SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH SYMBOLI MATEMATYCZNYCH 5

WSTĘP 9

CZĘŚĆ 1. TEORIA POPYTU KONSUMENTA

(Roman Kiedrowski, Michał Konopczyński)

ROZDZIAŁ 1. POLE PREFERENCJI KONSUMENTA 11

1.1. Przestrzeń towarów 11

1.2. Relacja preferencji konsumenta 16

1.3. Optymalny koszyk towarów i warunki jego istnienia 21

1.4. Zadania 29

ROZDZIAŁ 2. FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI 31

2.1. Funkcja użyteczności jako liczbowa charakterystyka relacji preferencji konsumenta 31

2.2. Warunki istnienia i własności funkcji użyteczności 33

2.3. Użyteczności krańcowe towarów i prawo Gossena 37

2.4. Krańcowa stopa substytucji i elastyczność substytucji towarów 45

2.5. Zadania 53

ROZDZIAŁ 3. FUNKCJA POPYTU KONSUMENTA 57

3.1. Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji 57

3.2. Funkcja popytu konsumenta i jej własności 68

3.3. Funkcja kompensacyjnego popytu 89

3.4. Równanie Słuckiego – substytucyjne i dochodowe efekty zmiany ceny 95

3.5. Zadania 101

CZĘŚĆ 2. TEORIA PRODUKCJI

(Roman Kiedrowski, Krzysztof Malaga)

ROZDZIAŁ 4. PRZESTRZENIE PRODUKCYJNE I FUNKCJE PRODUKCJI 105

4.1. Przestrzenie produkcyjne i przekształcenia technologiczne 105

4.2. Funkcja produkcji 108

4.3. Podstawowe funkcje produkcji i ich własności 115

4.4. Zadania 137

ROZDZIAŁ 5. NEOKLASYCZNA TEORIA PRZEDSIĘBIORSTWA 143

5.1. Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej – strategia długookresowa 144

5.2. Przedsiębiorstwo w warunkach konkurencji doskonałej - strategia krótkookresowa 164

5.3. Przedsiębiorstwo w warunkach monopolu 179

5.4. Zadania 190

CZĘŚĆ 3. TEORIA RÓWNOWAGI OGÓLNEJ

(Roman Kiedrowski, Michał Konopczyński, Piotr Maćkowiak, Krzysztof Malaga)

ROZDZIAŁ 6. STATYCZNE MODELE RÓWNOWAGI 197

6.1. Prosty model wymiany 197

6.2. Model Arrowa-Hurwicza 203

6.3. Model Arrowa-Debreu-McKenziego 220

6.4. Zadania 238

ROZDZIAŁ 7. STABILNOŚĆ RÓWNOWAGI W MODELACH DYNAMICZNYCH . 241

7.1. Dynamiczny model Arrowa-Hurwicza 241

7.2. Dynamiczny model Arrowa-Debreu-McKenziego 267

7.3. Zadania 274

ROZWIĄZANIA NIEKTÓRYCH ZADAŃ 277

BIBLIOGRAFIA 287

Wykaz ważniejszych symboli matematycznych

$x \in A$ - element x należy do zbioru A

$x \notin A$ - element x nie należy do zbioru A

$\{x \mid P\}$ - zbiór elementów x mających własność P

$\{x^1,...,x^n\}$ - zbiór złożony z elementów $x^1,...,x^n$

$A \subset B$ - zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B

$A \subseteq B$ - zbiór A jest podzbiorem właściwym zbioru B lub $A = B$

$A \cup B$ - suma zbiorów A i B

$A \cap B$ - iloczyn zbiorów A i B

$A \setminus B$ - różnica zbiorów A i B

$\forall x \; P(x)$ - dla każdego x spełniony jest warunek $P(x)$

$\exists x \; P(x)$ - istnieje takie x, które spełnia warunek $P(x)$

$\neg P$ - negacja zdania P (nieprawda, że zachodzi P)

$P \wedge Q$ - koniunkcja zdań P i Q (zachodzi równocześnie P i Q)

$P \Rightarrow Q$ - implikacja zdań P i Q (jeżeli zachodzi P, to zachodzi Q)

$P \Leftrightarrow Q$ - równoważność zdań P i Q (P zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi Q)

$P \vee Q$ - alternatywa zdań P i Q (zachodzi P lub Q)

x - skalar (liczba)

$\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ - wektor

$\mathbf{x}^T$ - wektor transponowany

$U_\varepsilon(\mathbf{x})$ - otoczenie wektora $\mathbf{x}$ o promieniu ε

$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ - norma przyporządkowująca wektorowi $\mathbf{x} \in R^n$ maksymalną spośród wartości bezwzględnych jego współrzędnych

$\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ - norma Euklidesa

$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ - odległość Euklidesa pomiędzy wektorami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$

$S^n(r) = \{\mathbf{p} \in R^n \mid \|\mathbf{p}\|_E = r\}$ - powierzchnia kuli n-wymiarowej (sfera) o promieniu r i środku w początku układu współrzędnych

$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ - oznacza, że $x_i \geq y_i$, $i=1,...,n$

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ - oznacza, że $x_i > y_i$, $i=1,...,n$

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ - oznacza, że $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ - „koszyk **x** jest lepszy od koszyka **y** (silnie preferowany nad koszyk **y**)"

$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ - „koszyki **x** i **y** są jednakowo dobre (indyferentne)"

$\mathbf{x} \precsim \mathbf{y}$ - „koszyk **x** jest nie gorszy od koszyka **y** (preferowany nad koszyk **y**)"

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - iloczyn wektorów $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$

R^n - przestrzeń wektorowa n-wymiarowa

$R_+^n = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ - nieujemny orthant przestrzeni R^n

$\operatorname{int} R_+^n = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$ - wnętrze przestrzeni R_+^n

X - macierz

X^T - macierz transponowana

$|X| = \det X$ - wyznacznik macierzy X

X^{-1} - macierz odwrotna do kwadratowej macierzy X

$f: A \to B$ - odwzorowanie f z A do B

$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ - pochodna funkcji $f: R^1 \to R^1$ w punkcie x

$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$ - wartość pochodnej funkcji $f: R^1 \to R^1$ w punkcie $\bar{x}$

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ - pochodna cząstkowa funkcji $f: R^n \to R^1$ $(i = 1,...,n)$

$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$ - druga pochodna cząstkowa funkcji $f: R^n \to R^1$ $(i, j = 1,...,n)$

$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)$ - gradient funkcji n-zmiennych $f : R^n \to R^1$ w punkcie $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$

$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}}$ - wektor wartości gradientu funkcji $f : R^n \to R^1$ w punkcie $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$

$H(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$ - hesjan funkcji $f : R^n \to R^1$

$\int f(x)dx$ - całka nieoznaczona funkcji $f : R^1 \to R^1$

$\lim_{x \to a} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$ w punkcie a

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$, gdy x zmierza do a z prawej strony (granica prawostronna funkcji f w punkcie a)

$\lim_{x \to a^-} f(x)$ - granica funkcji $f : R^1 \to R^1$, gdy x zmierza do a z lewej strony (granica lewostronna funkcji f w punkcie a)

$\max_{x \in A} f(x)$ - maksymalna wartość funkcji f na zbiorze A

$\arg\max_{x \in A} f(x)$ - argument, dla którego funkcja f osiąga maksymalną wartość na zbiorze A

Wstęp

Praca stanowi materiał pomocniczy do przedmiotu „Ekonomia matematyczna" wykładanego aktualnie w Akademii Ekonomicznej w Poznaniu na III roku studiów dziennych i wieczorowych oraz na II roku studiów uzupełniających magisterskich. Nawiązuje do treści podręcznika „*Elementy ekonomii matematycznej*", t. I: „*Statyka*" (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993, oraz t. II: „*Równowaga i wzrost*" (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997), a także do fragmentów obszernego podręcznika „*Ekonomia matematyczna*", jaki ukazał się w roku 2000 nakładem Wydawnictwa Akademii Ekonomicznej w Poznaniu.

Celem pracy jest przedstawienie studentom w przystępnej formie problematyki będącej przedmiotem wspomnianych podręczników. Opracowanie, poprzez zawarte w nim liczne przykłady, ilustracje geometryczne i wyniki symulacji komputerowych, ma ułatwić samodzielne studiowanie przedmiotu, co jest szczególnie ważne w przypadku studentów zaocznych. Ważną cechą opracowania są zamieszczone w nim liczne zadania. Rozwijana na ćwiczeniach i w ramach prac domowych studentów umiejętność ich rozwiązywania jest ważnym elementem aktywnej nauki przedmiotu.

Praca, zgodna z programem nauczania „Ekonomii matematycznej", składa się z trzech części. Pierwsza część poświęcona jest teorii popytu konsumenta i obejmuje zagadnienia związane z relacją preferencji konsumenta, funkcją użyteczności i funkcją popytu. Druga część dotyczy teorii produkcji. Rozpoczyna ją przegląd podstawowych informacji o przestrzeniach produkcyjnych i przykładowych funkcjach produkcji. Następnie prezentowana jest neoklasyczna teoria przedsiębiorstwa w przypadku doskonałej konkurencji i monopolu. Omawiane są optymalne strategie przedsiębiorstwa w długim i krótkim horyzoncie czasowym.

Przedmiotem ostatniej, trzeciej części jest teoria równowagi ogólnej. Rozpoczyna ją prezentacja dwóch modeli wymiany, których założenia i konstrukcja związane są ściśle z teorią popytu konsumenta z części pierwszej. Uogólnieniem tych modeli jest model równowagi ogólnej Arrowa-Debreu-McKenziego. Jest on zwornikiem spinającym w jedną spójną konstrukcję całość wcześniej omówionego materiału, dotyczącego zarówno teorii popytu, jak i teorii produkcji.

W ramach trzeciej części, oprócz zagadnień związanych z istnieniem, jednoznacznością i własnościami stanów równowagi ogólnej, rozpatruje się także problematykę stabilności systemów ekonomicznych, czyli ich zdolności do osiągania stanów równowagi. W tym celu prezentowane są dwa modele dynamiczne i otrzymane na ich podstawie wyniki komputerowej analizy stabilności.

Emil Panek