Paweł KLIBER

O DYNAMICE I ROZKŁADACH STRUKTURY PORTFELA WIELU AKCJI[1]

1. Model

Rozważmy portfel złożony z d rodzajów akcji. Przez $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ oznaczmy oczekiwane stopy zwrotu kolejnych akcji, a przez $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d$ – odchylenia standardowe stóp zwrotu (czyli miary ryzyka akcji). Niech ρ_{ij} oznacza korelację między stopami zwrotu akcji i oraz j.

Przez $S_1(t), S_2(t), \ldots, S_d(t)$ oznaczmy ceny poszczególnych akcji w momencie t. Ceny akcji mogą się zmieniać w każdym momencie. Zakładamy, że cena akcji i rośnie według trendu wykładniczego (o stopie wzrostu μ_i). Drugim czynnikiem wpływającym na ceny są niezależne odchylenia losowe. Postulujemy, że działają one w sposób multiplikatywny.

Przy takich założeniach cena pojedynczej akcji jest opisana procesem losowym nazywanym **geometrycznym ruchem Browna.** Proces ten został po raz pierwszy użyty do modelowania cen papierów wartościowych przez Osborne'a i Samuelsona (patrz [5] i [10]). Od tego czasu był standardowo używany jako model procesu cen akcji. Także model Blacka-Scholesa wyceny opcji jest zbudowany przy tym założeniu[2].

Przy przyjętych założeniach dynamikę cen opisują następujące stochastyczne równania różniczkowe (zob. [12]):

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + S_i(t) \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik} dW_k(t), \qquad i = 1, \ldots, d, \tag{1}$$

[1] Artykuł ten jest rozszerzeniem pracy złożonej w Przeglądzie Statystycznym. Otrzymane tam wyniki obejmowały przypadek portfela złożonego jedynie z dwóch akcji. To opracowanie zawiera uogólnienie na przypadek wielu akcji. Dodatkowo uściślone zostały wyniki, dotyczące zachowania asymptotycznego udziałów akcji w portfelu.

[2] Zobacz [2]. Szerszą dyskusję na temat założeń dotyczących modelowania ruchów akcji oraz wyprowadzenie z tych założeń wzorów (1) można znaleźć w: [5], [10], [11] i [13]. Ostatnia pozycja zawiera również przykłady innych modeli, opisujących ruchy akcji.

gdzie μ_i, σ_{ik} są stałymi, a W_k $(k=1,\ldots,d)$ to d niezależnych procesów Wienera. Równanie (1) oznacza, że proces ceny akcji i jest opisany geometrycznym ruchem Browna ze współczynnikiem trendu μ_i oraz parametrem ryzyka równym

$$\sigma_i=\sqrt{\sum_{k=1}^{d}\sigma_{ik}^2}. \tag{2}$$

Korelacja stóp zwrotu akcji i oraz j wynosi

$$\rho_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{d}\sigma_{ik}\sigma_{jk}}{\sigma_i\sigma_j}. \tag{3}$$

Na mocy (1) ceny akcji w chwili t można wyrazić wzorem:

$$S_i(t)=S_i(0)\exp\left[\left(\mu_i-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)t+\sum_{k=1}^{d}\sigma_{ik}W_k(t)\right], \qquad i=1,\ldots,d. \tag{4}$$

Liczbę akcji w portfelu oznaczmy przez $n_1, n_2, \ldots, n_d$. Zatem $n_iS_i(t)$ oznacza wartość akcji i w portfelu, a $S(t)=n_1S_1(t)+\ldots+n_dS_d(t)$ jest wartością całego portfela w chwili t. Dynamikę wielkości n_iS_i opisują równania:

$$d(n_iS_i)(t)=\mu_in_iS_i(t)dt+n_iS_i(t)\sum_{k=1}^{d}\sigma_{ik}dW_k(t), \qquad i=1,\ldots,d, \tag{5}$$

a dynamika zmiennej $S(t)$ dana jest równaniem

$$dS(t)=\sum_{i=1}^{d}\mu_in_iS_i(t)dt+\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{i=1}^{d}\sigma_{ik}n_iS_i(t)\right)dW_k(t). \tag{6}$$

Wartości przeciętne procesów n_iS_i wynoszą:

$$E[n_iS_i]=n_iS_i(0)e^{\mu_it}, \qquad i=1,\ldots,d, \tag{7}$$

natomiast funkcje wariancji $V_i(t)$ oraz funkcje kowariancji $K_{ij}(t)$ $(i,j=1,\ldots,d)$ tych procesów wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} V_i(t)&=n_i^2S_i^2(0)e^{2\mu_it}(e^{\sigma_i^2t}-1),\\ K_{ij}(t)&=n_in_jS_i(0)S_j(0)e^{(\mu_i+\mu_j)t}(e^{\rho_{ij}\sigma_i\sigma_jt}-1). \end{aligned} \tag{8}$$

Warto zaznaczyć, że mimo iż cena każdego rodzaju akcji w portfelu jest opisana za pomocą procesu stochastycznego typu geometrycznego ruchu Browna, to wartość całego portfela już nie jest opisana tym procesem. Jest to zresztą intuicyjnie jasne. Geometryczny ruch Browna jest stochastycznym odpowiednikiem funkcji wykładniczej $e^{\alpha t}$. Suma kilku takich funkcji o różnych stopach wzrostu nie jest już funkcją wykładniczą. Dlatego niezbędne jest zbadanie dynamiki wartości całego portfela – wyraża się ona pewnym niestandardowym procesem stochastycznym.

Pewne własności procesu opisującego wartość portfela można wyprowadzić ze wzorów (7) i (8). Na ich podstawie możemy wyprowadzić funkcje wartości przeciętnej i wariancji portfela:

$$E[S(t)] = \sum_{i=1}^{d} m_i(t) = \sum_{i=1}^{d} n_i S_i(0) e^{\mu_i t}, \tag{9}$$

$$\mathrm{Var}[S(t)] = \sum_{i=1}^{d} V_i(t) + 2 \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=i+1}^{d} K_{ij}(t). \tag{10}$$

Wzory (9) i (10) podają podstawowe charakterystyki procesu stochastycznego, opisującego wartość portfela. Spróbujemy jednak dowiedzieć się czegoś więcej o tym procesie. W szczególności interesuje nas zachowanie się udziałów wartości poszczególnych akcji w ogólnej wartości portfela.

2. Rozkład udziałów wartości akcji w portfelu akcyjnym

Przez $p_i(t)$ oznaczmy udział wartościowy akcji i w portfelu w chwili t:

$$p_i(t) = \frac{n_i S_i(t)}{S(t)}, \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{11}$$

Interesuje nas łączny rozkład zmiennych $p_i(t)$ w dowolnej chwili $t > 0$, a także asymptotyczne zachowanie się tych wielkości.

Zajmijmy się najpierw rozkładem $p_i(t)$. Z definicji zmiennych $p_i(t)$ wynika, że $p_d(t) = 1 - p_1(t) - \ldots - p_{d-1}(t)$, a zatem wystarczy, jeśli dla każdego momentu $t > 0$ wyznaczymy łączny rozkład zmiennych $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_{d-1}(t)$. Ustalmy moment $t > 0$ i określmy d-wymiarową zmienną losową $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$, gdzie $X_i = n_i S_i(t)$. Na podstawie równania (1) łatwo można otrzymać łączną funkcję gęstości zmiennej $\mathbf{X}$:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (x_1 \cdot \ldots \cdot x_d)^{-1}(2\pi)^{-\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Omega} t|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2t}(\ln \mathbf{x} - \mathbf{m})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\ln \mathbf{x} - \mathbf{m}) \right], \quad (12)$$

gdzie $\mathbf{m}$ jest wektorem o współrzędnych

$$m_i = \ln(n_i S_i(0)) + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t, \qquad i = 1, \ldots, d, \quad (13)$$

a macierz $\boldsymbol{\Omega}$ to macierz wariancji–kowariancji chwilowych stóp zwrotu akcji. Na przekątnej macierzy $\boldsymbol{\Omega}$ znajdują się wyrazy σ_i, a poza przekątną – kowariancje ρ_{ij} dane równaniem (3). Zapis $\ln \mathbf{x}$ oznacza wektor $(\ln x_1, \ln x_2, \ldots, \ln x_d)$.

Zdefiniujmy procesy stochastyczne $Z_1, \ldots, Z_{d-1}$ w następujący sposób:

$$Z_i(t) = \ln \frac{n_i S_i(t)}{n_d S_d(t)} = \ln n_i S_i(t) - \ln n_d S_d(t), \qquad i = 1, \ldots, d-1. \quad (14)$$

Stosując wielowymiarową wersję lematu Itô, można wyznaczyć stochastyczne równania różniczkowe opisujące dynamikę procesów $Z_i(t)$. Mamy mianowicie

$$dZ_i = \frac{\partial Z_i}{\partial S_i} dS_i + \frac{\partial Z_i}{\partial S_d} dS_d + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial S_i^2} d(S_i^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial S_d^2} d(S_d^2) + \frac{\partial^2 Z}{\partial S_i \partial S_d} d(S_i S_d)$$

(dla skrócenia zapisu pominięto indeks czasowy t). Obliczając odpowiednie pochodne na podstawie równań (13) i korzystając z równań dynamiki zmiennych S_i podanych w (1) otrzymujemy ostatecznie, że

$$dZ_i(t) = \left[\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) - \left(\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2} \right) \right] dt + \sum_{k=1}^{d} (\sigma_{ik} - \sigma_{dk}) dW_k(t), \qquad i = 1, \ldots, d-1. \quad (15)$$

Oznacza to, że każdy z procesów $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{d-1}$ jest arytmetycznym ruchem Browna. Rozwiązując równanie (14), otrzymujemy

$$Z_i(t) = \left[\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) - \left(\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2} \right) \right] t + \sum_{k=1}^{d} (\sigma_{ik} - \sigma_{dk}) W_k(t), \qquad i = 1, \ldots, d-1. \quad (16)$$

Oznaczmy

$$\tilde{m}_i(t) = \ln \frac{n_i S_i(0)}{n_d S_d(0)} + \left[\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) - \left(\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2} \right) \right] t. \quad (17)$$

Ponieważ

$$p_i(0)=\frac{n_i S_i(0)}{\sum_j n_j S_j(0)},$$

a zatem $\tilde{m}_i(t)$ możemy inaczej zapisać jako

$$\tilde{m}_i(t)=\left(\ln p_i(0)+\left(\mu_i-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)t\right)-\left(\ln p_d(0)+\left(\mu_d-\frac{\sigma_d^2}{2}\right)t\right). \tag{18}$$

Niech $\tilde{\mathbf{m}}(t)$ będzie wektorem $\tilde{\mathbf{m}}(t)=(\tilde{m}_1(t),\ldots,\tilde{m}_{d-1}(t))$, a $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ macierzą wymiaru $(d-1)\times(d-1)$, złożoną z elementów $\tilde{\sigma}_{ij}$ $(i,j=1,\ldots,d-1)$, gdzie

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sum_{k=1}^{d}(\sigma_{ik}-\sigma_{dk})(\sigma_{jk}-\sigma_{dk}). \tag{19}$$

Zauważmy, że korzystając ze wzorów (2) i (3) elementy macierzy $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ można wyrazić wzorem:

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\sigma_d^2+\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}-\sigma_i\sigma_d\rho_{id}-\sigma_j\sigma_d\rho_{jd}. \tag{20}$$

Zgodnie z równaniem (16) dla dowolnego ustalonego momentu $t>0$ łączny rozkład zmiennej $\mathbf{Z}=(Z_1(t),\ldots,Z_{d-1}(t))$ jest rozkładem normalnym o wektorze średnich $\tilde{\mathbf{m}}(t)$ i macierzy kowariancji $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}t$, tzn. gęstość rozkładu zmiennej $\mathbf{Z}$ ma postać

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})=(2\pi)^{-\frac{d-1}{2}}|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}t|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2t}(\mathbf{z}-\tilde{\mathbf{m}}(t))^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}(\mathbf{z}-\tilde{\mathbf{m}}(t))\right]. \tag{21}$$

Na podstawie definicji (14) procesów $Z_1(t),\ldots,Z_{d-1}(t)$ mamy

$$Z_i(t)=\ln\frac{p_i(t)}{p_d(t)}=\ln p_i(t)-\ln(1-p_1(t)-\ldots-p_{d-1}(t)),\qquad i=1,\ldots,d-1, \tag{22}$$

a zatem dla każdego ustalonego $t>0$ zmienne $p_1(t),\ldots,p_{d-1}(t)$ zależą funkcyjnie od zmiennych $Z_1(t),\ldots,Z_{d-1}(t)$. Posługując się wzorem na gęstość funkcji zmiennych losowych (zob. [1], s. 259) można wyznaczyć łączny rozkład zmiennych $p_1(t),\ldots,p_{d-1}(t)$:

$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') = \left| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}'} \right| f_{\mathbf{Z}}(h(\mathbf{p}')), \tag{23}$$

gdzie $\mathbf{p}' = (p_1(t), \ldots, p_{d-1}(t))$, $f_{\mathbf{Z}}$ to funkcja gęstości podana w (21), a $h(\mathbf{p}')$ to przekształcenie opisujące zależność zmiennych $Z_1(t), \ldots, Z_{d-1}(t)$ od zmiennych $p_1(t), \ldots, p_{d-1}(t)$, tj. przekształcenie dane wzorami (22). Wielkość $\partial h / \partial \mathbf{p}'$ oznacza jakobian przekształcenia h. Obliczając kolejne pochodne cząstkowe funkcji (22), otrzymujemy następującą postać macierzy Jakobiego:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_d} & \frac{1}{p_d} & \cdots & \frac{1}{p_d} \\ \frac{1}{p_d} & \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_d} & \cdots & \frac{1}{p_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{p_d} & \frac{1}{p_d} & \cdots & \frac{1}{p_{d-1}} + \frac{1}{p_d} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

gdzie przez p_d oznaczamy $1 - p_1 - \ldots - p_{d-1}$. Wyznacznik macierzy wynosi zatem

$$\left| \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}'} \right| = \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_d}. \tag{25}$$

Podstawiając otrzymany wyznacznik do (23) i wykorzystując wzory (22), otrzymujemy ostatecznie gęstość rozkładu udziałów akcji w portfelu w chwili t:

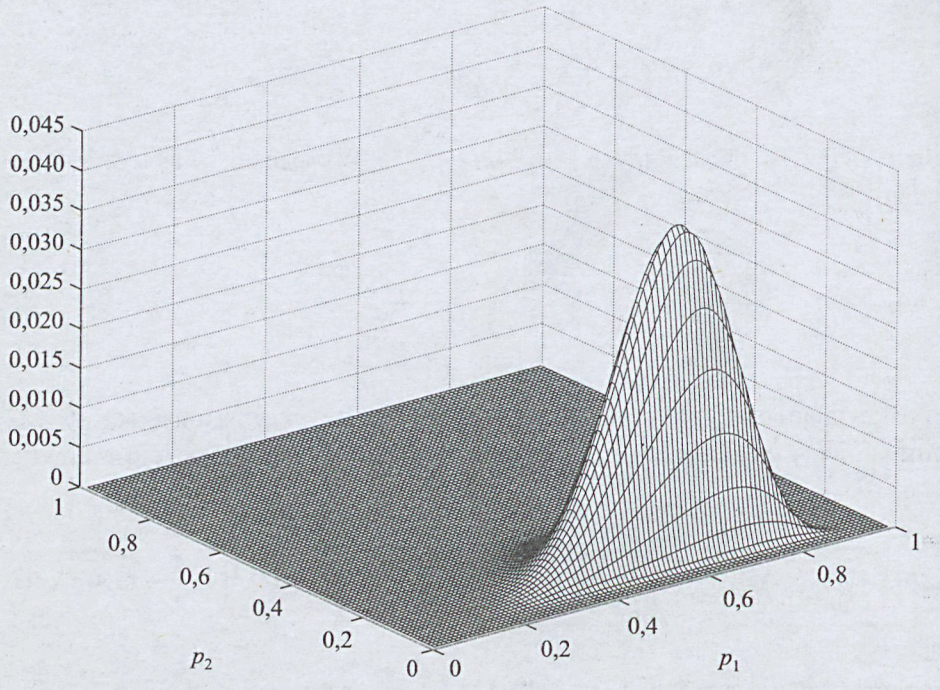
$$f_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{\frac{d-1}{2}} |\tilde{\Omega} t|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_d} \exp\left[-\frac{1}{2t} \left(\ln \frac{\mathbf{p}}{p_d} - \tilde{\mathbf{m}}(t) \right)^{\mathrm{T}} \tilde{\Omega}^{-1} \left(\ln \frac{\mathbf{p}}{p_d} - \tilde{\mathbf{m}}(t) \right) \right], \tag{26}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{m}}(t)$ dane jest równaniem (18), $\tilde{\Omega}$ to macierz złożona z elementów danych równaniem (20), a zapis $\ln(\mathbf{p}/p_d)$ oznacza $(d-1)$-wymiarowy wektor:

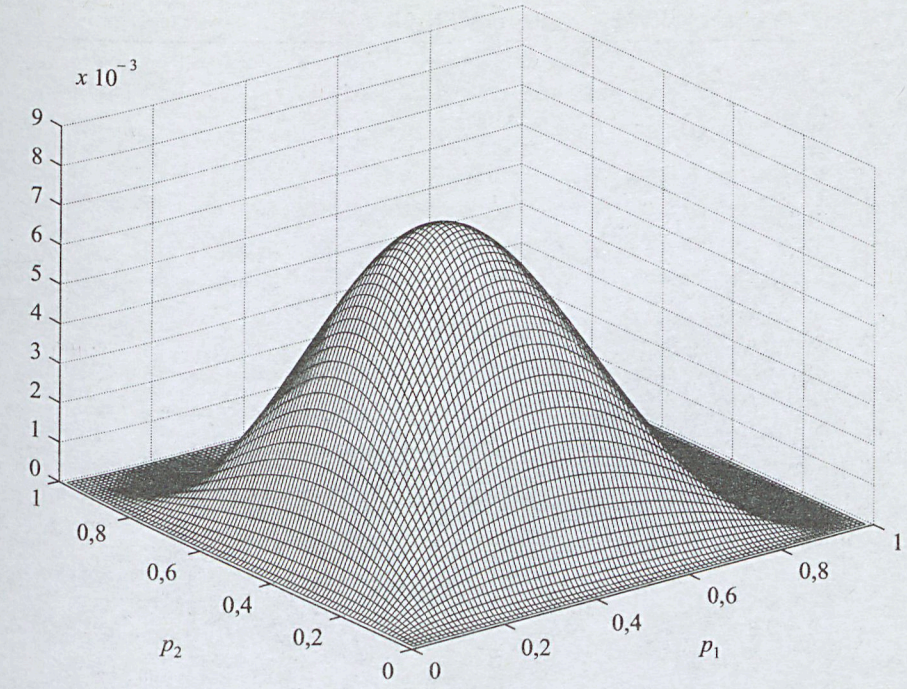
$$\ln \frac{\mathbf{p}}{p_d} = \left(\ln \frac{p_1}{p_d}, \ln \frac{p_2}{p_d}, \ldots, \ln \frac{p_{d-1}}{p_d} \right). \tag{27}$$

Wzór (26) określa gęstość prawdopodobieństwa na $(d-1)$-wymiarowym sympleksie jednostkowym. Jest to łączna gęstość rozkładu udziałów wartościowych poszczególnych akcji w portfelu w chwili t.

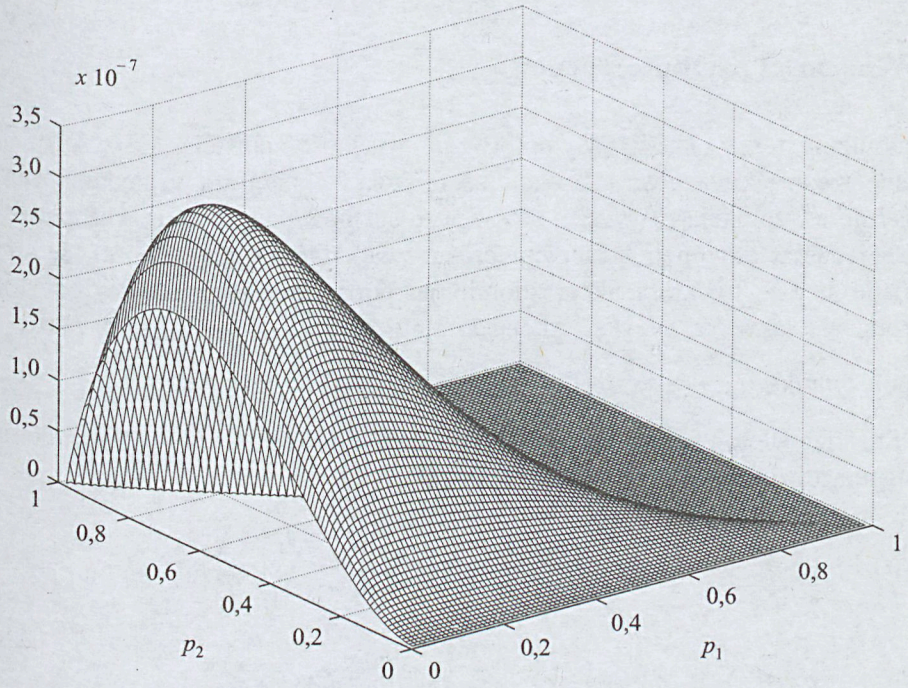
Rysunki 1-3 przedstawiają funkcję gęstości udziałów portfela złożonego z trzech akcji dla przykładowych parametrów opisujących ceny akcji i dla różnych momentów czasu. Przyjęto, że oczekiwane stopy zwrotu akcji wynoszą $\mu_1 = 0{,}1$, $\mu_2 = 0{,}3$ i $\mu_3 = 0{,}2$. Wariancje stóp zwrotu akcji wynoszą odpowiednio $\sigma_1^2 = 0{,}2$, $\sigma_2^2 = 0{,}2$ i $\sigma_3^2 = 0{,}1$, a korelacje stóp zwrotu akcji wynoszą $\rho_{12} = 0{,}5$, $\rho_{13} = -0{,}7$, $\rho_{23} = -0{,}2$. Początkowe udziały akcji w portfelu wynoszą $p_1(0) = 0{,}7$, $p_2(0) = 0{,}1$, $p_3(0) = 0{,}2$.



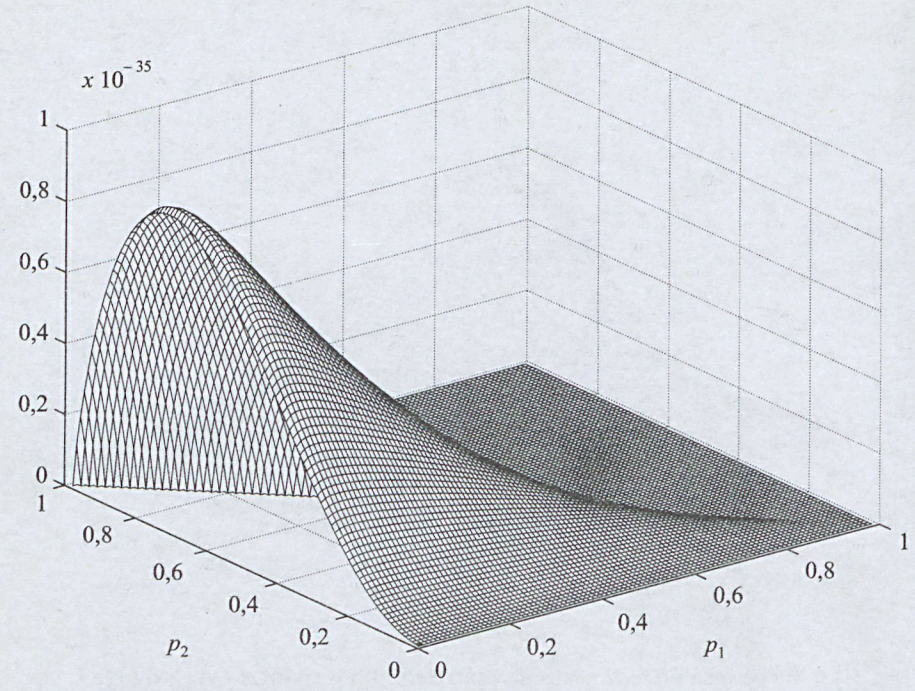
Rys. 1. Gęstość udziałów akcji w portfelu dla przykładowych danych. Moment $t = 1$



Rys. 2. Gęstość udziałów akcji w portfelu dla przykładowych danych. Moment $t = 10$



Rys. 3. Gęstość udziałów akcji w portfelu dla przykładowych danych. Moment $t = 100$



Rys. 4. Gęstość udziałów akcji w portfelu dla przykładowych danych. Moment $t = 700$

3. Własności asymptotyczne

Spróbujemy teraz określić asymptotyczne własności portfela. Ze wzoru (7) wynika, że oczekiwana wartość akcji jest funkcją wykładniczą względem czasu. Sugeruje to, że akcja o wyższej stopie wzrostu powinna zdominować portfel, tzn. jej udział powinien z biegiem czasu zwiększać się do jedności. Jednak okazuje się, że to, która akcja zdominuje, portfel zależy nie tylko od stóp zwrotu, ale także od ryzyka. Akcją dominującą jest ta, o większej wartości współczynnika $\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}$.

Stosując wielowymiarową wersję lematu Itô do równania (11) otrzymujemy następujące równanie dynamiki zmiennych p_i:

$$dp_i(t) = p_i(t)\left[\mu_i - \sum_{l=1}^{d} \mu_l p_l(t) + \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=1}^{d} p_l(t)\sigma_{lk}\right)^2 - \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=1}^{d} p_l(t)\sigma_{lk}\sigma_{ik}\right)\right]dt + \\ + p_i(t)\left[\sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik} dW_k(t) - \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{l=1}^{d} p_l(t)\sigma_{lk}\right) dW_k(t)\right]. \tag{28}$$

Rozważmy dwie akcje o indeksach i oraz j $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$. Załóżmy, że

$$\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} > \mu_j - \frac{\sigma_j^2}{2}. \tag{29}$$

Zdefiniujmy proces Z jako $Z(t) = \ln \frac{p_i(t)}{p_j(t)}$. Korzystając jeszcze raz z wielowymiarowego lematu Itô oraz z równania (28), otrzymujemy dynamikę zmiennej Z:

$$dZ(t) = \left[\left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \right) - \left(\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \right) \right] dt + \sum_{k=1}^{d} (\sigma_{ik} - \sigma_{jk}) dW_k(t). \tag{30}$$

Niech proces W będzie określony następującym równaniem:

$$W(t) = \frac{\sum_{k=1}^{d} (\sigma_{ik} - \sigma_{jk}) W_k(t)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{d} (\sigma_{ik} - \sigma_{jk})^2}}. \tag{31}$$

Wykażemy, że proces W jest standardowym procesem Wienera. Jak łatwo sprawdzić, proces $W(t)$ jest ciągłym martyngałem (jako suma d ciągłych martyngałów). Dynamika procesu W^2 dana jest następującym równaniem, które otrzymujemy stosując lemat Itô do funkcji kwadratowej i procesu $W(t)$:

$$d(W^2)(t) = \frac{\partial (W^2)}{\partial W} dW(t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 (W^2)}{\partial W^2} dt = 2W(t)\, dW(t) + dt, \tag{32}$$

co oznacza, że proces $W^2(t) - t$ także jest martyngałem. Z twierdzenia Lévy'ego wynika, że W jest standardowym procesem Wienera[3]. Oznacza to, że dynamikę zmiennej Z można zapisać za pomocą równania

$$dZ(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t), \tag{33}$$

gdzie

$$\mu = \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \right) - \left(\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 \right) \tag{34}$$

[3] Twierdzenie Lévy'ego mówi, że jeśli X jest ciągłym martyngałem, $X(0) = 0$ oraz $X^2(t) - t$ także jest martyngałem, to X jest standardowym procesem Wienera. Zobacz [8], pkt I.2.

oraz

$$\sigma=\sqrt{\sum_{k=1}^{d}(\sigma_{ik}-\sigma_{jk})^2}. \tag{35}$$

Z równania (33) wynika, że proces Z jest arytmetycznym ruchem Browna o parametrze trendu μ i parametrze dyfuzji σ. Zmienna $Z(t)$ ma więc dla każdego momentu $t>0$ rozkład normalny o średniej μt i wariancji $\sigma^2 t$.

Ustalmy moment $t>0$. Zdefiniujemy zmienną $Y(t)$, oznaczającą stosunek wartości akcji i do wartości akcji j:

$$Y(t)=\frac{n_i S_i(t)}{n_j S_j(t)}=\frac{n_i S_i(t)}{S(t)}:\frac{n_j S_j(t)}{S(t)}=\frac{p_i(t)}{p_j(t)}. \tag{36}$$

Zgodnie z definicją procesu Z równanie (36) można też zapisać jako

$$Y(t)=e^{Z(t)}. \tag{37}$$

Zmienna losowa $Y(t)$ jest więc wartością funkcji wypukłej zmiennej losowej $Z(t)$. Na podstawie nierówności Jensena (patrz [3], t. 2, s. 147) wnioskujemy, że

$$E[Y(t)]\geqslant e^{E[Z(t)]}. \tag{38}$$

Zmienna $Z(t)$ opisana równaniem (33) ma rozkład normalny $N(\mu t, \sigma^2 t)$, gdzie μ i σ są dane wzorami (34) i (35). Z założenia (29), $\mu>0$, czyli

$$\lim_{t\to\infty} E[Z(t)]=\lim_{t\to\infty}\mu t=+\infty,$$

stąd

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(t)]=+\infty. \tag{39}$$

Wzór (39) mówi, że wartość oczekiwana stosunku wartości akcji zwiększa się do nieskończoności, a więc akcja pierwsza zdominuje portfel. Potwierdzają to wyniki symulacji Monte-Carlo (patrz [6]).

Co więcej, z równania (33) wynika, że zmienna $Z(t)$ dąży prawie na pewno do $+\infty$, gdy t dąży do $+\infty$. Istotnie, zgodnie z prawem iterowanego logarytmu dla procesu Wienera (zob. [8], s. 31) zachodzi

$$P\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{W(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right)=1.$$

Korzystając z tego, że $-W$ także jest procesem Wienera oraz z tożsamości $\liminf x_t = -\limsup(-x_t)$, otrzymujemy:

$$-1 = \liminf_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{2t \ln\ln t} < \limsup_{t\to+\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1, \quad \text{prawie na pewno.}$$

Zatem dla dostatecznie dużego t_0 zachodzi

$$|W(t)| \leqslant \sqrt{2t \ln\ln t} + \varepsilon \quad \text{z prawdopodobieństwem 1 dla każdego } t > t_0$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Wnioskujemy stąd, że dla dużych t:

$$Z(t) = \mu t + \sigma W(t) \geqslant \mu t - \sigma\sqrt{2t \ln\ln t} - \varepsilon, \quad \text{prawie na pewno,}$$

czyli

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} Z(t) = +\infty\right) = 1. \tag{40}$$

Proces $Z(t)$ dąży zatem prawie na pewno do $+\infty$. Ponieważ $Z(t) = \ln\frac{p_i(t)}{p_j(t)}$ i zmienna $p_i(t)$ jest ograniczona, zatem

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} p_j(t) = 0\right) = 1. \tag{41}$$

Załóżmy, że akcje są ponumerowane według malejącej wartości współczynnika $\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}$, tj. $\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} > \mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} > \ldots > \mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2}$. Powtarzając poprzednie rozumowanie dla akcji $i = 1$ oraz dowolnej akcji $j > 1$ otrzymujemy:

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} p_j(t)\right) = 0) = 1 \quad \text{dla każdego } j = 2, \ldots, d. \tag{42}$$

Oznacza to, że

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} p_1(t) = 1\right) = 1. \tag{43}$$

Zatem w długim horyzoncie czasu pierwsza akcja prawie na pewno zdominuje portfel. Inaczej mówiąc, udziały akcji w portfelu $p(t)$ z prawdopodobieństwem 1 dążą do zmiennej $(1, 0, \ldots, 0)$, tj. do stanu, w którym w portfelu występuje tylko akcja pierwsza. Zatem w długim okresie z prawdopodobieństwem 1 cały portfel zdominuje wartościowo akcja o największej wartości parametru $\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}$.

4. Zastosowanie

Wzór (26) może znaleźć zastosowanie w konstrukcji portfela lokat. Standardowe metody konstrukcji portfela (np. Sharpa czy Markovitza) ograniczają się jedynie do inwestycji na jeden okres. Klasyczna analiza portfelowa jest analizą statyczną. Jednak czas ma duże znaczenie w inwestycjach. Kluczowym pojęciem analizy portfelowej jest portfel efektywny, czyli najmniej ryzykowny spośród wszystkich portfeli o tej samej stopie zwrotu. Metody analizy portfelowej pozwalają wyznaczyć strukturę wartościową portfela efektywnego. Jednak na skutek ruchu cen akcji zmieniają się udziały wartościowe jego składników. Skutkiem tego po pewnym czasie struktura wartościowa portfela może się znacznie zmienić. Jeżeli w momencie początkowym inwestor kupił portfel o strukturze portfela efektywnego, to po pewnym czasie, o ile nie dokonał korekty, jego portfel nie jest już efektywny.

Brak dynamiki w standardowych modelach jest efektem przyjęcia dwóch, nierealistycznych założeń. Pierwszym jest założenie o braku kosztów transakcji, a drugim o możliwości kupna lub sprzedaży dużej liczby akcji w krótkim czasie. Przy tych założeniach inwestor może w każdym momencie czasu sprzedać cały poprzedni portfel i kupić nowy (wyznaczony jako efektywny). Jednak w praktyce warunki te nie są spełnione. Dotyczy to zwłaszcza dużych inwestorów, którzy nie mogą w krótkim czasie upłynnić lub nabyć dużej liczby akcji bez drastycznej zmiany cen (i bez płacenia wielkich prowizji). W tym przypadku ważne staje się pytanie o koszty dostosowywanie struktury portfela do portfela efektywnego. Następne dwa przykłady przedstawiają sytuacje, w których istotna jest kwestia zmian udziałów portfela.

Koszt modyfikacji portfela. Inwestor wybrał portfel efektywny dwóch akcji o strukturze $(p', 1-p')$. Inwestycja jest długookresowa. Inwestor postanowił nie korygować struktury portfela częściej niż raz na tydzień, czyli co pięć sesji. Biuro maklerskie pobiera prowizję 2% od wartości każdej transakcji. Jeżeli na skutek zmiany cen akcji struktura portfela zmieni się do $(p, 1-p)$, to – aby przywrócić odpowiednią strukturę – należy zlecić operacje o łącznej wartości $2S|p-p'|$, gdzie S oznacza wartość całego portfela. Koszty modyfikacji portfela wynoszą $K(p)=0{,}04S|p-p'|$. Oczekiwany koszt modyfikacji portfela wynosi:

$$E[K]=0{,}04S\int_0^1 |p-p'|f_p(p)dp$$

złotych tygodniowo. Funkcja f_p w ostatnim wzorze jest dana przez (26) przy $t=5$.

Korekta portfela. Inwestor chce nabyć portfel dwóch akcji, którego oczekiwana stopa zwrotu powinna być równa co najmniej M_0 przy możliwie najmniejszym ryzyku. Ponieważ suma inwestycji jest znaczna, inwestorowi zależy na tym, aby niezbędne korekty portfela były możliwie małe. Zadaniem, które inwestor musi rozwiązać, jest zadanie optymalizacji:

$$\min \alpha \mathbf{PDP}^{\mathrm{T}} + \beta E[(p-p')^2],$$

przy warunkach

$$p'\mu_1 + (1-p')\mu_2 \geqslant M_0, \qquad p' \geqslant 0,$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest wektorem udziałów akcji $\mathbf{P}=(p', 1-p')$, $\mathbf{D}$ – macierzą wariancji i kowariancji stóp zwrotu akcji, M_0 – założoną stopą zwrotu portfela, a α i β są stałymi dodatnimi określającymi, jaką wagę przywiązuję inwestor do ryzyka, a jaką do konieczności korekty portfela.

Wzór (26) podaje gęstość udziałów akcji w portfelu w dowolnym momencie przy znanej strukturze portfela w chwili zerowej. Można zatem z jego pomocą szacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w danej chwili $t>0$ udziały portfela odchylą się od portfela wzorcowego o przyjętą wielkość, a także obliczać wartość oczekiwaną tych odchyleń. Natomiast znajomość granicznych własności udziałów akcji w portfelu, opisanych w punkcie 3, pozwala ustalić, które akcje najbardziej zaburzą strukturę portfela. Zgodnie z otrzymanymi wynikami będą to akcje o najwyższej wartości współczynnika $\mu_i+\sigma_i^2/2$. W dostatecznie długim okresie te akcje zdominują portfel. Oceniając koszty dostosowania portfela, należy w pierwszej kolejności zwrócić uwagę na te właśnie akcje. W następnej kolejności należy zwrócić uwagę na akcję o drugiej najwyższej wartości współczynnika $\mu_i+\sigma_i^2/2$ i tak dalej. Najmniejsze znaczenie dla struktury portfela mają akcje o najmniejszej wartości współczynnika $\mu_i+\sigma_i^2/2$.

Literatura

[1] Billingsley P., *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa 1987
[2] Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 1973, 81, 637-654

[3] Feller W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1978
[4] Jajuga T., Jajuga K., *Jak inwestować w papiery wartościowe*, PWE, Warszawa 1993
[5] Osborne M.F.M., *Brownian Motion in the Stock Market*, Operations Research 1959, 7, 145-173
[6] Piasecki K., Kliber P., *O portfelu procesów losowych*, materiały konferencyjne „Rynek Kapitałowy. Skuteczne inwestowanie" org. przez Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2000
[7] Plucińska A., Plucinski E., *Probabilistyka*, WNT, Warszawa 2000
[8] Rogers L.C.G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, cz. 1: *Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge 2000
[9] Rogers L.C.G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, cz. 2: *Itô calculus*, Cambridge University Press, Cambridge 2000
[10] Samuelson P.A., *Rational Theory of Warrant Pricing*, Industrial Menagement Review 1965, 6, 13-31
[11] Shreve S., *Stochastic Calculus and Finance*, http://www.cs.cmu.edu/~chal/shreve.html, 1997
[12] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT, Warszawa 1996
[13] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998
[14] Williams D., *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge 1991

ON DYNAMICS OF PORTFOLIO STRUCTURE CHANGES AND ON STOCHASTIC PROPERTIES OF THE CHANGES

Summary

In the paper there are considered the dynamics of portfolio of a number of stocks. Correlated geometrical Brownian motion describes the stocks. The structure of the portfolio changes over time. If the investor arrives at optimal structure of the portfolio then from time to time he has to buy or to sell some shares from time to time to have the desired structure. In the paper there probability distributions of the portfolio structure is determined. They are used as a measure of risk of modification of the portfolio structure. Also, there is shown, that in long run one stock dominates the portfolio with probability 1. The dominating stock is that with the highest value of parameter $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$.