Michał KONOPCZYŃSKI
Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

MODEL WZROSTU MAŁEJ GOSPODARKI W UNII MONETARNEJ. UJĘCIE NEOKLASYCZNE

Wstęp

W artykule przedstawiono matematyczny model wzrostu małego (w sensie gospodarczym) kraju, należącego do unii monetarnej. Model jest oparty na założeniach typowych dla Europejskiej Unii Monetarnej (EMU), ale jest na tyle ogólny, że po ewentualnych (niewielkich) modyfikacjach, nadaje się do opisu każdego małego kraju dowolnej unii monetarnej, w tym również Polski po jej ewentualnym przystąpieniu do EMU.

Przedstawiony model wywodzi się z neoklasycznego modelu gospodarki zamkniętej Roberta Solowa [10] i jest zbliżony – zarówno pod względem listy zmiennych ekonomicznych, jak i układu założeń – do modelu gospodarki otwartej Michaela Carlberga [4] w warunkach doskonałej mobilności kapitału. Oprócz doskonałej mobilności kapitału, założono w nim między innymi wspólną walutę i wynikające z tego wyrównywanie się nominalnych i realnych stóp procentowych na obszarze unii. Pozostałe założenia mają standardowy neoklasyczny charakter (zerowe korzyści skali, dwuczynnikowa funkcja produkcji typu Cobba-Douglasa z postępem technicznym, wynagradzanie czynników produkcji zgodnie z ich krańcowymi produktywnościami itp.).

Analiza matematyczna modelu prowadzi do wniosku, że mała gospodarka w unii monetarnej ma stan stacjonarny, w którym produkcja i kapitał rosną ze stałą, naturalną stopą wzrostu. Stan ten jest globalnie stabilny, gdy realna stopa procentowa w unii monetarnej nie przekracza pewnego górnego

pułapu, który w praktyce (w realnych gospodarkach) nie jest osiągany. Zarówno analiza teoretyczna stanu stacjonarnego, jak i symulacje numeryczne prowadzą do wniosku, że optymalny poziom oszczędności w małej gospodarce jest zależny od relacji między realną stopą procentową i naturalną stopą wzrostu (jest to zmodyfikowana wersja złotej reguły akumulacji). Przedmiotem naszego zainteresowania są również tzw. procesy przejścia (od jednego do drugiego stanu stacjonarnego gospodarki), wywołane zmianami wartości ważniejszych parametrów modelu.

1. Podstawowe założenia modelu

Opisywany kraj należy do unii gospodarczej i monetarnej, przy czym jego gospodarka stanowi względnie niewielką część gospodarki całej unii. W rezultacie pozycja kraju wobec unii jest taka jak pozycja pojedynczej firmy na rynku doskonale konkurencyjnym. Oznacza to, że zmiany salda bilansu płatniczego danego kraju (a także jego poszczególnych składników) nie wpływają na stan gospodarki żadnego z pozostałych krajów unii. Zakładamy, że handel i transfery kapitałowe z krajami nienależącymi do unii są tak niewielkie, że w modelu zostają pominięte. Z tego względu wszędzie dalej słowo „zagranica" oznacza pozostałe kraje unii monetarnej.

Zgodnie z neoklasyczną konwencją, wszystkie produkty i usługi są w modelu zagregowane i opisywane przez jedną liczbę (np. PKB). Ów zagregowany produkt jest wytwarzany w kraju i za granicą. Zakładamy, że jest on doskonale mobilny, dzięki czemu ceny produktu krajowego i zagranicznego są jednakowe. W rezultacie także stopy inflacji w poszczególnych krajach unii są jednakowe[1].

Przyjmujemy, że przepływy kapitału rzeczowego i finansowego między krajami unii odbywają się bez żadnych przeszkód i kosztów (doskonała mobilność kapitału w unii). Dlatego nominalne stopy procentowe w całej unii są jednakowe. W świetle poprzedniego założenia oznacza to, że również realne stopy procentowe są w całej unii jednakowe. Opisywany kraj nie ma zatem możliwości wpływania na realną stopę procentową r, jest ona bowiem równa egzogenicznej unijnej stopie procentowej r^*.

[1] Choć trzeba przyznać, że na przykład w Europejskiej Unii Monetarnej proces wyrównywania się cen przebiega wolniej niż oczekiwano, zob. [9]. Również niektóre opracowania empiryczne dla gospodarki Stanów Zjednoczonych stwierdzają występowanie trwałych, znacznych różnic w poziomie cen detalicznych tych samych towarów w różnych stanach, zob. [5].

Zakładamy, że w całej unii kapitał rzeczowy ulega deprecjacji z jednakową stopą δ.

Dzięki doskonałej mobilności kapitału w unii podaż kapitału w kraju jest doskonale elastyczna – ewentualna nadwyżka popytu nad podażą kapitału w kraju wywołuje natychmiastowy napływ kapitału z zagranicy i odwrotnie. Popyt na kapitał w kraju jest zatem zawsze zaspokojony, a rynek kapitału w kraju zawsze w równowadze.

Kapitał wykorzystywany do produkcji w kraju (K) należy częściowo do obywateli kraju, a częściowo do obywateli z zagranicy. Jednocześnie część kapitału ulokowanego za granicą (w pozostałych krajach unii) należy do obywateli kraju. Analogicznie wygląda struktura inwestycji.

Klasyfikacja kapitału angażowanego w procesie produkcji

Kapitał	Kraj	Zagranica
Krajowy (KK)	KK_K	KK_Z
Zagraniczny (KZ)	KZ_K	KZ_Z

KK_K – kapitał krajowy w kraju, KK_Z – kapitał krajowy za granicą, KZ_K – kapitał zagraniczny w kraju, KZ_Z – kapitał zagraniczny za granicą.

Zauważmy, że kapitał w kraju $K = KK + KZ_K - KK_Z$. Jeżeli przez E oznaczymy aktywa zagraniczne netto, to $E = KK_Z - KZ_K$, zatem $KK = K + E$, co oznacza, że kapitał krajowy to kapitał w kraju powiększony o aktywa zagraniczne netto.

Zakładamy brak mobilności pracy między krajami unii. Założenie to może wydawać się naiwne, ale badania empiryczne wskazują, że w Unii Europejskiej mimo braku formalnych przeszkód mobilność pracy jest niewielka, ze względu na poważne bariery kulturowe, językowe itp. (zob. [2] i [8]). Zakładamy zatem, że podaż pracy w kraju jest doskonale sztywna, równa zasobowi pracy w gospodarce (L). Zasób ten rośnie wykładniczo, ze stałą stopą wzrostu n.

2. Rynek pracy i kapitału

Popyt na kapitał i pracę w gospodarce wynika z racjonalnych decyzji, podejmowanych przez firmy w kraju. Zakładamy, że gospodarka składa się z wielu firm, starających się maksymalizować zysk. Na rynku produktu i na

rynkach czynników produkcji panuje konkurencja doskonała: pojedyncza firma nie ma wpływu na cenę produktu P, ani na cenę wynajmu kapitału W_K, ani na stawkę płacy W.

Realną produkcję czystą[2] reprezentatywnej firmy opisuje dwuczynnikowa funkcja produkcji Cobba-Douglasa z zerowymi korzyściami skali, z postępem technicznym w formie neutralnej w sensie Harroda:

$$\tilde{Y}=F(\tilde{K}, A\tilde{L})=\tilde{K}^{\alpha}(A\tilde{L})^{\beta}, \qquad \alpha+\beta=1, \qquad A, \alpha, \beta>0, \tag{1}$$

gdzie $\tilde{K}$ oznacza wielkość kapitału wykorzystywanego przez firmę, $\tilde{L}$ – zatrudnienie w firmie, A – tzw. wskaźnik postępu technicznego, odzwierciedlający poziom wiedzy technologicznej, jakość organizacji pracy i inne czynniki, wynikające z akumulacji wiedzy i doświadczenia, które prowadzą do wzrostu wydajności pracy. Zakładamy, że A rośnie wykładniczo ze stałą stopą wzrostu σ. Iloczyn $A\tilde{L}$ nazywać będziemy efektywną pracą.

Przyjęta funkcja produkcji (1) jest dodatnio jednorodna stopnia 1, co umożliwia agregację firm. Zauważmy bowiem, że jeśli λ oznacza liczbę (reprezentatywnych) firm w gospodarce, to realna produkcja czysta całej gospodarki wynosi:

$$Y=\lambda F(\tilde{K}, A\tilde{L})=F(\lambda\tilde{K}, A\lambda\tilde{L})=F(\breve{K}, A\breve{L}), \tag{2}$$

gdzie $\breve{K}$ i $\breve{L}$ to wielkość zaangażowanego kapitału i zatrudnienie w całej gospodarce.

Korzystając z założenia o zerowych korzyściach skali, produkcję czystą przypadającą na jednostkę efektywnej pracy (**njep**) można wyrazić prostym wzorem:

$$y=\frac{1}{A\breve{L}}F(\breve{K}, A\breve{L})=F\left(\frac{\breve{K}}{A\breve{L}}, 1\right)=F(\breve{k}, 1)=f(\breve{k})=\breve{k}^{\alpha}, \tag{3}$$

gdzie y oznacza produkcję czystą **njep**, a $\breve{k}=\breve{K}/A\breve{L}$ stosunek zaangażowanego kapitału do efektywnego zatrudnienia w gospodarce.

Dzięki założeniu o zerowych korzyściach skali[3] całą gospodarkę można traktować jak jedną firmę, działającą w warunkach konkurencji doskona-

[2] Produkcję czystą utożsamiamy z wartością produkcji firmy, pomniejszoną o wartość zużytych materiałów. W sensie rachunkowym można przyjąć, że realna produkcja czysta odpowiada wartości dodanej, wytworzonej w firmie, wyrażonej w cenach stałych.

[3] Gdyby założyć dodatnie lub ujemne korzyści skali, niemożliwa byłaby agregacja wyrażona wzorem (2).

łej (!), z funkcją produkcji (2). Popyt na kapitał i pracę (w gospodarce) wynika z maksymalizacji zysku przez tę firmę-gospodarkę. Zysk ów jest różnicą miedzy wartością produkcji a kosztami produkcji[4]:

$$J = PY - W_K K^D - WL^D, \tag{4}$$

gdzie P jest ceną produktu[5], W_K jest nominalną ceną wynajmu kapitału, W jest nominalną stawką płacy, a K^D i L^D oznaczają popyt całej gospodarki na kapitał i pracę.

Przy przyjętych założeniach o funkcji produkcji, istnieje optymalny stosunek kapitału do efektywnej pracy $k^D = K^D/AL^D$, przy którym firma maksymalizuje zysk. Stosunek ten można wyznaczyć z warunków koniecznych optymalności, które mają następującą postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial K^D} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial L^D} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \cdot F_{K^D}(K^D, AL^D) = W_K \\ P \cdot F_{L^D}(K^D, AL^D) = W \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Dzieląc te równania stronami, otrzymujemy

$$\frac{F_{K^D}}{F_{L^D}} = \frac{w_K}{w} \Leftrightarrow \frac{\alpha (K^D)^{\alpha-1} (AL^D)^{1-\alpha}}{A\beta (K^D)^{\alpha} (AL^D)^{-\alpha}} = \frac{w_K}{w} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{A\beta} \cdot \frac{AL^D}{K^D} = \frac{w_K}{w}, \tag{6}$$

gdzie $w_K = W_K/P$ jest realną ceną wynajmu kapitału, a $w = W/P$ oznacza realną stawkę płacy. Stąd optymalny stosunek kapitału do efektywnej pracy k^D wynosi

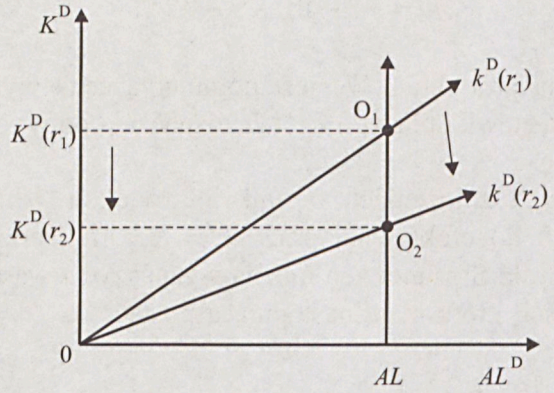
$$k^D = \frac{K^D}{AL^D} = \frac{\alpha}{A\beta} \cdot \frac{w}{w_K}. \tag{7}$$

Warto zauważyć, że wyznaczony optymalny stosunek kapitału do efektywnej pracy nie zależy od ceny produktu P. Przy danych parametrach technologicznych α i β oraz danym wskaźniku A, zależy on wyłącznie od

[4] Przyjmujemy, że firma-gospodarka nie ma trudności ze zbytem wytworzonej produkcji. Dlatego planowaną wielkość sprzedaży utożsamia ona z wielkością produkcji Y.

[5] Przypomnijmy, że cena ta jest z założenia jednakowa w całej unii, dlatego nie musimy wprowadzać rozróżnienia między zyskami firm eksportujących i firm sprzedających w kraju.

stosunku w/w_K. Optymalny stosunek k^D można przedstawić graficznie jako (optymalny) promień $0O_1$ (półprostą) w dwuwymiarowej przestrzeni czynników K^D i AL^D (zob. rys. 1).



Rys. 1. Wpływ wzrostu realnej stopy procentowej na położenie optymalnego promienia

Dalej zakładamy, że realna cena wynajmu jednostki kapitału jest równa realnej stopie procentowej, powiększonej o stopę deprecjacji kapitału[6]: $w_K = r + \delta$. Dlatego położenie optymalnego promienia zależy między innymi od (egzogenicznej) realnej stopy procentowej. Skutkiem jej wzrostu (*ceteris paribus*) jest obniżenie optymalnego promienia.

Jak wynika z (7), przy stałych parametrach technologicznych (α, β, δ), stosunek popytu na kapitał do popytu na pracę zależy wyłącznie od realnej stawki płacy (w) oraz od realnej stopy procentowej (r). Naturalnie im wyższa stawka płacy, tym mniej ludzi (a więcej kapitału) firmy skłonne są angażować. Podobnie wzrost realnej stopy procentowej skłania firmy do zastępowania kapitału pracą. Firma maksymalizująca zysk, zawsze stara się zachować optymalny stosunek k^D. Zauważmy (rys. 2), że zysk firmy zachowującej ów stosunek, czyli pozostającej na optymalnym promieniu:

(a) jest dodatni i rośnie nieograniczenie (liniowo) wraz ze wzrostem skali produkcji

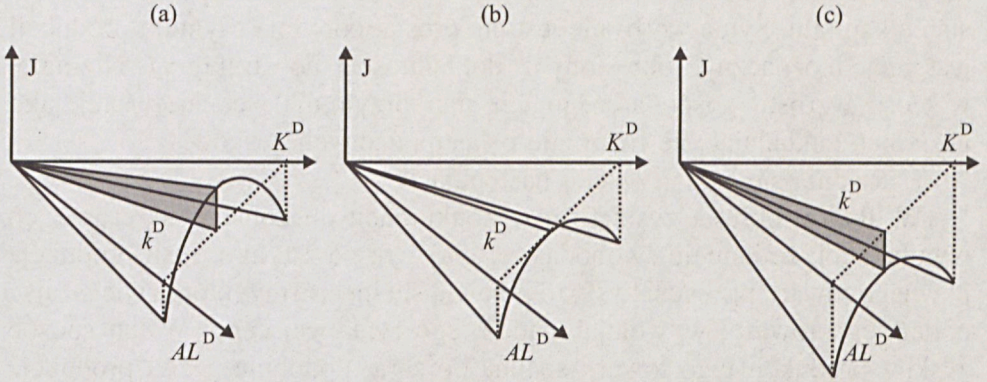
[6] Kapitalista wynajmuje go po cenie, która umożliwia odtworzenie realnej wartości kapitału, a ponadto zapewnia zysk równy temu, który otrzymałby, lokując kapitał (w formie pieniężnej) w banku na stopę r.

albo

(b) jest zerowy bez względu na skalę produkcji,

albo

(c) jest ujemny i maleje nieograniczenie (liniowo) ze wzrostem skali produkcji (rys. 2).



Rys. 2. Trzy możliwe położenia funkcji zysku: (a) zysk dodatni rosnący nieograniczenie na optymalnym promieniu; (b) zysk zerowy na optymalnym promieniu (poza nim zysk ujemny); (c) zysk wszędzie ujemny, malejący nieograniczenie na optymalnym promieniu

W przypadku (a), bez dodatkowych ograniczeń na czynniki produkcji, optymalna wielkość produkcji i optymalny popyt na te czynniki są równe $+\infty$ (stosunek popytu na kapitał do popytu na pracę jest określony przez optymalny promień). Sytuacja ta zachodzi wtedy, gdy krańcowe produktywności kapitału i pracy są wyższe od ich realnych cen

$$\begin{aligned} F_{K^D}(K^D, AL^D) &> w_K, \\ F_{L^D}(K^D, AL^D) &> w. \end{aligned} \tag{8}$$

Przypadek (b) oznacza, że optymalna wielkość produkcji i optymalny popyt na czynniki produkcji są określone niejednoznacznie, wyznacza je każdy dodatni poziom czynników z optymalnego promienia. Sytuacja ta występuje, gdy krańcowe produktywności kapitału i pracy są równe ich realnym cenom

$$\begin{aligned} F_{K^D}(K^D, AL^D) &= w_K, \\ F_{L^D}(K^D, AL^D) &= w. \end{aligned} \tag{9}$$

W przypadku (c) optymalna wielkość produkcji i optymalny popyt na czynniki produkcji są zerowe. Jest tak wtedy, gdy krańcowe produktywności

kapitału i pracy są niższe od ich realnych cen[7]. W przypadku (c) firmy zawsze ponoszą straty, wobec czego jest on nierealistyczny i nie będzie przedmiotem dalszej analizy. Przypadki (a) i (b) są bardziej realistyczne. Sytuacja (a) oznacza, że popyt na czynniki produkcji w gospodarce jest nieskończenie duży, czyli *de facto* równy ich zasobom w kraju. W przypadku (a) nie może zatem występować ani bezrobocie, ani niepełne wykorzystanie kapitału. Sytuacja (b) nie jest tak prosta: popyt na czynniki produkcji jest niejednoznaczny (określony z dokładnością do struktury). Niemniej w teorii wzrostu gospodarczego ten stan przyjmuje się najczęściej jako aksjomat, zakładając, że firmy nie osiągają żadnych zysków.

Uzasadnia się to najczęściej następująco:

W długim okresie zyski firm w konkurencji doskonałej są zerowe, co wynika stąd, że istnieje swoboda wejścia/wyjścia z rynku. Jeśli produkcja pewnego towaru przynosi zysk, to pojawią się inne firmy, które zwiększając podaż tego towaru, wywołają spadek jego rynkowej ceny. W ten sposób zyski z produkcji tego towaru spadną do zera. Podobnie, jeżeli produkcja pewnego towaru przynosi straty, to niektóre firmy z niej zrezygnują, a zmniejszona w efekcie podaż spowoduje wzrost rynkowej ceny towaru, co zwiększy zyski. W rezultacie tych procesów dostosowawczych, w konkurencji doskonałej wszystkie firmy w długim okresie osiągają zyski zerowe, zob. [11].

Uzasadnienie takie jest sensowne w wypadku, gdy mówimy o określonym produkcie (branży) w oderwaniu od innych produktów. Wówczas łatwo wyobrazić sobie przechodzenie firm z jednej branży do innej. Natomiast w jednoproduktowej gospodarce, z jaką mamy do czynienia, analogiczne procesy, prowadzące do wyzerowania zysków firm, musiałyby być znacznie bardziej złożone i długookresowe. Dodatkowo sytuację komplikuje założenie o wyrównywaniu się cen w kraju i za granicą.

Z drugiej jednak strony, założenie o zerowych zyskach firm znakomicie ułatwia matematyczną analizę procesu wzrostu gospodarczego. Jest ono tak rozpowszechnione w literaturze, że trudno znaleźć model wzrostu, bez tego

[7] Należy podkreślić, że przy przyjętych założeniach nie jest możliwa sytuacja, w której krańcowa produktywność kapitału byłaby większa od realnej ceny wynajmu kapitału, a jednocześnie krańcowa produktywność pracy byłaby mniejsza od realnej stawki płacy (i odwrotnie). Zakładamy bowiem doskonałą mobilność kapitału, dzięki czemu racjonalnie działająca firma zawsze będzie się znajdowała na optymalnym promieniu. Tymczasem z (6) wynika, że na promieniu tym: $F_{K^D}/w_K = F_{L^D}/w$, a więc jeżeli krańcowa produktywność kapitału m-krotnie przekracza w_K, to krańcowa produktywność pracy m-krotnie przekracza w.

założenia. Również my zakładamy, że racjonalnie działające firmy osiągają zerowe zyski, co jest równoważne z założeniem, że czynniki produkcji są na rynku wynagradzane zgodnie z ich krańcowymi produktywnościami (warunki (9))[8]. Gdybyśmy poprzestali wyłącznie na tym założeniu, popyt na czynniki produkcji byłby określony niejednoznacznie (z dokładnością do struktury), dlatego dodatkowo zakładamy, że firmy starają się produkować jak najwięcej. Graficznie oznacza to, że gospodarka znajduje się na optymalnym promieniu – tak daleko od punktu (0, 0) jak to możliwe. Jednym z powodów, dla których firmy starają się wykorzystywać kapitał w maksymalnym stopniu (czyli produkować jak najwięcej), jest fakt, że kapitał niewykorzystany stanowi koszt (alternatywny plus deprecjacja). Koszt ten nie jest jednak ujęty *explicite* w naszym modelu.

Zakładamy, że rynek pracy jest w długim okresie w równowadze, czyli że popyt na pracę L^D jest równy podaży pracy L. Graficznie oznacza to, że zużycie czynników w gospodarce wyznacza pewien punkt na pionowej prostej AL (zob. rys. 1). Jednocześnie z przyjętych założeń wynika, że optymalną kombinację czynników w gospodarce wyznacza promień $0O_1$. Ostatecznie więc poziom zużycia czynników w gospodarce zostaje wyznaczony przez punkt przecięcia prostej AL i optymalnego promienia $0O_1$. Punkt ten wyznacza w szczególności popyt na kapitał w gospodarce K^D. Kapitał w modelu jest doskonale mobilny, więc zasób kapitału w kraju jest zawsze równy temu popytowi. Ewentualny niedobór kapitału wywołuje natychmiastową reakcję (zagranicy) w postaci napływu kapitału do kraju. Podobnie nadmiar kapitału (czyli częściowe niewykorzystanie kapitału) wywołuje jego odpływ. Bodźcem skłaniającym do przemieszczania kapitału jest fakt, że kapitał niewykorzystywany w produkcji nie przynosi żadnego dochodu (a przy tym ulega deprecjacji). Natomiast kapitał wykorzystywany w procesie produkcji przynosi dochód[9] $r+\delta$.

[8] Założenie o zerowych zyskach firm oznacza, że (przeciętna) premia za ryzyko podejmowania działalności gospodarczej jest zerowa. Przykładowo dywidenda otrzymywana przez akcjonariuszy odpowiada wówczas wyłącznie wielkości $r+\delta$, a więc inwestując w akcje nie zarabiają oni nic ponadto, co zarobiliby, inwestując w obligacje. Badania empiryczne (dotyczące długiego okresu) nie potwierdzają, ale i nie odrzucają dotychczas takiej hipotezy, zob. [3].

[9] Ponieważ realna stopa procentowa r jest jednakowa w całej unii, więc jej wzrost powinien wywołać odpływ kapitału z całego obszaru unii do krajów do niej nienależących. Unia monetarna nie jest jednak mała w stosunku do reszty świata, poza tym mobilność kapitału pomiędzy unią a resztą świata nie jest tak duża jak na obszarze unii. Dlatego odpływ kapitału z unii może być faktycznie stopniowy i ograniczony, a w efekcie na rynku kapitału może okresowo panować (zanikająca stopniowo) nierównowaga.

Reasumując, zakładamy, że w analizowanym kraju (należącym do unii) rynek kapitału jest zawsze w równowadze, dzięki natychmiastowemu odpływowi lub napływowi kapitału z krajów unii (lub spoza niej)[10].

Z powyższych dwóch założeń (o równowadze na rynku pracy i kapitału) wynika, że $L^D = L$ oraz $K^D = K$, gdzie K i L oznaczają (doskonale elastyczną) podaż kapitału i (doskonale sztywną) podaż pracy w kraju. Stąd

$$k^D = \frac{K^D}{AL^D} = \frac{K}{AL} = k, \tag{10}$$

gdzie k oznacza stosunek podaży kapitału do podaży efektywnej pracy.

Zważywszy na (9) rynek pracy i kapitału można opisać dwoma równaniami

$$\alpha k^{\alpha-1} = r + \delta, \tag{11}$$

$$A\beta k^{\alpha} = w. \tag{12}$$

Z (11) wynika, że wielkość kapitału **njep** wynosi:

$$k = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{1/\beta}. \tag{13}$$

Graficznie oznacza to, że położenie promienia $0O_1$ jest stałe i niezmienne w czasie, o ile tylko stałe w czasie są parametry α, β, δ oraz stopa procentowa r (rys. 1). W przypadku wzrostu stopy procentowej r (z r_1 do r_2) promień $0O_1$ przesuwa się w dół do położenia $0O_2$ (rys. 1). Kapitał relatywnie drożeje w stosunku do pracy, dlatego firmy starają się pozbywać kapitału i zastępować go pracą. Podaż pracy jest jednak sztywna (prosta AL), dlatego w efekcie spada produkcja i niewykorzystywany kapitał odpływa za granicę. Oczywiście w przypadku spadku stopy r kierunek reakcji jest przeciwny.

Gdy z czasem podaż efektywnej pracy AL rośnie, prosta AL przesuwa się stopniowo w prawo. Jeśli realna stopa procentowa r jest stała, to promień $0O_1$ nie zmienia położenia. W efekcie punkt O_1 przesuwa się stopniowo w prawo i w górę (wzdłuż promienia). Pełne wykorzystanie pracy i kapitału wymaga wówczas stopniowego wzrostu zasobu kapitału **njep** w kraju. Wzrost ten jest osiągany dzięki inwestycjom krajowym i zagranicznym.

[10] Założenie to jest często przyjmowane w modelach wzrostu gospodarki otwartej (por. [1]).

3. Rachunek rozdysponowania produktu oraz tworzenia i podziału dochodu

Zakładamy, że cena produktu jest doskonale elastyczna (choć w całej unii jednakowa), a więc kształtuje się zawsze na poziomie równoważącym podaż towaru z popytem. Dzięki temu całkowity popyt na produkt krajowy jest zawsze równy produkcji Y:

$$Y=C+I+X-M. \tag{14}$$

Realny dochód do dyspozycji obywateli kraju Y_d jest sumą dochodów z pracy i z kapitału krajowego, co przy przyjętym założeniu o zerowych zyskach firm prowadzi do wzoru:

$$\begin{aligned} Y_d &= wL+w_K KK = wL+w_K(KK_K+KK_Z) = \\ &= wL+w_K K+w_K(KK_Z-KZ_K) = Y+w_K E = Y+(r+\delta)E. \end{aligned} \tag{15}$$

Realny dochód do dyspozycji jest zatem równy produkcji powiększonej o dochody z aktywów zagranicznych netto. Dochód ten jest dzielony na konsumpcję C i oszczędności S. Oznaczając przez γ przeciętną skłonność do oszczędzania w gospodarce, mamy

$$S=\gamma Y_d, \tag{16}$$

$$C=(1-\gamma)Y_d. \tag{17}$$

Z równań (14) – (17) wynika, że

$$C+S=C+I+X-M+(r+\delta)E,$$

czyli

$$S-I=Q, \tag{18}$$

gdzie Q oznacza saldo rachunku obrotów bieżących w gospodarce. Równanie (18) to doskonale znana w makroekonomii tożsamość: nadwyżka oszczędności nad inwestycjami jest równa saldu rachunku obrotów bieżących.

Kapitał ulega deprecjacji ze stopą δ; stąd następujące równania dynamiki kapitału:

$$\dot{KK}_K = IK_K - \delta KK_K, \tag{19}$$

$$\dot{KK}_Z = IK_Z - \delta KK_Z, \tag{20}$$

$$\dot{KZ}_K = IZ - \delta KZ_K. \tag{21}$$

Symbolem IZ oznaczamy inwestycje zagraniczne w kraju. Zważywszy na tożsamości

$$IK = IK_K + IK_Z,$$

$$I = IK_K + IZ,$$

dodając równania (19) i (20), otrzymujemy równanie dynamiki kapitału krajowego

$$\dot{KK} = IK - \delta KK. \tag{22}$$

W modelu występuje tylko jeden rodzaj aktywów – kapitał rzeczowy. Dlatego oszczędności obywateli kraju są przeznaczane w całości na inwestycje, powiększające kapitał krajowy (w kraju lub za granicą), $S = IK$. Stąd

$$\dot{KK} = S - \delta KK,$$

czyli

$$\dot{KK} = I + Q - \delta KK. \tag{23}$$

Dodając równania (19) i (21), otrzymujemy równanie dynamiki kapitału w kraju

$$\dot{K} = I - \delta K. \tag{24}$$

Jak pamiętamy, $KK = K + E$, stąd $\dot{E} = \dot{KK} - \dot{K}$. Z (23) i (24) otrzymujemy równanie dynamiki aktywów zagranicznych netto

$$\dot{E} = Q - \delta(KK - K) = Q - \delta E. \tag{25}$$

Przyrost aktywów zagranicznych netto jest zatem równy saldu rachunku obrotów bieżących gospodarki, pomniejszonemu o deprecjację aktywów zagranicznych netto.

4. Równania modelu

Reasumując, interesuje nas gospodarka, której funkcjonowanie opisuje następujący układ równań:

[i] $$r=\alpha\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha-1}-\delta,$$

[ii] $$Y=K^{\alpha}(AL)^{\beta}, \qquad \text{gdzie} \qquad \alpha+\beta=1,$$

[iii] $$w=A\beta\left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha},$$

[iv] $$C=(1-\gamma)(Y+(r+\delta)E),$$

[v] $$S=\gamma(Y+(r+\delta)E),$$

[vi] $$Y=C+I+X-M,$$

[vii] $$Q=X-M+(r+\delta)E,$$

[viii] $$\dot{K}=I-\delta K,$$

[ix] $$\dot{E}=Q-\delta E,$$

[x] $$\dot{L}=nL,$$

[xi] $$\dot{A}=\sigma A,$$

z warunkami początkowymi:

$$K(0)=K_0, \qquad E(0)=E_0, \qquad L(0)=L_0, \qquad A(0)=A_0.$$

Dla przejrzystości przypominamy oznaczenia zmiennych endogenicznych: K – kapitał w kraju, L – zasób pracy, Y – produkcja w kraju, w – realna stawka płacy, C – konsumpcja, S – oszczędności krajowe, I – inwestycje w kraju, $X-M$ – saldo handlu zagranicznego, Q – saldo rachunku obrotów bieżących, E – aktywa zagraniczne netto, A – wskaźnik postępu technicznego. Parametry występujące w modelu: α, β – elastyczności produkcji względem kapitału i efektywnej pracy (parametry funkcji produkcji Cobba-Douglasa), r – realna stopa procentowa, δ – stopa deprecjacji kapitału, n – stopa wzrostu podaży pracy, σ – stopa wzrostu wskaźnika postępu technicznego, γ – przeciętna stopa oszczędności w kraju.

Układ powyższy można przedstawić w prostszej, równoważnej postaci „na jednostkę efektywnej pracy" (**njep**). Małymi literami oznaczamy dalej wartości poszczególnych zmiennych **njep** $k=K/AL$, $e=E/AL$ itd. Jak łatwo

zauważyć, równanie [x] staje się wówczas zbędne i układ równań [i] – [xi] można zapisać w równoważnej *postaci* **njep**:

$$[i'] \qquad r=\alpha k^{\alpha-1}-\delta,$$

$$[ii'] \qquad y=k^{\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha+\beta=1,$$

$$[iii'] \qquad w=A\beta y,$$

$$[iv'] \qquad c=(1-\gamma)(y+(r+\delta)e),$$

$$[v'] \qquad s=\gamma(y+(r+\delta)e),$$

$$[vi'] \qquad y=c+i+x-m,$$

$$[vii'] \qquad q=x-m+(r+\delta)e,$$

$$[viii'] \qquad \dot{k}=i-\varphi k, \quad \text{dla} \quad \varphi=n+\sigma+\delta,$$

$$[ix'] \qquad \dot{e}=q-\varphi e,$$

$$[xi'] \qquad \dot{A}=\sigma A,$$

przy czym: $k(0)=k_0$, $e(0)=e_0$ oraz $A(0)=A_0$.

Zakładamy, że w naszym modelu parametry r i δ są stałe w czasie. Wówczas zasób kapitału **njep** k jest też stały, co wynika z równania [i']:

$$k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\text{const.} \tag{26}$$

W konsekwencji stała jest również produkcja **njep** y, natomiast realna stawka płacy w rośnie wykładniczo ze stopą wzrostu σ równą stopie wzrostu postępu technicznego, co wynika wprost z równania [iii']. Ponieważ $\dot{k}=0$ w każdym momencie, zatem z równania [viii'] wnioskujemy, że inwestycje w kraju **njep** są zawsze proporcjonalne do k

$$i=\varphi k \quad \text{dla} \quad \varphi=n+\sigma+\delta. \tag{27}$$

Przy tym założeniu model można ostatecznie przedstawić w następującej postaci, którą umownie nazywamy *iteracyjną*[11]:

[11] Na ogół postać iteracyjną układu równań utożsamia się z sytuacją, gdy po prawej stronie kolejno po sobie następujących równań występują jedynie zmienne wcześniej określone (ang. *predetermined*), czyli wyliczone we wcześniejszych równaniach. Ściśle rzecz biorąc, przedstawiony układ równań miałby taką strukturę dopiero po jego przedstawieniu w formie dyskretnej (z czasem skokowym – zob. dalej).

$$[k] \qquad k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$[y] \qquad y=k^{\alpha},$$

$$[w] \qquad w=A\beta y,$$

$$[i] \qquad i=\varphi k \quad \text{dla} \quad \varphi=n+\sigma+\delta,$$

$$[c] \qquad c=(1-\gamma)(y+(r+\delta)e),$$

$$[s] \qquad s=\gamma(y+(r+\delta)e),$$

$$[x-m] \qquad x-m=y-c-i,$$

$$[q] \qquad q=x-m+(r+\delta)e,$$

$$[e] \qquad \dot{e}=q-\varphi e,$$

$$[A] \qquad \dot{A}=\sigma A,$$

przy czym: $e(0)=e_0$ oraz $A(0)=A_0$.

W modelu występują następujące zmienne (**njep**): k – kapitał w kraju, y – produkcja w kraju, w – realna stawka płacy, i – inwestycje w kraju, c – konsumpcja, s – oszczędności krajowe, $x-m$ – saldo handlu zagranicznego, q – saldo rachunku obrotów bieżących, e – aktywa zagraniczne netto, A – wskaźnik postępu technicznego. Parametrami modelu są (z założenia stałe w czasie): α, β – elastyczności produkcji względem kapitału i efektywnej pracy (parametry funkcji produkcji Cobba-Douglasa), r – realna stopa procentowa, δ – stopa deprecjacji kapitału, n – stopa wzrostu podaży pracy, σ – stopa wzrostu wskaźnika postępu technicznego, γ – przeciętna stopa oszczędności w kraju.

5. Definicja stanu stacjonarnego (SS) i warunki jego stabilności

Stan stacjonarny utożsamiamy z sytuacją, w której wszystkie zmienne modelu **njep** (z wyjątkiem zmiennych A oraz w) są stałe w czasie. W szczególności dynamika aktywów zagranicznych netto **njep** w SS musi wygasnąć: $\dot{e}=0$.

Podstawiając [i] oraz [c] do [$x-m$], otrzymujemy:

$$x-m=y-(1-\gamma)[y+(r+\delta)e]-\varphi k, \tag{28}$$

a stąd zważywszy na [q] i wykorzystując [k], dochodzimy do równania:

$$q=\gamma(r+\delta)e+\left(\gamma-\frac{\alpha\varphi}{r+\delta}\right)y. \tag{29}$$

Z (29) i [e] wynika, że:

$$\dot{e}=[\gamma(r+\delta)-\varphi]e+[\gamma(r+\delta)-\alpha\varphi]\frac{y}{r+\delta}, \tag{30}$$

gdzie $y=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}=\text{const}$. Prawa strona równania (30) jest liniową funkcją zmiennej e. Funkcja ta może być rosnąca, malejąca lub stała, w zależności od parametrów modelu. SS jest globalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ta jest malejąca, a więc gdy spełniony jest warunek:

$$r<\frac{\varphi}{\gamma}-\delta \qquad \text{dla} \qquad \varphi=n+\sigma+\delta. \tag{31}$$

W praktyce (w realnych gospodarkach), warunek ten jest spełniony. Na przykład gdy minimalna realistyczna wartość parametru φ wynosi 5% (dla $n=0$, $\sigma=2\%$, $\delta=3\%$), a maksymalna stopa oszczędności γ wynosi 35%, wówczas nawet przy tych ekstremalnych wartościach parametrów φ oraz γ warunek stabilności nie byłby spełniony dopiero, gdyby wartość parametru r przekraczała 11,3%. Tak wysoka realna stopa procentowa praktycznie nie występuje (co najwyżej przejściowo). Dlatego całkowicie uzasadnione wydaje się założenie, że warunek (31) jest w naszym modelu spełniony w każdym momencie, co prowadzi do wniosku, że SS jest globalnie asymptotycznie stabilny.

6. Wartości zmiennych w stanie stacjonarnym

W SS produkcja, kapitał, inwestycje, konsumpcja, oszczędności, saldo bilansu handlowego, saldo rachunku obrotów bieżących, aktywa zagraniczne netto i kapitał krajowy na jednostkę efektywnej pracy są stałe. Wynika

stąd, że oryginalne zmienne modelu (Y, K, I, C, S, $X-M$, Q, E, KK) w SS rosną z tzw. naturalną stopą wzrostu $n+\sigma$, równą sumie stopy wzrostu ludności i tempa postępu technicznego w kraju. Natomiast wszystkie zmienne na osobę (czyli Y/L, K/L itd.) rosną ze stałą stopą wzrostu postępu technicznego σ. Ponieważ $w^*=A\beta y^*$, więc realna stawka płacy w SS również rośnie ze stopą wzrostu σ. Oznacza to, że w długim okresie jedynym sposobem na wzrost płac realnych, konsumpcji na osobę, produkcji na osobę itp. jest szeroko rozumiany postęp techniczny (opisany zmienną A), prowadzący do wzrostu wydajności pracy.

W naszym modelu w każdym momencie produkcja, kapitał i inwestycje **njep** zależą wyłącznie od egzogenicznych parametrów technologicznych oraz od unijnej realnej stopy procentowej r. Wynika to z równań [y], [k], [i]. Korzystając z układu równań modelu **njep**, można podać wzory na wartości poszczególnych zmiennych w SS:

$$y^*=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}=\text{const.} \tag{32}$$

$$k^*=(y^*)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\text{const.} \tag{33}$$

$$i^*=\varphi k^*=\varphi\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\text{const.} \tag{34}$$

Wielkość aktywów zagranicznych netto **njep** w SS otrzymujemy, przyrównując prawą stronę równania (30) do zera:

$$e^*=\frac{\gamma(r+\delta)-\alpha\varphi}{\varphi-\gamma(r+\delta)}\cdot\frac{y^*}{r+\delta}. \tag{35}$$

Jeżeli spełniony jest warunek (31), to mianownik tego ułamka jest ujemny. Zatem w zależności od znaku wyrażenia $\alpha\varphi-\gamma(r+\delta)$ wielkość aktywów zagranicznych netto **njep** może być w SS dodatnia, ujemna lub zerowa. Jeżeli $r>\frac{\alpha\varphi}{\gamma}-\delta$, to $e^*>0$, i odwrotnie. Jeżeli zatem realna stopa procentowa jest odpowiednio wysoka, to kraj jest w SS *per saldo* wierzycielem zagranicy, co oznacza, że wartość kapitału krajowego ulokowanego za granicą przekracza wartość kapitału zagranicznego ulokowanego w kraju. I odwrotnie.

Wielkość salda rachunku obrotów bieżących w SS wyraża się wzorem

$$q^* = \varphi e^* = \frac{\gamma(r+\delta)\varphi - \alpha\varphi^2}{\varphi - \gamma(r+\delta)} \cdot \frac{y^*}{r+\delta}, \tag{36}$$

a więc w SS saldo rachunku obrotów bieżących ma taki sam znak jak aktywa zagraniczne netto. Jego znak zależy od znaku wyrażenia $\alpha\varphi - \gamma(r+\delta)$.

Znak salda bilansu handlowego w SS również zależy od wartości parametrów

$$(x-m)^* = \left[1 - \frac{\alpha\varphi}{r+\delta} - \frac{(1-\gamma)\beta\varphi}{\varphi - \gamma(r+\delta)}\right] y^*. \tag{37}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(x-m)^* \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad [r+\delta-\varphi][\alpha\varphi - \gamma(r+\delta)] \geqslant 0.$$

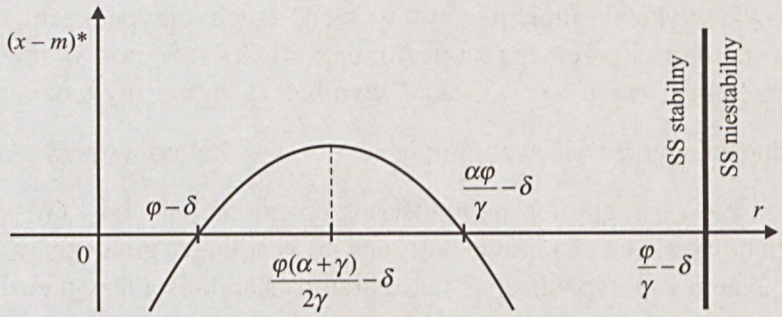
Wynika stąd, że jeżeli $\alpha > \gamma$, to[12]

$$\begin{aligned}
&(x-m)^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi - \delta < r < \frac{\alpha\varphi}{\gamma} - \delta, \\
&(x-m)^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \varphi - \delta \quad \text{lub} \quad r = \frac{\alpha\varphi}{\gamma} - \delta, \\
&(x-m)^* < 0 \quad \Leftrightarrow \quad r < \varphi - \delta \quad \text{lub} \quad r > \frac{\alpha\varphi}{\gamma} - \delta.
\end{aligned} \tag{38}$$

Warunki te ilustruje rysunek 3. Najdalej na prawo położony punkt wyznacza granicę obszaru stabilności; SS staje się niestabilny, jeśli stopa procentowa r przekroczy tę graniczną wartość (por. (31)). Przypominamy, że $\varphi - \delta = n + \sigma$ jest tzw. naturalną stopą wzrostu.

---

[12] W realnych gospodarkach warunek ten jest spełniony, gdyż wartość parametru α kształtuje się w praktyce na poziomie około 33%, a stopa oszczędności γ prawie nigdy nie przekracza tego poziomu.



Rys. 3. Saldo bilansu handlowego w stanie stacjonarnym

Korzystając z równań [c] i (35), otrzymujemy wielkość konsumpcji **njep** w SS:

$$c^* = \frac{(1-\gamma)\beta\varphi}{\varphi - \gamma(r+\delta)} y^*. \tag{39}$$

Podobnie łatwo można wyznaczyć wartości pozostałych zmiennych w SS.

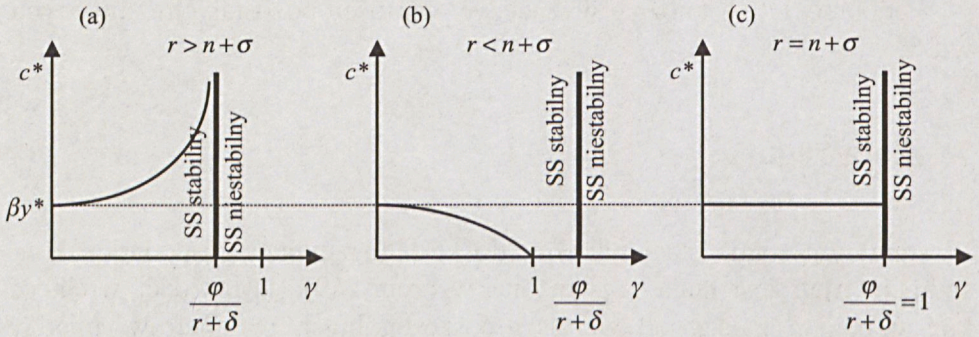
7. Złota reguła

W stabilnym stanie stacjonarnym, do którego zmierza gospodarka, konsumpcja **njep** jest stała i wyrażona wzorem (39). Jak widać, wielkość konsumpcji c^* zależy od wartości poszczególnych parametrów, między innymi od przeciętnej skłonności do oszczędzania γ, o której decydują konsumenci. Warto zatem zastanowić się nad tym, jaka wartość tego parametru (przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów) jest dla nich optymalna. Najbardziej naturalnym kryterium optymalizacji jest tutaj wielkość konsumpcji na osobę w SS. Maksymalizacja konsumpcji na osobę w SS (która nie jest stała) jest równoważna z maksymalizacją konsumpcji **njep** w SS (która jest stała). Łatwo zauważyć, że

$$\frac{\partial c^*}{\partial \gamma} = \frac{\beta\varphi y^*}{[\varphi - \gamma(r+\delta)]^2} \cdot (r - n - \sigma). \tag{40}$$

Jak z tego wynika, funkcja $c^*(\gamma)$ jest rosnąca, malejąca lub stała – w zależności od tego, czy realna stopa procentowa jest (a) większa, (b) mniejsza, czy (c) równa naturalnej stopie wzrostu $n+\sigma$. Rysunek 4

przedstawia wykresy funkcji $c^*(\gamma)$ w tych trzech przypadkach. Granica obszaru stabilności przebiega na poziomie $\gamma = \varphi/(r+\delta)$; por. warunek (31). Jak pamiętamy, $\varphi = n+\sigma+\delta$, skąd wynika, że graniczny poziom stopy oszczędności wyraża się wzorem: $\gamma = \dfrac{n+\sigma+\delta}{r+\delta}$. Zatem w przypadku (a), w którym $r > n+\sigma$, granica stabilności przebiega na lewo od 1. W przypadku (b) znajduje się ona na prawo od 1, a w przypadku (c) graniczną wartością γ jest 1. Zatem w przypadkach (b) i (c) granica stabilności leży nieosiągalnie daleko na prawo – nawet przy bardzo wysokich wartościach parametru γ, w tych dwóch przypadkach stan stacjonarny z pewnością jest stabilny. Również w przypadku (a), przy realistycznych wartościach parametrów, granica stabilności przebiega dostatecznie blisko 1, dzięki czemu w realnej gospodarce nie jest możliwa niestabilność SS. Na przykład przy realistycznych wartościach parametrów przyjętych w BZP (zob. niżej, punkt 8), graniczna wartość γ, powyżej której SS staje się niestabilny, wynosi 75%.



Rys. 4. Konsumpcja njep w SS jako funkcja przeciętnej stopy oszczędności w kraju

W sytuacji (a), w której realna stopa procentowa jest wyższa od naturalnej stopy wzrostu gospodarki, optymalna stopa oszczędności powinna być jak najbliższa granicy stabilności: $\bar{\gamma} \to \dfrac{\varphi}{r+\delta}$. Oznacza to, że w przypadku (a) warto oszczędzać jak najwięcej. W długim okresie gospodarka znajdzie się bowiem w stanie stacjonarnym, w którym konsumpcja na osobę jest tym większa, im wyższa jest stopa oszczędności γ. Przy wartościach parametrów przyjętych w BZP (zob. punkt 8), optymalna stopa oszczędności powinna być jak najbliższa 75%, choć osiągnięcie lub przekroczenie tego poziomu powoduje utratę stabilności przez gospodarkę.

W przypadku (b), w którym stopa procentowa jest zbyt niska, nie warto oszczędzać w ogóle. W SS konsumpcja na osobę jest bowiem maksymalna wówczas, gdy $\gamma = 0$. Wydaje się to paradoksalne, ale pamiętajmy, że mamy do czynienia z małą gospodarką otwartą w unii monetarnej. Zerowa stopa oszczędności krajowych oznacza, że obywatele kraju w SS nie posiadają w ogóle żadnego kapitału – ani w kraju, ani za granicą (przy zbyt małej realnej stopie procentowej to się po prostu nie opłaca). Nie oznacza to jednak, że produkcja w kraju całkowicie wygasa. Wręcz przeciwnie, obserwujemy w SS pełne zatrudnienie (z założenia) i pełne wykorzystanie kapitału w kraju, który jest jednak w 100% własnością zagranicy. Obywatele kraju nie mają co prawda żadnych dochodów z kapitału, ale czerpią dochody z pracy, które w całości przeznaczają na konsumpcję. I jest to dla nich w przypadku (b) sytuacja najlepsza z możliwych.

W przypadku (c) stopa oszczędności γ nie ma wpływu na wielkość konsumpcji na osobę w SS. Oczywiście zerowa stopa oszczędności jest równoważna z sytuacją (b).

Złotą regułę można zatem zapisać następująco:

(a) Jeżeli $r > n + \sigma$, to poziom oszczędności w gospodarce powinien być jak najbliższy wartości $\frac{\varphi}{r + \delta}$, ale nie może przekroczyć tego poziomu.

(b) Jeżeli $r < n + \sigma$, to poziom oszczędności w gospodarce powinien być jak najniższy (najlepiej zerowy).

(c) Jeżeli $r = n + \sigma$, to dla maksymalizacji konsumpcji nie ma znaczenia, ile gospodarka oszczędza[13].

Należy podkreślić, że w rzeczywistości realna stopa procentowa zmienia się – nawet w stabilnych gospodarkach Europejskiej Unii Monetarnej waha się – raz jest wyższa, innym razem niższa od naturalnych stóp wzrostu poszczególnych krajów[14]. Te ostatnie również ulegają zmianom – dotyczy to zarówno stóp wzrostu ludności (ściślej: podaży pracy), jak i tempa postępu technicznego. Dlatego w rzeczywistości wyszczególnione tu przypadki (a), (b) i (c) występują na przemian. W rezultacie tak prosty model, jak zaprezentowany w artykule, nie daje jednoznacznej odpowiedzi, jaki powinien być optymalny poziom oszczędności w gospodarce. Jeśli nawet

[13] Analogiczną złotą regułę dla małej gospodarki otwartej z doskonałą mobilnością kapitału można znaleźć w [7].

[14] Mówiąc nieco ogólniej: wahaniom (nieraz znacznym) podlegają realne ceny wynajmu kapitału (*real rental rates*). Wahania te są silnie skorelowane z fazami cyklu koniunkturalnego, a dokładniej ze stopniem nierównowagi na rynku kapitału.

w pewnych okresach nie warto oszczędzać, to nie wiadomo, czy po pewnym czasie sytuacja się nie zmieni.

Należy też zwrócić uwagę na szereg czynników psychologicznych, społecznych i politycznych, niemożliwych lub bardzo trudnych do uwzględnienia w matematycznym modelu gospodarki, a mających znaczenie w sytuacjach, gdy coraz większa część kapitału w różnych krajach staje się własnością zagranicy. Czynniki te sprawiają, że nawet jeżeli w warunkach doskonałej mobilności kapitału (w unii monetarnej) i przy stosunkowo niskiej realnej stopie procentowej z makroekonomicznego punktu widzenia nie warto oszczędzać i inwestować, to jednak opinie obywateli poszczególnych krajów mogą być odmienne.

8. Empiryczna analiza wrażliwości SS

W teorii neoklasycznej stan stacjonarny stanowi „magnes", do którego z czasem zmierza gospodarka. Warto prześledzić, jak zmieni się jego położenie, gdy parametry modelu ulegną zmianie. Wartości poszczególnych zmiennych **njep** w SS podają wzory (32)-(37) i (39). Są one funkcjami parametrów r, γ, α, β, n, σ, δ. Z ekonomicznego punktu widzenia najbardziej interesująca jest analiza wrażliwości SS na zmiany realnej stopy procentowej r, a także na zmiany przeciętnej stopy oszczędności w kraju γ.

Analizę wrażliwości można przeprowadzić metodą teoretyczną bądź numeryczną. Metoda teoretyczna polega na matematycznej analizie wzorów, opisujących wartości zmiennych w SS. W ramach tej analizy można na przykład wyznaczyć elastyczności (lub pochodne) poszczególnych zmiennych modelu w SS względem kolejnych parametrów[15]. W tym punkcie ograniczamy się do analizy numerycznej, polegającej na symulacyjnym prześledzeniu wpływu poszczególnych parametrów na SS. Wygodnie przyjąć, jako punkt odniesienia, zestaw wartości parametrów, który wydaje się najbardziej reprezentatywny, przeciętny dla grupy krajów tworzących Europejską Unię Monetarną. Przyjmujemy zatem następujący bazowy zestaw parametrów (BZP):

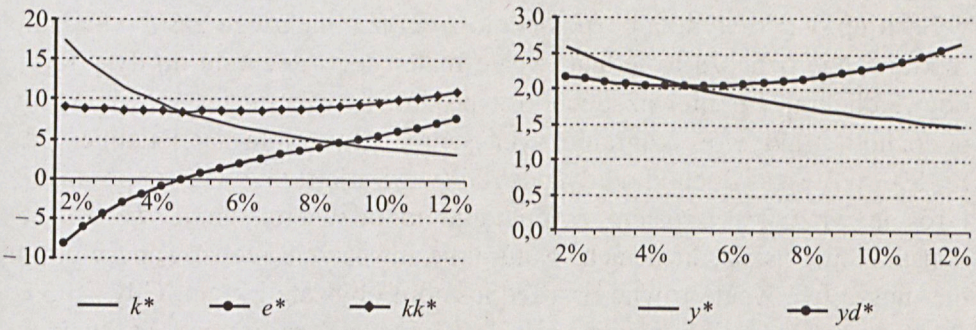
$$r=5\%,\ \gamma=25\%,\ \alpha=1/3 \text{ (czyli } \beta=2/3),\ n=1\%,\ \sigma=2\%,\ \delta=3\%.$$

Analiza wrażliwości dotyczy tu zawsze tylko jednego wybranego parametru. Na przykład: inwestycje **njep** w SS wyrażają się wzorem (34).

[15] Stosując tę metodę, wyprowadziliśmy w punkcie 7 złotą regułę oszczędzania.

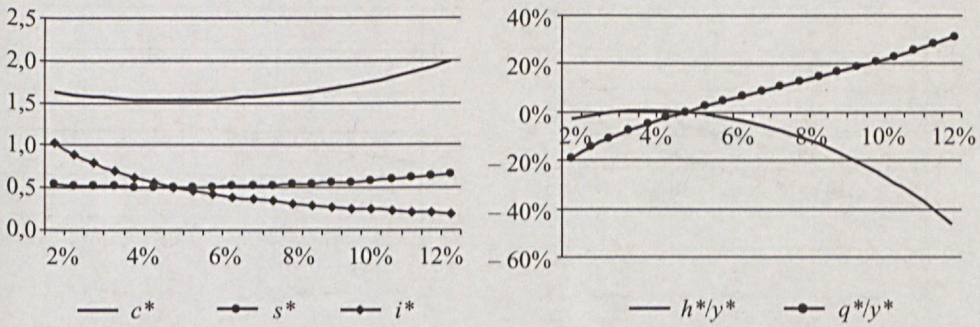
Analiza wrażliwości i^* na zmiany parametru r polega na tym, że obliczamy i^* dla różnych wartości r, przy czym wszystkie pozostałe parametry bierzemy z BZP. W efekcie otrzymujemy funkcję $i^*(r)$, której przebieg można łatwo zbadać. Łatwo też naszkicować wykres takiej funkcji. W ten sposób można badać na przykład funkcje $i^*(\gamma)$, $i^*(n)$, $i^*(\sigma)$.

Poniżej przedstawiamy wybrane wykresy, ilustrujące wrażliwość SS na zmiany parametru r.



Rys. 5. Kapitał, k^*, aktywa zagraniczne netto, e^*, i kapitał krajowy, kk^*, oraz produkcja w kraju, y^*, i dochód do dyspozycji, yd^*, obywateli kraju (njep) w SS przy różnych poziomach realnej stopy procentowej r

W SS wartość kapitału w kraju **njep**, k^*, jest tym mniejsza, im wyższa jest stopa procentowa r. Wynika to stąd, że popyt na kapitał w kraju (przy założeniu równowagi na rynku pracy) jest malejącą funkcją r, opisaną wzorem (33). Jednak kapitał krajowy, kk^*, w SS **njep** jest stosunkowo



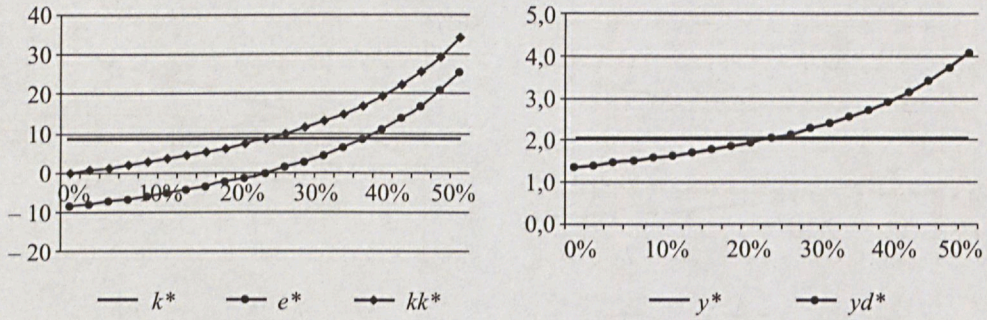
Rys. 6. Konsumpcja, c^*, oszczędności, s^*, i inwestycje, i^*, w kraju (njep) oraz stosunek salda bilansu handlowego, h^*, i salda rachunku obrotów bieżących, q^*, do produkcji w SS przy różnych poziomach realnej stopy procentowej r

niewrażliwy na zmiany wartości stopy r. Z tego wynika, że im wyższa stopa r, tym większa część kapitału krajowego jest inwestowana poza granicami kraju. W rezultacie aktywa zagraniczne netto, e^*, w SS **njep** wyraźnie rosną ze wzrostem r. Przy przyjętym BZP, graniczna wartość realnej stopy procentowej r wynosi 5%. Po przekroczeniu tego poziomu aktywa zagraniczne netto stają się dodatnie, co oznacza, że kapitał krajowy ulokowany za granicą zaczyna przewyższać kapitał zagraniczny ulokowany w kraju.

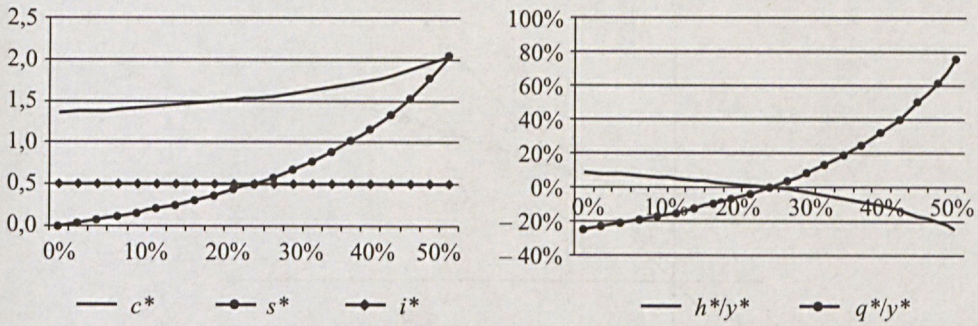
Wraz ze wzrostem realnej stopy procentowej maleje również produkcja w SS **njep**, y^*, co wynika bezpośrednio z coraz mniejszego zasobu kapitału w kraju. Nie oznacza to jednak wcale malejącego dochodu do dyspozycji obywateli kraju, ponieważ dochód z produkcji w kraju jest powiększany o dochód z aktywów zagranicznych netto. Aktywa te są dodatnie, gdy $r>5\%$. Wówczas dochód do dyspozycji (w SS **njep**) przewyższa produkcję i rośnie wraz ze wzrostem r. Znajduje to odzwierciedlenie w rosnącej konsumpcji i oszczędnościach. Naturalnie inwestycje realizowane w kraju nie muszą być wcale równe oszczędnościom obywateli kraju. Gdy $r>5\%$, część oszczędności obywateli kraju jest lokowana za granicą, co znajduje wyraz w dodatnim saldzie rachunku obrotów bieżących.

Jak widać, deficyt bilansu handlowego silnie się pogłębia wraz ze wzrostem stopy r, gdyż przy $r>5\%$ dalszy wzrost realnej stopy procentowej powoduje pogłębienie luki między produkcją a popytem konsumpcyjnym i inwestycyjnym w kraju. Wynikający stąd głęboki deficyt bilansu handlowego jest równoważony dochodami z aktywów zagranicznych netto.

Kolejne cztery wykresy ilustrują wrażliwość SS na zmiany przeciętnej stopy oszczędności γ.



Rys. 7. Kapitał, k^*, aktywa zagraniczne netto, e^*, i kapitał krajowy, kk^*, oraz produkcja w kraju, y^*, i dochód do dyspozycji, yd^*, obywateli kraju (njep) w SS przy różnych poziomach stopy oszczędności γ



Rys. 8. Konsumpcja, c^*, oszczędności, s^*, i inwestycje, i^*, w kraju (njep) oraz stosunek salda bilansu handlowego, h^*, i salda rachunku obrotów bieżących, q^*, do produkcji w SS przy różnych poziomach stopy oszczędności γ

Poziom produkcji i kapitału w kraju w SS **njep** nie zależy od przeciętnej stopy oszczędności γ. Przy przyjętych założeniach, poziom ów wynika wyłącznie z (założonej) równowagi na rynku kapitału i pracy w kraju. Przy zerowej stopie oszczędności cały kapitał w kraju jest własnością zagranicy. Im wyższa stopa oszczędności, tym większy kapitał krajowy zostanie zakumulowany w SS. Graniczna wartość parametru γ wynosi 25% – po przekroczeniu tego poziomu wartość kapitału krajowego zaczyna przekraczać zasób kapitału ulokowanego w kraju, a więc aktywa zagraniczne netto stają się dodatnie. Dzięki temu dochód do dyspozycji obywateli kraju zaczyna przewyższać produkcję w kraju.

Dla utrzymania dodatnich aktywów zagranicznych netto konieczne jest, aby oszczędności obywateli kraju przewyższały inwestycje w kraju. Wówczas saldo rachunku obrotów bieżących jest dodatnie.

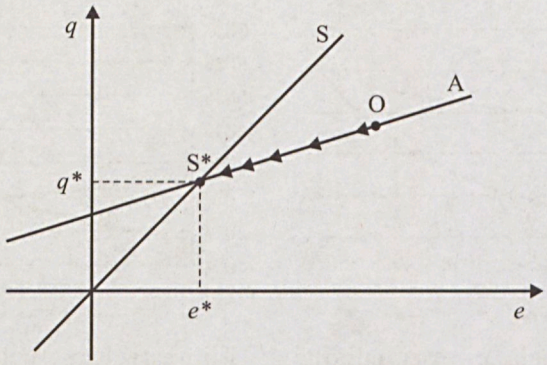
9. Proces przejścia (*transitory dynamics*)

Jak pamiętamy, saldo rachunku obrotów bieżących q jest w modelu związane z aktywami zagranicznymi netto e zależnością liniową (29). Korzystając z [y] można ją zapisać w postaci:

$$q=\gamma(r+\delta)e+\left(\gamma-\frac{\alpha\varphi}{r+\delta}\right)\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad \text{(A)}$$

W stanie stacjonarnym zmienne q i e są natomiast powiązane zależnością liniową:

$$q=\varphi e \qquad \text{dla} \quad \varphi=n+\sigma+\delta. \qquad \text{(S)}$$



Rys. 9. Saldo rachunku obrotów bieżących, q^*, i aktywa zagraniczne netto, e^*, w stanie stacjonarnym

Stan stacjonarny (punkt S^*) jest punktem przecięcia prostych A i S (zob. rys. 9). Obie proste są rosnące. Przy założeniu (31), tzn. $\varphi > \gamma(r+\delta)$, nachylenie prostej A jest mniejsze niż nachylenie prostej S. Zauważmy, że niezależnie od wartości parametrów, prosta S zawsze przechodzi przez punkt (0, 0). Natomiast (w zależności od parametrów) wyraz wolny równania prostej A może być dodatni, ujemny lub zerowy. Prosta A może zatem przecinać prostą S tylko w I lub w III ćwiartce układu współrzędnych lub w punkcie (0, 0)[16]. Potwierdza to uzyskany wcześniej wniosek, że w SS saldo rachunku obrotów bieżących ma taki sam znak jak aktywa zagraniczne netto.

Wykorzystując wykresy prostych A i S, można graficznie zobrazować zbieżność gospodarki do SS. Warunek (A) wynika bezpośrednio z równań modelu, więc gospodarka znajduje się zawsze na prostej A. SS jest w modelu globalnie asymptotycznie stabilny, a więc (przy stałych parametrach) gospodarka zmierza wzdłuż prostej A do punktu S^*. Niezależnie od tego jak daleko od punktu S^* gospodarka się znajduje, z czasem osiąga ten punkt[17]. Zbieżność tę ilustruje rysunek 9.

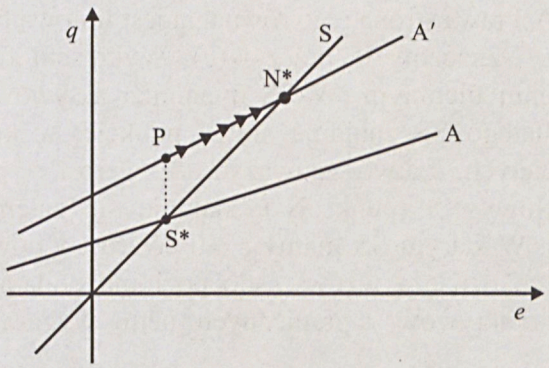
Załóżmy teraz, że gospodarka znajduje się w SS, czyli w punkcie S^*. Jeśli zmianie ulegnie którykolwiek z parametrów modelu, to zmieni się położenie prostych A i S. W rezultacie zmieni się również SS. Gospodarka, która była w starym SS, zacznie zmierzać w kierunku nowego SS. Ten

[16] Na rysunku przedstawiono pierwszą z tych trzech możliwości.

[17] Dokładniej mówiąc, ze względu na założony czas „ciągły" (a nie skokowy) gospodarka z czasem zbliża się do tego punktu, choć nigdy go nie osiąga. Zbieżność do SS ma bowiem charakter asymptotyczny.

proces przejścia ze starego do nowego SS (wywołany zmianą parametrów) określa się w literaturze mianem dynamiki przejścia (ang. *transitory dynamics*).

Analiza procesu przejścia (podobnie jak wyżej przedstawiona analiza wrażliwości) dotyczy tu zawsze jednego wybranego parametru. Zacznijmy od parametru γ. Załóżmy, że w pewnym momencie stopa oszczędności nagle wzrosła i pozostaje na tym wyższym poziomie. Jak łatwo zauważyć, położenie prostej S nie zmieni się, natomiast nachylenie i wyraz wolny funkcji, której obrazem jest prosta A, wzrosną. Zatem nowy SS (punkt N^*) znajdzie się na prawo, powyżej starego[18]. Ilustruje to rysunek 10.



Rys. 10. Proces przejścia wywołany wzrostem stopy oszczędności γ

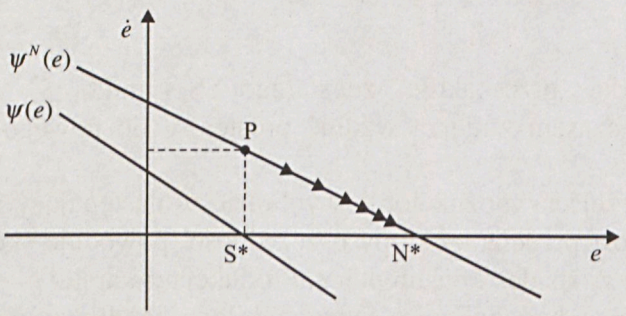
Gospodarka „przeskakuje" ze starego SS (punktu S^*) do punktu P. Następnie z czasem zmierza wzdłuż prostej A′ do nowego SS, czyli do punktu N^*.

Proces przejścia można sobie wyobrazić w następujący sposób: nagły i trwały wzrost przeciętnej stopy oszczędności powoduje skokowy wzrost oszczędności s i spadek konsumpcji c. Produkcja y, kapitał k oraz inwestycje i nie ulegają żadnej zmianie. Dlatego bilans handlowy natychmiast się poprawia (zob. [*h*]). Aktywa zagraniczne netto e w pierwszej chwili oczywiście nie zmieniają się (ich zmiana wymaga czasu). Dlatego skokowa poprawa bilansu handlowego jest równoznaczna ze skokową poprawą salda

[18] Mogłoby się wydawać, że gdy stary SS znajduje się w III ćwiartce, położenie nowego SS względem starego nie jest przesądzone. Łatwo jednak sprawdzić, że pochodna $\partial q^*/\partial \gamma$ jest dodatnia dla dowolnych parametrów modelu, co oznacza, że w analizowanej sytuacji w każdym wypadku nowy SS znajduje się na prawo i w górę od starego.

rachunku obrotów bieżących q. To z kolei powoduje stopniowy wzrost aktywów zagranicznych netto (zob. [e]). Dzięki zwiększającym się dochodom z tych aktywów, zwiększa się stopniowo konsumpcja i oszczędności **njep**. Z czasem stopniowy wzrost e wpływa pozytywnie na saldo obrotów bieżących. Jednak z drugiej strony wzrost c pogarsza bilans handlowy, co wpływa negatywnie na saldo obrotów bieżących. Z czasem te dwa efekty wyrównują się i saldo obrotów bieżących stabilizuje się na nowym poziomie q^*. Również aktywa zagraniczne netto stabilizują się na poziomie e^*. Gospodarka znalazła się tym samym w nowym SS.

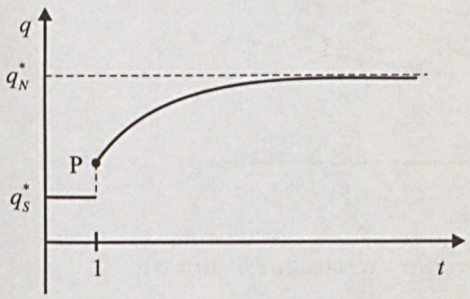
Proces przejścia można również zilustrować za pomocą diagramu fazowego. Jak pamiętamy, dynamikę modelu opisuje liniowe równanie różniczkowe (30). Prawa strona tego równania jest liniową funkcją aktywów zagranicznych e. Oznaczmy ją przez $\psi(e)$. Wykresem funkcji $\psi(e)$ jest prosta o nachyleniu ujemnym. W SS dynamika aktywów zagranicznych netto wygasa, dlatego SS znajduje się w punkcie, w którym ta prosta przecina oś odciętych. Łatwo zauważyć, że wzrost γ przesuwa prostą $\psi(e)$ w górę. Nowy SS (punkt N^*) znajduje się zatem na prawo od starego (rys. 11). W starym SS mamy $\dot{e}=0$. Wzrost γ powoduje skokowy wzrost salda q, co oznacza wzrost $\dot{e}$ do poziomu dodatniego. Z czasem jednak dynamika aktywów zagranicznych netto wygasa, tzn. $\dot{e}$ znowu maleje do zera.



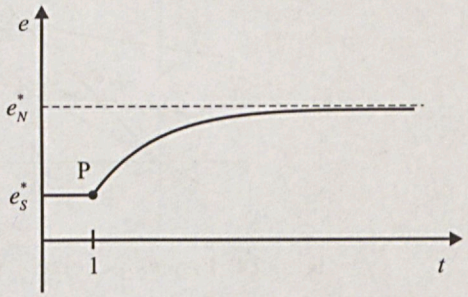
Rys. 11. Proces przejścia wywołany wzrostem stopy oszczędności γ – diagram fazowy

Jak wynika z powyższej analizy, saldo q skokowo rośnie w momencie szoku, aby następnie dalej rosnąć i w końcu ustabilizować się na pewnym poziomie. Natomiast aktywa e od momentu szoku stopniowo rosną, w coraz wolniejszym tempie, aby ustabilizować się na nowym, wyższym poziomie.

Trajektorie zmiennych q i e w trakcie procesu przejścia wywołanego skokowym wzrostem γ przedstawiają poniższe rysunki.



Rys. 12. Trajektoria przejścia q ($\gamma\uparrow$)



Rys. 13. Trajektoria przejścia e ($\gamma\uparrow$)

Trajektorie pozostałych zmiennych modelu w trakcie procesu przejścia wywołanego wzrostem γ można przedstawić za pomocą podobnych rysunków.

* *
*

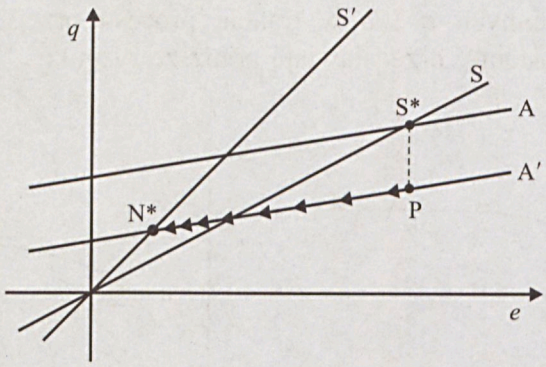
W analogiczny sposób można przeanalizować proces przejścia od starego do nowego SS, wywołany wzrostem pozostałych parametrów. Warto zauważyć, że efekty (trwałego) wzrostu parametru n są identyczne z efektami wzrostu parametru σ. Wynika to bezpośrednio ze wzorów na wartości zmiennych **njep** w SS.

Załóżmy, że w pewnym momencie stopa wzrostu ludności n (lub tempo postępu technicznego σ) nagle wzrosła i pozostaje na tym wyższym poziomie. Wskutek tego nachylenie prostej S wzrasta. Nachylenie prostej A nie zmienia się, natomiast wyraz wolny jej równania maleje. Zatem nowy SS znajdzie się na lewo, poniżej starego[19]. Ilustruje to rysunek 14. Gospodarka „przeskakuje" ze starego SS (punktu S^*) do punktu P. Następnie z czasem zmierza wzdłuż prostej A′ do nowego SS, czyli do punktu N^*.

[19] Łatwo sprawdzić, że pochodne

$$\frac{\partial q^*}{\partial n} = \frac{\partial e^*}{\partial n} \left(= \frac{\partial q^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial e^*}{\partial \sigma} \right)$$

są ujemne niezależnie od wartości parametrów modelu, co oznacza, że w analizowanej sytuacji w każdym wypadku nowy SS znajduje się w lewo i w dół od starego, por. przypis 18.



Rys. 14. Proces przejścia wywołany wzrostem n (lub σ)

Proces przejścia można sobie wyobrazić w następujący sposób: nagły i trwały wzrost n (lub σ) powoduje skokowy wzrost inwestycji **njep** (zob. [i]), podczas gdy produkcja i kapitał **njep** nie ulegają zmianie. Wzrost n (lub σ) nie ma też początkowo wpływu na konsumpcję i oszczędności **njep**. Wskutek skokowego wzrostu inwestycji pogarsza się saldo bilansu handlowego h. To z kolei powoduje skokowe pogorszenie się salda obrotów bieżących q. (Dlatego gospodarka „przeskakuje" z punktu S^* do punktu P). To z kolei powoduje stopniowy spadek aktywów zagranicznych netto (zob. [e]). Wskutek zmniejszania się dochodów uzyskiwanych z tych aktywów obniża się stopniowo konsumpcja i oszczędności **njep**. Z czasem stopniowy spadek konsumpcji poprawia bilans handlowy, co wpływa pozytywnie na saldo obrotów bieżących[20]. Z drugiej strony, stopniowy spadek e wpływa negatywnie na saldo obrotów bieżących. Z czasem te dwa efekty wyrównują się i saldo rachunku obrotów bieżących stabilizuje się na nowym niższym poziomie q^*. Również aktywa zagraniczne netto stabilizują się na niższym poziomie e^*. Gospodarka znalazła się tym samym w nowym SS.

Podobnie jak poprzednio, proces przejścia można by zilustrować na diagramie fazowym (por. rys. 11). Tym razem nagły i trwały wzrost n (lub σ) przesuwa prostą $\psi(e)$ w dół. Nowy SS znajduje się zatem na lewo od starego.

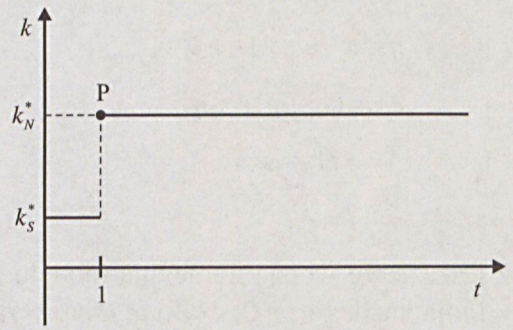
* *
*

Na koniec pozostawiliśmy analizę procesu przejścia związanego ze zmianą stopy procentowej r oraz ze zmianą stopy deprecjacji kapitału δ. Jest ona bowiem nieco bardziej skomplikowana od wcześniej przedstawionych.

[20] Produkcja y oraz inwestycje i nie zmieniają się, choć inwestycje rosną skokowo w początkowym momencie.

Nie można w niej oprzeć się wprost na takiej ilustracji graficznej, jaką prezentowaliśmy dotąd.

Zmiana parametru r (lub δ) wywołuje skokową zmianę k, ponieważ w każdym momencie $k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Skokowa zmiana wielkości kapitału **njep** następuje w modelu natychmiast, w momencie zmiany parametru r lub parametru δ. W praktyce oznacza to nagły, skokowy odpływ lub napływ kapitału do kraju. Trajektoria kapitału jest zatem nieciągła (zob. rys. 15),



Rys. 15. Trajektoria kapitału k w procesie przejścia ($r\uparrow$ lub $\delta\uparrow$)

a w momencie szoku pochodna $\dot{k}$ nie jest równa 0 (jest bowiem nieokreślona). Dlatego traci swoją rację model z czasem ciągłym w postaci iteracyjnej (wyrażony równaniami [k]-[A]), który był oparty na założeniu, że $\dot{k}=0$ dla każdego t. Traci swoją moc także graficzna ilustracja przejścia z jednego stanu stacjonarnego do drugiego, związanego ze skokowymi zmianami parametrów γ, n oraz σ.

Aby poprawnie opisać procesy, będące skutkiem skokowej zmiany r (lub δ), trzeba zapisać model [i′]-[xi′] w takiej odmiennej postaci iteracyjnej, która dopuszcza skokowe zmiany kapitału. Jeśli model ma poprawnie opisywać skokowe (nieciągłe) zmiany zasobu kapitału, musi być zapisany w formie dyskretnej, a więc w konwencji tzw. czasu skokowego. Odpowiednikiem układu [i′]-[xi′] jest wówczas następująca wersja z czasem dyskretnym[21]:

$$[k'] \qquad k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad k_2=\left(\frac{\alpha}{r_2+\delta_2}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

[21] Dla większej przejrzystości do końca artykułu pomijamy indeks czasu t wszędzie tam, gdzie $t=1$. Indeks dolny 2 oznacza wartość zmiennej w momencie 2.

$$[y'] \qquad y = k^{\alpha},$$

$$[w'] \qquad w = A\beta y,$$

$$[i'] \qquad i = k_2 - (1-\varphi)k,$$

$$[c'] \qquad c = (1-\gamma)(y + (r+\delta)e),$$

$$[s'] \qquad s = \gamma(y + (r+\delta)e),$$

$$[x-m'] \qquad x - m = y - c - i,$$

$$[q'] \qquad q = x - m + (r+\delta)e,$$

$$[e'] \qquad e_2 = (1-\varphi)e + q,$$

$$[A'] \qquad A_2 = (1+\sigma)A,$$

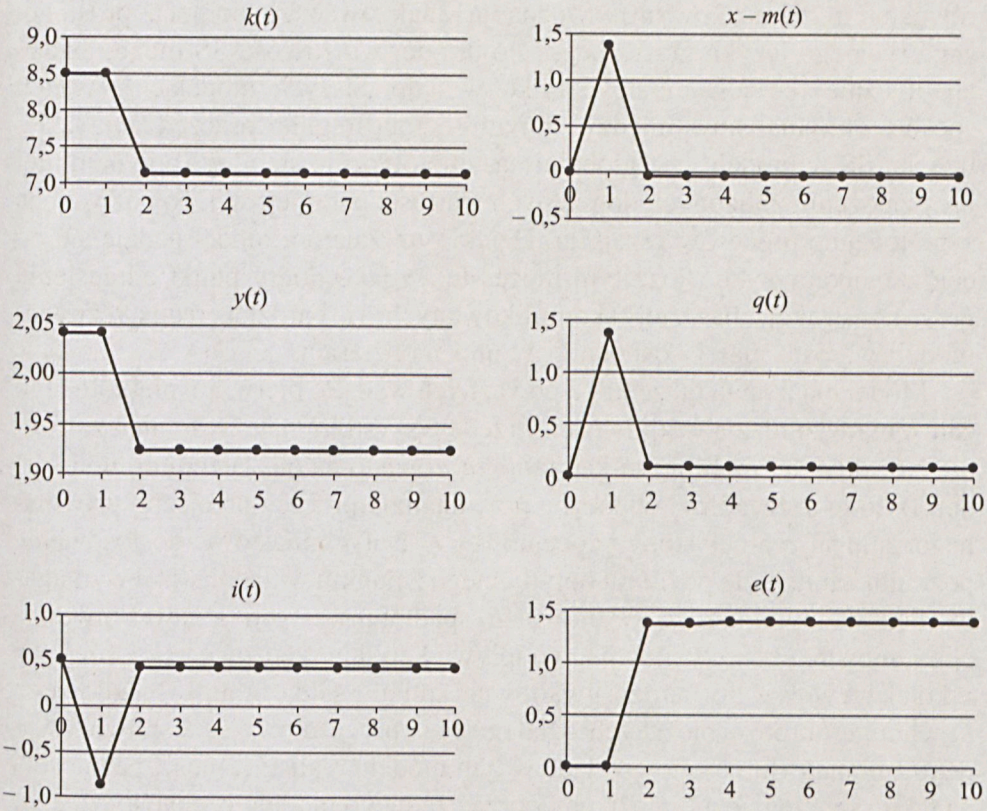
gdzie $e(t=1)=e$ oraz $A(t=1)=A$.

Podkreślmy raz jeszcze, że wersja iteracyjna modelu [k]-[A] opiera się na założeniu, że $\dot{k}=0$ dla każdego $t \geqslant 0$, czyli *de facto* wyklucza możliwość jakiejkolwiek zmiany kapitału **njep**. W szczególności wyklucza możliwość skokowego dostosowania k do nowej, nagle zmienionej stopy procentowej r (a także δ). Natomiast wersja [k']-[A'] z czasem dyskretnym pozwala na skokowe zmiany kapitału, a więc pozwala poprawnie (przynajmniej z teoretycznego punktu widzenia) opisać i przeanalizować proces przejścia wywołany nagłą zmianą parametru r (lub δ).

Niestety, wersja dyskretna modelu nie pozwala na tak elegancką ilustrację graficzną procesu przejścia, z jaką mieliśmy do czynienia uprzednio. Proces przejścia można natomiast przeanalizować metodą symulacji komputerowej[22]. Poniżej przedstawiamy szereg wykresów trajektorii zmiennych w procesie przejścia wywołanym trwałym wzrostem stopy r. Za punkt wyjścia (stary SS) posłużył SS uzyskany dla BZP (zob. wyżej). Zakładamy, że nowa, wyższa stopa procentowa wynosi 6%. Szok (czyli skokowy wzrost r) następuje w okresie $t=2$.

Skokowy wzrost stopy r powoduje spadek optymalnego zasobu kapitału **njep** oraz produkcji y. Kapitał jest doskonale mobilny, dzięki temu k natychmiast dostosowuje się do nowego poziomu optymalnego. Dostosowanie to następuje poprzez odpływ kapitału za granicę, co znajduje odzwierciedlenie w ujemnych inwestycjach. Odpływ kapitału za granicę jest gwałtowny, ale krótkotrwały – w modelu trwa tylko jeden okres. Potem, od

[22] W prostych modelach do przeprowadzenia takich symulacji wystarcza arkusz kalkulacyjny.



Rys. 16. Trajektorie wybranych zmiennych w procesie przejścia wywołanym wzrostem realnej stopy procentowej r

okresu $t=2$, inwestycje są stabilne (równe φk_2). Ów gwałtowny i krótkotrwały odpływ kapitału znajduje odbicie w saldzie bilansu handlowego, a także w saldzie rachunku obrotów bieżących. Następnie oba salda osiągają poziom stacjonarny. Wskutek skokowego odpływu kapitału za granicę rosną skokowo aktywa zagraniczne netto.

Podobną analizę przejścia od jednego do drugiego stanu stacjonarnego można przedstawić, postulując zmianę wartości parametru δ.

Podsumowanie

Przedstawiony model ma wiele zalet. Po pierwsze, jest oparty na prostych założeniach, ma niewiele równań i zmiennych, dzięki czemu jego dynamika jest bardzo prosta (opisana pojedynczym liniowym

równaniem różniczkowym). Można ją analizować za pomocą prostego, sugestywnego języka graficznego. Po drugie, wrażliwość SS można badać analitycznie (co jest możliwe tylko w najprostszych modelach). W ten sposób otrzymaliśmy między innymi „złotą regułę oszczędzania". Po trzecie, SS w modelu jest globalnie asymptotycznie stabilny (przynajmniej przy założeniu zbliżonych do realnych wartości parametrów), co pozwala na symulowanie procesów przejścia. Dzięki tym zaletom model nadaje się do celów edukacyjnych. Poza tym może służyć jako dobry punkt odniesienia przy konstrukcji bardziej skomplikowanych (i bardziej realistycznych) modeli wzrostu małej gospodarki w unii monetarnej.

Model ma jednak także kilka poważnych wad. Po pierwsze, niektóre jego założenia wzbudzają wątpliwości. Przede wszystkim należy do nich założenie o doskonałej mobilności kapitału rzeczowego na obszarze unii monetarnej. Było to szczególnie widoczne przy analizie procesu przejścia, wywołanego zmianą realnej stopy procentowej r. Natychmiastowe dostosowanie poziomu kapitału do poziomu optymalnego z punktu widzenia firm wymagało między innymi bardzo gwałtownego spadku inwestycji (a nawet inwestycji ujemnych, czyli gwałtownego odpływu kapitału rzeczowego z kraju). To z kolei wywoływało bardzo gwałtowne zmiany salda bilansu handlowego i rachunku obrotów bieżących. Dlatego opis procesu przejścia spowodowanego zmianą r (lub δ) nie wygląda w tym modelu realistycznie. Z pewnością na takim schemacie nie można by oprzeć żadnego modelu prognostycznego.

Zatem model ten, choć nadaje się do analizy wrażliwości SS na zmiany parametrów, to jednak nie kwalifikuje się do analizy procesu przejścia. Realistyczny opis procesu przejścia wymaga przede wszystkim stopniowego, a nie skokowego korygowania poziomu kapitału do poziomu optymalnego z punktu widzenia firm. Łatwo sobie wyobrazić bardziej realistyczny model, w którym firmy (krajowe i zagraniczne), obserwując odbiegający od optymalnego poziom kapitału, zwiększają lub zmniejszają inwestycje, dzięki czemu kapitał stopniowo zmierza do poziomu optymalnego (oczywiście optymalny zasób kapitału w realnej gospodarce zmienia się ciągle, gdyż zmieniają się stale parametry gospodarki).

Wiąże się z tym jeszcze jeden słaby punkt modelu. Otóż, jak wynika z równania [k'], model w wersji dyskretnej zakłada już w pierwszym okresie znajomość realnej stopy procentowej, obowiązującej w drugim okresie. Nie jest to zbyt realistyczne założenie, bo oznacza, że firmy znają zarówno nominalną stopę procentową, jak i poziom inflacji o jeden okres do przodu[23].

[23] W wielu modelach, szczególnie w *real-business cycle theory*, przyjmuje się tego rodzaju założenia, zbliżone do nurtu tzw. racjonalnych oczekiwań. Jednak wielu

Oprócz wymienionych wad model podlega oczywiście ogólnym zastrzeżeniom kierowanym pod adresem modeli wzrostu gospodarczego opartych na neoklasycznym aksjomacie permanentnej równowagi ogólnej. Wątpliwości budzi szczególnie założenie o (długookresowej) równowadze na rynkach pracy i kapitału, dlatego model należy traktować jako wyidealizowany teoretyczny obraz gospodarki, dający jedynie pewne wyobrażenie o długookresowych mechanizmach jej funkcjonowania.

Literatura

[1] Barro R., Mankiw G., Sala-i-Martin X., *Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth*, American Economic Review, vol. 85, 1995, no. 1.

[2] Bertola G., *Labor Markets in the European Union*, background paper for a Lecture at EALE 1999.

[3] Campbell J., Diamond P., Shoven J., *Estimating the Real Rate of Return on Stocks Over the Long Term*, Social Security Advisory Board, Waszyngton 2001.

[4] Carlberg M., *International Economic Growth*, Physica-Verlag, Heidelberg 1997.

[5] Cecchetti S., Mark N., Sonora R., *Price Level Convergence Among United States Cities: Lessons for the European Central Bank*, NBER Working Paper 2000, no. 7681.

[6] Chow G., *Rational Versus Adaptive Expectations in Present Value Models*, Review of Economics and Statistics, August 1989.

[7] Hanson J.A., Neher P.A., *The Neoclassical Theorem Once Again: Closed and Open Economies*, American Economic Review 1967, no. 57.

[8] Krueger A., *From Bismarck to Maastricht: The March to European Union and The Labor Compact*, NBER Working Paper 2000, no. 7456.

[9] Lutz M., *Price Convergence under EMU? First Estimates*, 2002.

[10] Solow R., *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, vol. 70, 1956.

[11] Stockman A. C., *Introduction to Microeconomics*, The Dryden Press, 1996.

---

ekonomistów odnosi się do nich z dużym powątpiewaniem, tym bardziej że żadne badania empiryczne ich nie potwierdzają. Dodatkowym argumentem przeciw tego rodzaju założeniom jest fakt, że modele prognostyczne z oczekiwaniami racjonalnymi dają często gorsze prognozy niż modele z oczekiwaniami adaptacyjnymi, zob. na przykład [6].

THE GROWTH MODEL OF A SMALL ECONOMY IN A MONETARY UNION. NEOCLASICAL APPROACH

Summary

The paper presents a simple mathematical growth model of a small economy in the European Monetary Union. However, after a few modifications it could describe any economy in any monetary union. The fundamental assumptions are perfect capital mobility resulting in equal interest rates across monetary union, and perfect mobility of commodities leading to price level convergence. The model is based on standard neoclassical assumptions, i.e. output is determined by the Cobb-Douglas function with Harrod-neutral technical progress and constant returns to scale, capital and labor receive their marginal productivities, etc.

Mathematical analysis of the model leads to several conlusions. First, stationary state exists where output and capital grow at the natural rate. Moreover, it is globally stable only if the real interest rate does not exceed certain level determined by exogenous characteristics of the economy. We also mathematically examine qualitative characteristics of the stationary state and illustrate them in numerical simulations. We describe the so-called golden rule of accumulation, which states that the optimal savings rate of the economy critically depends on the relation between the real interest rate and the natural growth rate. Finally, we analyze transitory dynamics of the model.