,n-1} \\ f_o & x \in [\tilde{x}_n(y), y[\end{cases} \tag{3.13}$$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} g_n & x \in]y, \tilde{z}_n(y)] \\ g_l & x \in]\tilde{z}_{l+1}(y), \tilde{z}_l(y)] \quad l=\overline{1,n-1} \\ g_o & x \in]\tilde{z}_1(y), +\infty] \end{cases} \tag{3.14}$$

Warunek (W2) daje wtedy $f_n = 1$ i $g_o = 0$. Ponadto z nierówności (2.4) i (2.5) uzyskujemy zależności

$$\{f_l\}_{l=0}^n \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{3.15}$$

$$\{g_l\}_{l=0}^n \subset \left[0, \frac{1}{2}\right] \tag{3.16}$$

gdyż $\{f_l\}_{l=0}^n$, $\{g_l\}_{l=0}^n$ są ciągami niemalejącymi.

Ciągłość z góry FLE wraz z Twierdzeniem 2.1 oraz Wnioskami 3.1 i 3.2 daje wtedy

$$\rho_s(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [-\infty, \tilde{x}_1(y)[\\ f_{n-l} & x \in [\tilde{x}_l(y), \tilde{x}_{l+1}(y)[\quad l=\overline{1,n-1} \\ f_o & x \in [\tilde{x}_n(y), y[\\ g_n & x \in [y, \tilde{z}_n(y)[\\ g_l & x \in [\tilde{z}_{l+1}(y), \tilde{z}_l(y)[\quad l=\overline{1,n-1} \\ 0 & x \in [\tilde{z}_1(y), +\infty] \end{cases} \tag{3.17}$$

oraz

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [-\infty, \tilde{x}_1(y)] \\ f_{n-l} & x \in]\tilde{x}_l(y), \tilde{x}_{l+1}(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ f_0 & x \in]\tilde{x}_n(y), y] \\ g_n & x \in]y, \tilde{z}_n(y)] \\ g_l & x \in]\tilde{z}_{l+1}(y), \tilde{z}_l(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ 0 & x \in]\tilde{z}_1(y), +\infty] \end{cases} \tag{3.18}$$

Tożsamość (3.17) i (3.18) opisują przebieg zmienności funkcji $\rho_s(\cdot,y)$ i $\rho(\cdot,y)$. Zbadajmy teraz przebieg zmienności funkcji $\rho_s(y,\cdot)$ i $\rho(y,\cdot)$.

Dla każdego $x \in \overline{\mathbb{R}}$ takiego, że $x \leqslant y$, oznaczamy frakcję ekspertów skłonnych uznać liczbę x jako większą równą od liczby y przy pomocy funkcji $\gamma': \{(x,y):(x,y) \in \in \overline{\mathbb{R}}^2, x \leqslant y\} \to [0,1]$ danej zależnością

$$\gamma'(x,y) = \frac{1}{n} \operatorname{card} \{e_k, e_k \in \mathbb{E}, x \geqslant x_k(y)\}. \tag{3.19}$$

Podobnie jak powyżej, dla każdej liczby rzeczywistej x, takiej, że $x \geqslant y$, oznaczamy frakcję ekspertów skłonnych uznać liczbę x jako większą od liczby y przy pomocy funkcji $\varphi': \{(x,y): (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2, x \geqslant y\} \to [0,1]$ danej zależnością

$$\varphi'(x,y) = \frac{1}{n} \operatorname{card} \{e_k, e_k \in \mathbb{E}, x \geqslant z_k(y)\}. \tag{3.20}$$

Założenia (W3) i (W4) prowadzą wtedy do następujących związków

$$\rho_s(y,x_2) = f(\varphi'(x_2,y)), \tag{3.21}$$

$$\rho(y,x_1) = g(\gamma'(x_1,y)), \tag{3.22}$$

dla każdej takiej trójki (x_1,x_2,y), że $x_1 < y < x_2$.

Z drugiej strony porównując tożsamości (3.3) i (3.4) z tożsamościami (3.19) i (3.20) uzyskujemy

$$\varphi'(x,y) = 1 - \gamma(x,y) \tag{3.23}$$

$$\gamma'(x,y) = 1 - \varphi(x,y) \tag{3.24}$$

co razem z (3.11) i (3.12) daje:

$$\rho(y,x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, \tilde{x}_1(y)[\\ g_l & x \in [\tilde{x}_l(y), \tilde{x}_{l+1}(y)[\quad \overline{l=1,n-1} \\ g_n & x \in [\tilde{x}_n(y), y[\end{cases} \tag{3.25}$$

$$\rho_s(y,x) = \begin{cases} f_0 & x \in]y,\tilde{z}_n(y)] \\ f_{n-l} & x \in]\tilde{z}_{l+1}(y),\tilde{z}_l(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ 1 & x \in]\tilde{z}_1(y),+\infty] \end{cases} . \tag{3.26}$$

Zauważmy teraz, że tożsamość (2.3) wraz z (3.17), (3.18), (3.25) i (3.26) daje

$$f_l = 1 - g_{n-l} \tag{3.27}$$

dla każdej nieujemnej liczby całkowitej l nie większej od n. Związek ten wraz z założoną ciągłością z góry pozwala na ściślejsze określenie przebiegu zmienności funkcji $\rho(\cdot,y)$ i $\rho(y,\cdot)$. Mamy

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in [-\infty,\tilde{x}_1(y)] \\ 1-g_l & x \in]\tilde{x}_l(y),\tilde{x}_{l+1}(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ 1-g_n & x \in]\tilde{x}_n(y),y] \\ g_n & x \in]y,\tilde{z}_n(y)] \\ g_l & x \in]\tilde{z}_{l+1}(y),\tilde{z}_l(y)] \quad \overline{l=1,n-1} \\ 0 & x \in]\tilde{z}_1(y),+\infty] \end{cases} \tag{3.28}$$

oraz

$$\rho(y,x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty,\tilde{x}_1(y)[\\ g_l & x \in [\tilde{x}_l(y),\tilde{x}_{l+1}(y)[\quad \overline{l=1,n-1} \\ g_n & x \in [\tilde{x}_n(y),y[\\ 1-g_n & x \in [y,\tilde{z}_n(y)[\\ 1-g_l & x \in [\tilde{z}_{l+1}(y),z_l(y)[\quad \overline{l=1,n,1} \\ 1 & x \in [\tilde{z}_1(y),+\infty] \end{cases} \tag{3.29}$$

Przekształcenia $\rho_s(\cdot,y)$ i $\rho_s(y,\cdot)$ są w wystarczający sposób wyznaczone przez (2.3), (3.28) i (3.29).

Zbadajmy teraz, czy zależności (3.28) i (3.29) określają rozmytą relację typu FLE. Mamy

– jeśli $x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{y,\tilde{x}_l(y), \tilde{z}_l(y), \overline{l=1,n}\}$

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = 1 ;$$

– jeśli $x = y$ to

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = 2 - 2\,g_n ;$$

– jeśli $x = \tilde{x}_l(y)$ lub $x = z_l(y)$ $(\overline{l=1,n})$ to

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = 1 + g_l - g_{l-1} .$$

Powyższe wynioski wraz z monotonicznością ciągu $\{g_l\}_{l=0}^n$ i warunkiem (3.16) dowodzą spełnienia warunku (2.1). Wspomniane własności ciągu $\{g_l\}_{l=0}^n$ będą też wystarczające do wykazania (2.2). Weźmy pod uwagę dowolną parę $(x,z) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ taką,że $x<z$.

Jeśli istnieje takie $l=\overline{0,n}$, że $\rho(y,x) = g_l$, to wtedy istnieje liczba naturalna p spełniająca warunek $l \leqslant p \leqslant n$ taka, że $\rho(z,y) = 1 - g_p$ lub pewna liczba naturalna r z przedziału $[0,1]$ taka, że $\rho(z,y) = g_r$. Mamy w tym przypadku zatem

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = g_l + 1 - g_p \leqslant 1$$

lub

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = g_l + g_r \leqslant 1 .$$

Jeśli natomiast istnieje takie $l=\overline{0,n}$, że $\rho(y,x) = 1 - g$, to wtedy istnieje liczba naturalna s spełniająca warunek $0 \leqslant s \leqslant 1$ taka, że $\rho(z,y) = g_s$. Mamy wtedy

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = 1 - g_l + g_s \leqslant 1 .$$

Wprowadzone zatem, z pewnych własności rozmytych relacji typu FLE i FLT, zależności (3.28) i (3.29) z całą pewnością opisują rozmytą relację typu FLE. Jej ciągłość z góry zakładaliśmy już przy sformułowaniu związków (3.9) i (3.10). Zależności (3.28) i (3.29) w bezpośredni sposób wskazują na fakt, iż uzyskana relacja FLE nierozmycie ogranicza prostą rzeczywistą. Dokładne wartości numeryczne funkcji przynależności uzyskanej relacji rozmytej należy określić dobierając pewien niemalejący ciąg $\{g_l\}_{l=1}^n$ wartości z przedziału $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Mamy tutaj sporą swobodę wyboru, co pozwala przy doborze wartości g_l kierować się jeszcze dodatkowymi kryteriami niesprecyzowanymi w tej części. Zauważmy na koniec, że uzyskanie ścisłej relacji FLE gwarantuje zastąpienie (3.16) silniejszym warunkiem

$$\{g_l\}_{l=1}^n \subset \left[0, \frac{1}{2}\right[. \tag{3.30}$$

4. Rozszerzenie rozmytej relacji preferencji

Zależności (3.28) i (3.29), korzystając z opinii ekspertów danych tylko dla pewnego punktu odniesienia porównania $y \in \mathbb{R}$, pozwoliły jedynie na wyznaczenie obcięcia rozmytej relacji FLE do dziedziny porównań odnoszonych do y. Dziedzina ta dana jest zależnością

$$\mathbb{D}_Y = (\overline{\mathbb{R}} \times \{y\}) \cup (\{y\} \times \overline{\mathbb{R}}) . \tag{4.1}$$

Wspomniane obcięcie oznaczymy symbolem $\rho[y]$. Rozważać teraz będziemy możliwości rozszerzenia tego obcięcia do zbioru $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Dyskutowane rozszerzenia winny spełniać następujące warunki.

(R1) dla dowolnego punktu odniesienia $y' \in \mathbb{R}$ istnieją ciągi: niemalejący $\{\tilde{x}_1(y')\}_{1=1}^{n}$ i nierosnący $\{\tilde{z}_1(y')\}_{1=1}^{n}$ takie, że spełniony jest warunek (3.1) i obcięcie $\rho[y']$ dane jest zależnościami (3.28) i (3.29), gdzie $\{g_1\}_{1=0}^{n}$ jest niemalejącym ciągiem ustalonym niezależnie od punktu y i spełniającym warunki (3.30) i $g_0 = 0$.

(R2) ocena porównania jest niezależna od punktu odniesienia porównania, to znaczy dla dowolnej pary punktów odniesienia $(y_1,y_2) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ mamy

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{D}_{Y_1} \times \mathbb{D}_{Y_2} \quad \rho[y_1](x_1,x_2) = \rho[y_2](x_1,x_2). \tag{4.2}$$

Warunki (R1) i (R2) mówią o tym, że stopień spełnienia porównania zależy od wzajemnego położenia porównywanych liczb rzeczywistych i nie zależy od punktu odniesienia porównania. Z praktycznego punktu widzenia wymagania te są w pełni uzasadnione.

Odpowiedzmy sobie najpierw na pytanie, czy dla dowolnego punktu odniesienia porównania y istnieją jakiekolwiek rozszerzenia obcięcia $\rho[y]$ spełniające założenia (R1) i (R2). Łatwo tutaj można sprawdzić, że jeżeli ciąg $\{g_1\}_{1=0}^{n}$ spełnia dodatkowo warunek

$$g_1 = 0 \tag{4.3}$$

to jedynym poszukiwanym rozszerzeniem jest klasyczna relacja częściowego porządku na prostej rzeczywistej. Warunek (4.3) zaciera jednak w pełni wpływ subiektywnych opinii ekspertów na dokonywane porównania. Z tego to powodu rozszerzenia związane z warunkiem (4.3) odrzucamy jako nieinteresujące.

Zgodnie z warunkiem (R1), rozszerzenie obcięcia relacji FLE do pełnej relacji FLE wymaga określenia opisanych tam ciągów $\{z_1(y')\}_{1=1}^{n}$ i $\{x_1(y')\}_{1=1}^{n}$ dla dowolnego punktu odniesienia $y' \in \mathbb{R}$. Pociągać to może oczywiście za sobą dalsze sprecyzowanie wartości ciągu $\{g_1\}_{1=0}^{n}$. Zauważmy na koniec, że warunek (R1) wraz z (3.28) i (3.29) pozwala stwierdzić, iż dowolne uzyskane rozszerzenie $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ nierozmycie ogranicza prostą rzeczywistą oraz spełnia tożsamość

$$\rho(+\infty,x) = (-x,-\infty) = 0 \tag{4.4}$$

dla $x \notin [-\infty,+\infty[$. Do określenia pozostało zatem tylko określenie funkcji przynależności szukanego rozszerzenia nad zbiorem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Celowi temu poświęcone będą następne części pracy.

4.1. Przypadek rozszerzenia danego przez ekspertów

Najbardziej naturalną drogą uzyskania ciągów $\{\tilde{z}_l(y)\}_{l=1}^n$ i $\{\tilde{x}_l(y)\}_{l=1}^n$ dla dowolnego punktu odniesienia porównania y jest uzyskanie tych informacji od grupy ekspertów. Pozwoliłoby to na uzyskanie takiego rozszerzenia, które opisuje subiektywizm ekspertów w sposób nieskrępowany dodatkowymi założeniami matematycznymi wnoszącymi do porównań pewne elementy obiektywizmu. Pomińmy na razie szczegóły techniczne realizacji takiego zadania i zbadajmy tylko jego własności formalne.

Weźmy pod uwagę dwa punkty odniesienia $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ takie, że $y_1 < y_2$. Założenie (R2) prowadzi wtedy do

$$\rho[y_1](y_2,y_1) = \rho[y_2](y_2,y_1) \tag{4.4}$$

Z drugiej strony, zależności (3.28) i (3.29) pozwalają dojść do wniosku, iż istnieje taka para liczb całkowitych (k,l), że $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq n$, $\rho[y_1](y_2,y_1) = g_k$ i $\rho[y_2](y_2, y_1) = g_l$, co razem z (4.4) daje

$$g_k = g_l \tag{4.5}$$

Wobec wzajemnie niezależnego dobrania ciągów $\{\tilde{z}_l(y_1)\}_{l=1}^n$ i $\{\tilde{x}_l(y_2)\}_{l=1}^n$ równanie (4.5) jest prawdziwe dla każdej pracy (k,l). Jest to zatem równanie o rozdzielonych zmiennych. Jego jedynym rozwiązaniem jest ciąg $\{g_l\}_{l=0}^n$ takie, że $g_l = \text{const.}$, co wobec stwierdzonego już uprzednio warunku $g_0 = 0$ daje (4.3). Stanowi to powód rezygnacji z wariantu rozszerzenia rozpatrywanego w tej części. Praktyczne przesłanki tej rezygnacji zostały już wyjaśnione w części 4.

Negatywny rezultat podjętej powyżej próby rozszerzenia pozwala na określenie dalszych ograniczeń narzucanych metodom rozszerzania rozmytych relacji preferencji. Otóż mamy:

(R3) eksperci wyrażają swoje opinie o zakresach identyfikacji tylko dla jednego, ustalonego punktu odniesienia porównania y* nazywanego dalej wzorcowym punktem odniesienia porównań.

4.2. Przypadek rozszerzenia zachowującego skale porównywanych wartości

Niech będzie dane obcięcie rozmytej relacji preferencji $\rho[y^*]$ wyznaczone przy pomocy (3.28) i (3.29) dla wzorcowego punktu odniesienia porównania y*. Rozważmy tutaj klasę wszystkich rozmytych relacji preferencji $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ typu FLE spełniających warunki:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{D}_{y^*} \quad \rho(x,y) = \rho[y^*](x,y), \tag{4.6}$$

$$\forall (x,y,\alpha) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}^+ \quad \rho(x,y) = \rho(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y). \tag{4.7}$$

Warunek (4.7) jest rozszerzeniem do przypadku rozmytego znanej własności $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \alpha \cdot x \leqslant \alpha \cdot y\}$. W przypadku subiektywnych porównań warunek (4.7) uzyskuje jeszcze dodatkową interpretację głoszącą, że im większa będzie skala porównywanych wartości, tym szersze będą przedziały identyfikacji. Warunek (4.6) jest rutynowym warunkiem rozszerzenia głoszącym, że stopień porównań jest zależny od opinii ekspertów wydanych dla wzorcowego punktu odniesienia porównania.

Zbadajmy na wstępie jakie ograniczenia na ciąg $\{g_l\}_{l=0}^n$ narzuca warunek (4.7). Weźmy pod uwagę przypadek $y^* = 0$. Dla każdej naturalnej liczby l mniejszej równej od n istnieje wtedy taka dodatnia rzeczywista liczba α, że $\alpha \cdot \tilde{x}_l(0) \in [-\infty x_l(0)[$. Zależności (3.29), (4.6) i (4.7) dają wtedy

$$g_l = \rho[0](\tilde{x}_l(0),0) = \rho[0](\alpha \cdot \tilde{x}_l(0),0) = 0 .$$

Wzorcowy punkt odniesienia porównań $y^* = 0$ prowadzi zatem do odrzucanego przez nas przypadku ciągu $\{g_l\}_{l=0}^n$ spełniającego (4.3).

Rozważmy teraz przypadek dodatniego wzorcowego punktu odniesienia porównań y^*. Dla każdej liczby $x > y^*$ mamy wtedy

$$\rho[y^*](x,y^*) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{(y^*)^2}{x}\right) \tag{4.8}$$

Warunek ten musi być tożsamością, gdyż w przeciwnym razie uzyskamy układ równań (4.5) z rozdzielonymi zmiennymi i w konsekwencji jedynym dopuszczalnym ciągiem $\{g_l\}_{l=0}^n$ będzie ciąg spełniający warunek (4.3). Porównując (4.8) z (3.28) i (3.29) łatwo można spostrzec, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby (4.8) było tożsamością jest warunek

$$\tilde{x}_l(y^*) = \frac{(y^*)^2}{\tilde{z}_l(y^*)} \tag{4.9}$$

Załóżmy zatem, że ciąg $\{\tilde{x}_l(y^*)\}_{l=0}^n$ spełnia ten warunek. Zauważmy, że daje to między innymi $\tilde{x}_l(y^*) > 0$, co pociąga za sobą

$$\rho[y^*](x,y^*) = 1 , \tag{4.10}$$

$$\rho[y^*](y^*,x) = 0 \tag{4.11}$$

dla każdego $x \leqslant 0$.

Korzystając z warunku (4.7) znajdujemy następujące rozszerzenia przekształcenia $\rho[y^*]$:

$$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \times \overline{\mathbb{R}} \quad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{y^* \cdot y}{x}\right), \tag{4.12}$$

$$\forall(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}^{+} \quad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(\frac{y^* \cdot x}{y}, y^*\right). \tag{4.13}$$

Przekształcenie ρ zostało jednoznacznie określone na zbiorze $(\overline{\mathbb{R}}^{+} \times \overline{\mathbb{R}}) \cup (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}^{+})$ gdyż dla każdej pary $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^{+} \times \overline{\mathbb{R}}^{+}$ prawdziwość związku

$$\rho[y^*]\left(\frac{x}{y} \cdot y^*, y^*\right) = \rho[y^*](y^*, \frac{y}{x} \cdot y^*)$$

wynika z (4.7). Do określenia pozostało nam rozszerzenie przekształcenia ρ na zbiór $(\overline{\mathbb{R}}^{-} \cup \{0\}) \times (\overline{\mathbb{R}}^{-} \cup \{0\})$. Zauważmy tutaj, że dla dowolnej pracy $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^{-} \times \overline{\mathbb{R}}^{+}$ zależność (4.10) daje

$$\rho(x,y) = \rho[y^*]\left(\frac{y^*}{y} \cdot x, y\right) = 0,$$

$$\rho(-y,-x) = \rho[y^*]\left(\frac{y^*}{x} \cdot y, y^*\right) = 0,$$

co ostatecznie prowadzi do

$$\rho(x,y) = \rho(-y,-x). \tag{4.14}$$

Identyczny wniosek uzyskujemy dla każdej pary $(x,y) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{-}$ dzięki tożsamości (4.11). Z drugiej strony warunek (4.14) jest uogólnieniem dobrze znanego twierdzenia o mnożeniu obu stron nierówności przez -1. Nic nie stoi więc na przeszkodzie, aby i o naszym rozszerzeniu założyć, że spełnia ten warunek. Pozwala to na znalezienie następnych elementów rozszerzenia

$$\forall(x,y) \in (\overline{\mathbb{R}}^{-} \cup \{0\}) \times \overline{\mathbb{R}}^{-} \quad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{y^* \cdot x}{y}\right) \tag{4.15}$$

$$\forall(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^{-} \times (\overline{\mathbb{R}}^{-} \cup \{0\}) \quad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(\frac{y^* \cdot y}{x}, y^*\right). \tag{4.16}$$

W podobny sposób, co w przypadku zależności (4.12) i (4.13), możemy stwierdzić, że zależności (4.15) i (4.16) w jednoznaczny sposób rozszerzyły $\rho[y^*]$ na zbiór $\overline{\mathbb{R}}^{-} \times \overline{\mathbb{R}}^{-}$.

Do ustalenia pozostała jedynie wartość $\rho(0,0)$. Nie jest ona związana z funkcją $\rho[y^*]$ zależnościami (4.7) i (4.14). Z drugiej strony warunki (2.1) i (2.2) dają jedynie ograniczenie $\frac{1}{2} \leqslant \rho(0,0) \leqslant 1$. W tej sytuacji, stosując analogię do wartości $\rho[y^*](y^*, y^*)$, proponuje się przyjąć arbitralnie

$$\rho(0,0) = 1 - g_n \tag{4.17}$$

Sprawdźmy teraz, czy przekształcenie $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ dane zależnościami (4.9), (3.28), (3.29), (4.12), (4.13), (4.15), (4.16) i (4.17) jest rozmytą relacją typu FLE.

Mamy

– jeśli $X = 0$ i $y = 0$ to z (3.30) i (4.17)

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = 2 - 2 \cdot g_n > 1;$$

– jeśli $(x,y) \in (((\{0\} \times \overline{\mathbb{R}}) \times (\overline{\mathbb{R}} \times \{0\})) \setminus \{(0,0)\}$, to z (4.10) i (4.11)

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = 1 ;$$

– jeśli $(x,y) \in (\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}) \setminus (((\{0\} \times \overline{\mathbb{R}}) \cup (\overline{\mathbb{R}} \times \{0\}))$, to na mocy (4.12), (4.13), (4.15) i (4.16) istnieje taka dodatnia stała α, że $\rho(x,y) = \rho[y^*](y^*, \alpha \cdot y^*)$ i $\rho(y,x) = \rho[y^*](\alpha \cdot y^*, y^*)$, co ostatecznie daje

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = \rho[y^*](y^*, \alpha \cdot y^*) + \rho[y^*](\alpha \cdot y^*, y^*) \geq 1 .$$

Przekształcenie ρ spełnia więc warunek (2.1) na całej płaszczyźnie $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Ponadto dla dowolnej pary $(x,z) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ takiej, że $x < z$ możemy stwierdzić:

– jeśli $y > 0$, to z (4.12) i (4.13) mamy

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{y^*}{y} x\right) + \rho[y^*]\left(\frac{y^*}{y} z, y\right) \leq 1 ;$$

– jeśli $y < 0$, to (4.14) razem z ostatnią nierównością daje

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = \rho(-y,-z) + \rho(-x,-y) \leq 1 ;$$

– jeśli $y = 0$ i $x > 0$, to $z > 0$ i dalej z (4.10), (4.11), (4.12), (4.13) otrzymujemy

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = \rho[y^*](0,y^*) + \rho[y^*](y^*,0) = 1 ;$$

– jeśli $y = 0$ i $x = 0$, to $z > 0$ i dalej z (4.11), (4.12), (4.17) uzyskujemy

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = 1 - g_n + \rho[y^*](y^*,0) \leq 1 ;$$

– jeśli $y = 0$ i $x < 0$, to zależności (4.11) i (4.15) dają

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = \rho[y^*](y^*,0) + \rho(z,0) = \rho(z,0) \leq 1 .$$

Przekształcenie $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ jest zatem rozmytą relacją typu FLE. Ponadto, wobec (3.30), jest ona ścisłą FLE nierozmycie ograniczającą prostą rzeczywistą. Ta druga własność uzyskanej FLE ρ została już wykazana na początku części 4. Ciągłość z góry obcięcia relacji $\rho[y^*]$ wraz z zależnościami (4.12), (4.13), (4.15) i (4.16) daje ciągłość z góry relacji ρ. Te same zależności dowodzą spełnienia założenia (R1) i (R2).

Podsumowaniem rozważań prowadzonych dla dodatniego wzorcowego punktu odniesienia porównania y^* jest poniższa procedura wyznaczania rozmytej relacji ρ typu FLE dla tego przypadku

1) Każdy z ekspertów e_k określa swoją ocenę górnego zakresu identyfikacji $z_k(y^*)$.
2) Wyznaczamy ciągi: $\{\tilde{z}_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności (3.5) i $\{\tilde{x}_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności (4.9).
3) Korzystając z zależności (3.28) i (3.29) wyznaczamy funkcję $\rho[y^*]$: $\mathbb{D}_{Y^*} \to [0,1]$.
4) Korzystając z zależności (4.12), (4.13), (4.15), (4.16) i (4.17) wyznaczamy funkcję $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$.

Uwaga: Można określić równoważną procedurę zakładającą, że eksperci wyznaczają tylko dolne zakresy identyfikacji. Fakt ten wymagałby tylko niewielkich modyfikacji kroków 1) i 2) opisanej powyżej procedury. Należałoby jednak wtedy poinformować ekspertów, iż mogą wyznaczać tylko dodatnie dolne zakresy identyfikacji. Przy niewielkich wartościach wzorcowego punktu odniesienia porównania mogłoby to w pewnym stopniu ograniczać indywidualne poglądy poszczególnych ekspertów, co byłoby sprzeczne z ideą możliwie wiernego zobrazowania tych poglądów.

Identyczne rozważania, co powyżej możemy przeprowadzić dla ujemnego wzorcowego punktu odniesienia porównań. Wynikiem takich rozważań jest następująca procedura wyznaczania rozmytej relacji ρ typu FLE dla $y^* < 0$.

1) Każdy z ekspertów e_k określa swoją ocenę dolnego zakresu identyfikacji $x_k(y^*)$.
2) Wyznaczamy ciągi $\{x_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności (3.5) i $\{z_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności

$$z_l(y^*) = \frac{(y^*)^2}{x_l(y^*)} . \tag{4.18}$$

3) Korzystając z zależności (3.28) i (3.29) wyznaczamy funkcję $\rho[y^*]: \mathbb{D}_{Y^*} \to [0,1]$.
4) Wyznaczamy funkcję $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ wykorzystując w tym celu zależności (4.17) i

$$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^- \times \overline{\mathbb{R}} \qquad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{y^* \cdot y}{x}\right), \tag{4.19}$$

$$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}^- \qquad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(\frac{y^* \cdot x}{y}, y^*\right), \tag{4.20}$$

$$\forall (x,y) \in (\overline{\mathbb{R}}^+ \cup \{0\}) \times \overline{\mathbb{R}}^+ \qquad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(y^*, \frac{y^* \cdot x}{y}\right), \tag{4.21}$$

$$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \times (\overline{\mathbb{R}}^+ \cup \{0\}) \qquad \rho(x,y) = \rho[y^*]\left(\frac{y^* \cdot y}{x}, y^*\right) . \tag{4.22}$$

Uwaga: Także i tutaj można by wyznaczyć równoważną procedurę zakładającą, iż eksperci wyznaczają tym razem górne zakresy identyfikacji. Wiązałoby się to z narzuceniem ekspertom możliwości wyznaczania tylko ujemnych górnych zakresów identyfikacji. W tej sytuacji, kierując się tymi samymi przesłankami, co w poprzedniej uwadze, z procedury takiej rezygnujemy.

4.3. Przypadek rozszerzania zachowującego rozstęp pomiędzy porównywanymi wartościami

Załóżmy ponownie, że jest dane obcięcie relacji $\rho[y^*]$ dane zależnościami (3.28) i (3.29) dla wzorcowego punktu odniesienia porównania y^*. Rozważmy tutaj klasę wszystkich rozmytych relacji preferencji $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$ typu FLE takich, że spełnione są warunki (4.6) i

$$\forall(x,y,a) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \qquad \rho(x+a, y+a) = \rho(x,y)\,. \tag{4.23}$$

Warunek (4.23) jest rozszerzeniem do przypadku rozmytego tej własności nierówności, która do obydwu stron nierówności pozwala dodać tę samą liczbę. Z drugiej strony warunek ten głosi, iż stopień spełnienia porównania zależy jedynie od odległości pomiędzy porównywanymi wartościami.

Zbadajmy na wstępie, kiedy obcięcie $\rho[y^*]$ spełnia warunek (4.23). Dla dowolnej liczby $x \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy wtedy

$$\rho[y^*]\,(x,y^*) = \rho[y^*]\,(y^*, 2y^*-x) \tag{4.24}$$

Warunek ten, z tych samych przyczyn co warunek (4.8), powinien być tożsamością. Porównując (4.24) z(3.28) i (3.29) łatwo można wykazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to aby (4.24) było tożsamością, jest symetria opinii ekspertów wyrażona warunkiem (3.2).

Załóżmy zatem, iż warunek (3.2) jest spełniony. Korzystając z warunku (4.6) znajdujemy następujące rozszerzenia przekształcenia $\rho[y^*]$

$$\forall(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \qquad \rho(x,y) = \rho[y^*]\,(y^*, y^*+y-x) \tag{4.25}$$

$$\forall(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \qquad \rho'(x,y) = \rho[y^*]\,(y^*+x-y, y^*) \tag{4.26}$$

Zgodnie z (4.24) zależności (4.25) i (4.26) opisują to samo rozszerzenie funkcji $\rho[y^*]$. Z tego powodu nasze dalsze rozważania ograniczymy do funkcji ρ danej zależnością (4.25). Warunek (R1) rozszerzenia wynika bezpośrednio z (4.25), natomiast warunek (R2) z własności (4.23). Pozostało nam tylko sprawdzenie, czy funkcja ρ, dana zależnością (4.25), opisuje rozmytą relację typu FLE. Dla dowolnej trójki $(x,y,z) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ takiej, że $x < z$ mamy:

$$\rho(x,y) + \rho(y,x) = \rho'(x,y) + \rho(y,x) =$$

$$= \rho[y^*]\,(y^*+x-y, y^*) + \rho[y^*]\,(y^*, y^*+x-y) \geq 1\,;$$

$$\rho(y,x) + \rho(z,y) = \rho(y,x) + \rho'(z,y) =$$

$$= \rho[y^*]\,(y^*, y^*+x-y) + \rho[y^*]\,(y^*+z-y, y^*) \leq 1\,.$$

Uzyskane rozszerzenie jest zatem rozmytą relacją typu FLE. Wszystkie jej dodatkowe własności wynikają bezpośrednio z (3.30) i (4.25).

Zakończymy nasze rozważania opisem procedury wyznaczającej opisaną w tej części rozmytą relacją ρ typu FLE

1) Każdy z ekspertów e_k ustala ocenę dolnego zakresu identyfikacji $x_k(y^*)$.

2) Wyznaczamy ciągi: $\{\tilde{x}_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności (3.5) i $\{\tilde{z}_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z zależności

$$\tilde{z}(y^* = 2 \cdot y^* - \tilde{x}(y^*) . \tag{4.27}$$

3) Korzystając z zależności (3.28) i (3.29) wyznaczamy funkcję $\rho[y^*]: \mathbb{D}_{Y^*} \to [0,1]$.

4) Korzystając z zależności (4.25) wyznaczamy funkcję $\rho : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$.

Uwaga: Z tym samym powodzeniem możemy zaproponować ekspertom wyznaczenie ciągu górnych zakresów identyfikacji $\{z_k(y^*)\}_{k=1}^n$. Ciąg $\{z_l(y^*)\}_{l=1}^n$ będzie wtedy wyznaczony z zależności (3.5), zaś ciąg $\{\tilde{x}_l(y^*)\}_{l=1}^n$ z (4.27).

5. Uwagi końcowe

W pracy przedstawiono jedynie dwa główne, jak się wydaje, typy rozmytych relacji preferencji generowanych przez ekspertów. Można oczekiwać, iż w pewnych specyficznych zastosowaniach układ warunków (4.6) i (4.7) lub (4.6) i (4.23) zastąpiony zostanie innymi założeniami. Niemniej i w tych przypadkach nie można rezygnować z warunków (R1), (R2) i (R3) dobrego rozszerzenia. Celowym za każdym razem jest też badanie, czy poczynione założenia nie prowadzą do ciągu $\{g_l\}_{l=0}^n$ spełniającego warunek (4.3).

W powyższej pracy nie zostały ostatecznie sprecyzowane wartości elementów ciągu $\{g_l\}_{l=1}^n$. Jedynym ograniczeniem tutaj był warunek (3.30). Z drugiej strony dokładne wartości numeryczne funkcji przynależności skonstruowanych relacji wykorzystywane są w modelu decyzyjnym, opisanym w [6], jedynie dla określenia rozkładu niezbędnej tam rozmytej P-miary. W pozostałym postępowaniu decyzyjnym w zupełności wystarcza wiadomość, iż stopień przynależności informacji elementarnej do danej informacji zgrupowanej należy do jednego ze zbiorów liczbowych $\left[0, \frac{1}{2}\right[, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Przynależność tę można, w wystarczający sposób, ustalić przy pomocy ograniczeń (3.30). Dobierając dokładne wartości elementów ciągu $\{g_l\}_{l=1}^n$, należy zatem kierować się jedynie dodatkowymi założeniami o generowanej rozmytej P-miarze. Użytecznym tu może być na przykład żądane jej minimalnej wrażliwości na zmiany wzorca gromadzenia informacji.

Literatura

[1] Orlovsky S.A.: Decision making with a fuzzy preference relation, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), s. 187-192.

S. 86
S. 97
S. 98
S. 99
5,13

[2] Piasecki K.: On any class of fuzzy preference relation in real line, Part 1, BUSEFAL 20 (1984), s. 90-97.

[3] Piasecki K.: On any class of fuzzy preference relation in real line, Part 2, BUSEFAL 21 (1985), s. 82-92.

[4] Piasecki K.: O interwałowych zastosowaniach rozmytych relacji preferencji, Zeszyty Naukowe AE (w druku).

[5] Piasecki K.: Probabilistyczne preferencje jako rozmyte relacje typu FLE i FLT, Zeszyty Naukowe AE (w druku).

[6] Piasecki K.: Fuzzy P-measures and their application in decision making, W: Fedrizzi M., Kacprzyk J.: Combining Fuzzy Imprecision with Probabilistic Uncertainty in Decision Making, Springer Verlag (w druku).

[7] Świtalski Z.: Relacje rozmyte optymalizacji wielokryteriowej, Prace Instytutu Cybernetyki Ekonomicznej, Zeszyty Naukowe AE, Seria I zesz. 94 (1981), 179-186.

BIBLIOTEKA AE w Poznaniu