Elżbieta Rychłowska-Musiał

OPTYMALNE STRATEGIE ROZWOJU FIRMY W MODELU TYPU LESOURNE'A

Wersja podstawowa modelu przedstawionego w tym artykule została sformułowana przez Lesourne'a [1973]. Później posłużył on do dalszych opracowań takim autorom jak: Van Loon [1983], Van Schijndel [1988], Kort [1989], Van Hilten [1991] i Blok [1996].

1. Sformułowanie modelu

Przyjmujemy, że głównym celem właścicieli firmy (akcjonariuszy), reprezentowanych w firmie przez organ podejmujący decyzje finansowe, jest maksymalizacja wartości firmy rozumianej jako suma dwóch składników: zdyskontowanego strumienia dywidend (spodziewanych w ciągu całego okresu planowania) i zdyskontowanej wartości majątku własnego, jakim dysponuje firma na koniec okresu planowania. Założenie o nadrzędności maksymalizacji wartości firmy, jako jej strategicznego celu, wynika z nadrzędnego celu właścicieli kapitału, jakim jest jego pomnażanie, a co za tym idzie zwiększanie własnego bogactwa.[1]
Stąd postać funkcji celu:

$$\max\left\{\int_0^z D(t)e^{-it}\,dt + X(z)e^{-iz}\right\}, \tag{1}$$

gdzie:

$D(t)$ – wielkość dywidendy w momencie t (strumień)[2],

[1] Por. M. Nowak, *Dynamiczne modele zarządzania finansami w przedsiębiorstwie*, Pret, Warszawa 1995, s.152.

[2] Różnice między wielkościami strumieniowymi a zasobowymi oraz umowność związanej z nimi terminologii opisane zostały szczegółowo w pracy E. Panka, *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania* PWN, Warszawa–Poznań 1989, s. 12.

$X(t)$ – wielkość majątku własnego w momencie t (zasób),
i – stopa dyskontowa (utożsamiana z pożądaną stopą zwrotu, $i > 0$, $i = \text{const}$),
z – ustalony horyzont planowania.

W modelu wyróżnia się dwa sposoby finansowania majątku: przez kapitał własny lub obcy. Otrzymujemy zatem znane równanie bilansowe:

$$K(t) = X(t) + Y(t), \tag{2}$$

gdzie:
$K(t)$ – wielkość majątku firmy w momencie t (zasób),
$Y(t)$ – wielkość długu w momencie t (zasób).

Firma nie może sama udzielać kredytu, zatem:

$$Y(t) \geq 0, \tag{3}$$

Oczywiście, wysokość zaciąganego długu nie jest nieograniczona. Aby firma nie straciła zdolności kredytowej, udział kapitału obcego w majątku własnym firmy nie powinien przekroczyć pewnego progu:

$$Y(t) \leq hX(t), \tag{4}$$

gdzie:
h – wskaźnik maksymalnego udziału zadłużenia w kapitale własnym.

Wskaźnik ten powinien być utrzymany na pewnym racjonalnym poziomie, aby instytucje finansowe (banki) chciały udzielać firmie kredytów. Dla przykładu można podać, że w tzw. „small" biznesie w USA tą graniczną wartością jest $h = 3$, a dla większych firm granica ta jest znacznie ostrzejsza i wynosi $h = 1$.[3]

Jednakże wskaźnik prawidłowy z punktu widzenia instytucji kredytującej nie musi być uznany za wystarczający przez właścicieli firmy (akcjonariuszy) lub organ podejmujący decyzje finansowe. Może to mieć miejsce zwłaszcza w sytuacji, gdy finansowanie działalności kapitałem obcym jest relatywnie tańsze niż finansowanie kapitałem własnym.

Mogą się oni wtedy domagać zwiększenia udziału kapitału obcego w całym majątku firmy, czyli zwiększenia współczynnika h. Z tym zagadnieniem wiąże się pojęcie tak zwanej „dźwigni finansowej", czyli zwiększenia wypracowanego w firmie zysku dzięki umiejętnemu wykorzystaniu kredytowania kapitałem obcym[4].

---

[3] Zob. M. Sierpińska, T. Jachna, *Ocena przedsiębiorstwa wg standardów światowych*, PWN, Warszawa 1994, s. 90.

[4] Zob. W. Dębski, *Zarządzanie finansami*, CIM, Warszawa 1996, t. I, s. 39.

Firma podejmuje decyzje dotyczące wielkości inwestycji. Mogą być one finansowane przez kapitał własny, kredyt oraz amortyzację:

$$I(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) + aK(t), \tag{5}$$

gdzie:

$I(t)$ – wielkość inwestycji w momencie t (strumień),

a – stopa deprecjacji.

Wypracowany w firmie zysk netto, czyli przychody ze sprzedaży pomniejszone o koszty pracy, spłatę zobowiązań, wydatki konieczne na odnowę zużytej części majątku (amortyzację) i należny podatek, jest przeznaczany na wypłatę dywidend i (lub) zwiększanie majątku własnego przez zatrzymanie części zysku.
Można to zapisać następująco:

$$R(K, L) = pQ(K, L) - wL(t) - rY(t) - aK(t) - f\big(pQ(K, L) - wL(t) - rY(t) - aK(t)\big) = \\ = D(t) + \dot{X}(t), \tag{6}$$

gdzie:

$R(K, L)$ – wartość zysku netto,

Q – dwuargumentowa, rosnąca (ze względu na każdą zmienną), wklęsła, funkcja produkcji taka, że:

$$Q(K, 0) = Q(0, L) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} > 0,$$

$L(t)$ – poziom zatrudnienia w momencie t (zasób),

f – stawka podatku,

w – stawka płac,

p – cena jednostkowa,

r – stopa oprocentowania kredytu.

Akumulacja zysku w firmie i przeznaczanie go na powiększanie zasobów jej majątku nie musi oznaczać działania na szkodę akcjonariuszy, gdyż mogą oni liczyć na udział w zwiększonym majątku przedsiębiorstwa w przyszłości (w postaci wyższych dywidend).

Przed sformułowaniem powyższego modelu w postaci zadania sterowania optymalnego, określimy jeszcze jedną interesującą wielkość ekonomiczną, którą wyprowadzić można wprost z równań modelu – nadwyżkę finansową (cash flow). Składa się ona z zysku netto oraz amortyzacji (utożsamianej tu z deprecjacją):

$$CF(K,L,Q) = (1-f)(pQ(K,L) - wL(t) - aK(t) - rY(t)) + aK(t). \quad (7)$$

Z (2), (5), (6) i (7) otrzymujemy znaną w teorii finansów przedsiębiorstw zależność na równość między źródłem uzyskania funduszy, a ich wykorzystaniem:[5]

$$CF(K,L,Q) = I(t) + D(t) - \dot{Y}(t). \quad (8)$$

Równość ta oznacza, że wypracowana w firmie nadwyżka finansowa (cash flow) może być przeznaczona na:

- inwestycje,
- wypłatę dywidend,
- redukcję długu.

Z równości tej, po przekształceniu:

$$CF(K,L,Q) + \dot{Y}(t) = I(t) + D(t), \quad (9)$$

wynika także, iż firma może wykorzystać również inne źródła dla finansowania swojej działalności, w szczególności zaciągając nowe kredyty. Powstaje pytanie: Którą z powyższych polityk i w jakim czasie firma powinna realizować, aby zmaksymalizować wartość funkcji celu? Odpowiedź na nie daje rozwiązanie postawionego zadania.

Podsumowując zależności (1) – (6), otrzymujemy jego matematyczną postać[6]:

$$\max_{I(t),D(t),L(t)} \{ \int_0^z D(t) e^{-it}\, dt + X(z) e^{-iz} \}, \quad (10)$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - aK(t), \quad (11)$$

$$\dot{X}(t) = (1-f)(pQ(K,L) - wL(t) - aK(t) - rY(t)) - D(t), \quad (12)$$

$$K(t) - X(t) \geq 0, \quad (13)$$

$$(1+h)X(t) - K(t) \geq 0, \quad (14)$$

$$D(t) \geq 0, \quad (15)$$

$$X(0) = X_0 > 0, \; K(0) = K_0 > 0. \quad (16)$$

---

[5] Zob. np. W. Dębski, *Zarządzanie finansami*, CIM, Warszawa 1996, t. I s. 28.

[6] Postać modelu jest nieznaczną modyfikacją postaci modelu przedstawionych w pracach: P.M. Kort, *Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm*, Springer-Verlag Berlin 1989, oraz M.W.J. Blok, *Dynamic Models of the Firm*, Springer-Verlag Berlin 1996.

Zmiennymi sterującymi są:
$I(t)$ (*wielkość inwestycji*), $D(t)$ (*wielkość dywidend*) oraz $L(t)$ (*poziom zatrudnienia*).
Zmiennymi stanu są: $X(t)$ (zasób majątku własnego) i $K(t)$ (całkowity zasób majątku).
Zagadnienie postaci (10) – (16) spełnia założenia twierdzeń o warunkach koniecznych i dostatecznych[7].

2. *Sformułowanie warunków*

Utwórzmy dla tego zadania funkcję Lagrange'a:

$$L = D(t) + \lambda_1(t)\big(I(t) - aK(t)\big) + \lambda_2(t)\big((1-f)(pQ(K,L) - wL(t) - aK(t) - rY(t)\big) - D(t) + \\ + \mu(t)D(t) + \nu_1(t)\big(K(t) - X(t)\big) + \nu_2(t)\big((1+h)X(t) - K(t)\big). \tag{18}$$

Optymalną trajektorię rozwoju firmy można zatem wyznaczyć z układu warunków, które są spełnione wszędzie z wyjątkiem ewentualnych punktów nieciągłości wektora sterowań $(I(t), D(t), L(t))$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = (i+a)\lambda_1(t) - (1-f)\Big(p\frac{\partial Q}{\partial K} - (a+r)\Big)\lambda_2(t) - \nu_1(t) + \nu_2(t), \tag{19}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = \big(i - (1-f)r\big)\lambda_2(t) + \nu_1(t) - (1+h)\nu_2(t), \tag{20}$$

$$\lambda_1(t) = 0, \tag{21}$$

$$1 - \lambda_2(t) + \mu(t) = 0, \tag{22}$$

$$p\frac{\partial Q}{\partial L} = w, \tag{23}$$

$$\mu(t) \geq 0 \wedge \mu(t)D(t) = 0, \tag{24}$$

$$\nu_1(t) \geq 0 \wedge \nu_1(t)\big(K(t) - X(t)\big), \tag{25}$$

$$\nu_2(t) \geq 0 \wedge \nu_2(t)\big((1+h)X(t) - K(t)\big), \tag{26}$$

$$\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2, \tag{27}$$

$$\lambda_2(z) = 1 - \gamma_1 + (1+h)\gamma_2\ , \tag{28}$$

$$\gamma_1 \geq 0 \wedge \gamma_1\big(K(z) - X(z)\big) = 0, \tag{29}$$

$$\gamma_2 \geq 0 \wedge \gamma_2\big((1+h)X(z) - K(z)\big) = 0. \tag{30}$$

[7] Zob. np. O. Van Hilten, P.M. Kort, P.J.J.M. Van Loon, *Dynamic policies of the firm. An optimal control approach*, Springer-Verlag, Berlin 1993, ss. 265-266.

Zauważmy, że z warunku (23) wynika, iż w całym horyzoncie planowania optymalnym jest taki poziom zatrudnienia, przy którym stawka płac jest równa wyrażonej wartościowo krańcowej wydajności pracy (zgodnie z neoklasyczną teorią przedsiębiorstwa[8]).

3. *Charakterystyka dopuszczalnych ścieżek*

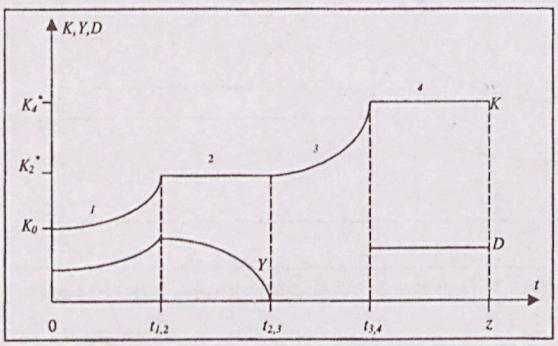
Wszystkich możliwych ścieżek jest w modelu 8 (2^3):

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu(t)$	+	+	+	0	0	0	+	0
$v_1(t)$	0	0	+	+	0	0	+	+
$v_2(t)$	+	0	0	0	+	0	+	+

Zauważmy jednakże, iż nie wszystkie są dopuszczalne. Ścieżki 7. i 8. odrzucamy, gdyż nie jest możliwe, aby wartości $v_1(t)$ i $v_2(t)$ były jednocześnie dodatnie [oznaczałoby to aktywne oba ograniczenia (górne i dolne) na zasób długu]. Wykluczamy z rozważań także ścieżkę 6, gdyż prowadzi ona do warunku $i = (1 - f)r$, czyli do sytuacji, w której nie ma różnicy w kosztach między finansowaniem kapitałem własnym i obcym. Dalej będziemy zakładali, iż $i \neq (1 - f)r$. Pozostaje zatem do rozpatrzenia pięć dopuszczalnych ścieżek i ustalenie w jakiej kolejności mogą się one łączyć, wyznaczając strategie optymalnego rozwoju firmy.

Można pokazać (zob. Dodatek 1.), iż w zależności od kosztów finansowania kapitałem własnym i obcym firma może wybierać między dwiema długofalowymi strategiami rozwoju:

1) gdy $i<(1-f)r$ trajektoria $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow4$,
2) gdy $i>(1-f)r$ trajektoria $1\rightarrow5$.



Rys. 1. Optymalna trajektoria rozwoju, gdy $i<(1-f)r$.

[8] Por. E. Panek, *Elementy ekonomii matematycznej – statyka*; PWN, Warszawa – Poznań 1993, ss. 84-86.

Ad 1. Finansowanie kapitałem własnym jest tańsze niż obcym.

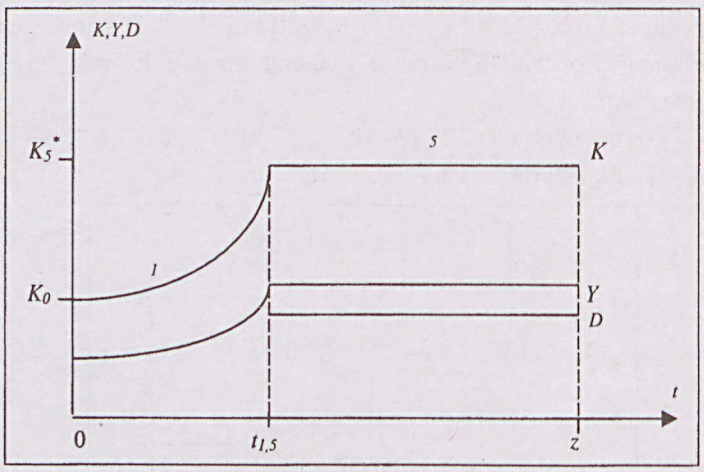
Optymalna strategia rozwoju składa się z następujących po sobie kolejno okresów wyznaczonych przez odpowiednie ścieżki.

I (ścieżka 1.) Firma rozpoczyna działalność z maksymalnym długiem i, inwestując cały pożyczony kapitał, jak również całą wypracowaną nadwyżkę finansową (cash flow), dąży do zwiększenia swojego majątku. Na rzecz przyszłych zysków odkłada się wypłatę dywidendy dla akcjonariuszy. Sytuacja ta ma miejsce tak długo, jak $K(t) < K_2^*$, czyli do momentu $t_{1,2}$.

II (ścieżka 2.) W momencie $t_{1,2}$ zasób majątku firmy osiąga poziom K_2^*. Teraz firma powinna utrzymywać stan majątku na tym poziomie, przeprowadzając tylko te inwestycje, które są niezbędne do jego utrzymania, a resztą nadwyżki finansowej, jaka jej pozostaje, powinna zacząć spłacać dług. Dalsze zaciąganie kredytów (o ile ktoś zechciałby ich udzielić) i inwestowanie mogłoby prowadzić do niewypłacalności firmy z powodu rosnących kosztów długu i jego obsługi. Stan ten powinien trwać aż do całkowitego spłacenia długu.

III (ścieżka 3.) Gdy dług zostanie spłacony (moment $t_{2,3}$), można ponownie całą nadwyżkę przeznaczyć na inwestycje, które spowodują wzrost majątku aż do osiągnięcia poziomu K_4^* (moment $t_{3,4}$).

IV (ścieżka 4.) Sytuacja firmy jest już na tyle bezpieczna, iż może ona zacząć wypłacać dywidendy. Wypracowaną nadwyżkę finansową firma dzieli zatem pomiędzy akcjonariuszy a inwestycje, które pozwalają jej zachować majątek na poziomie K_4^*. Stan ten utrzymuje się do końca horyzontu.



Rys. 2. Optymalna trajektoria rozwoju, gdy $i > (1-f)r$.

Ad 2. Finansowanie kapitałem własnym jest droższe niż obcym.

Optymalna strategia rozwoju składa się z następujących po sobie okresów wyznaczonych przez odpowiednie ścieżki.

I (ścieżka 1.) Firma rozpoczyna działalność z maksymalnym długiem i, inwestując cały pożyczony kapitał, jak również całą wypracowaną nadwyżkę finansową (cash flow), dąży do zwiększenia swojego majątku. Na rzecz przyszłych zysków odkłada się wypłatę dywidendy dla akcjonariuszy. Sytuacja ta ma miejsce tak długo, jak $K(t) < K_5^*$, czyli do momentu $t_{1,5}$.

II (ścieżka 5.) W momencie $t_{1,5}$ zasób majątku firmy osiąga poziom K_5^*. Teraz firma powinna utrzymywać ten stan majątku (zachowując oczywiście maksymalny dopuszczalny udział długu w majątku własnym). Wypracowaną nadwyżkę finansową firma dzieli pomiędzy akcjonariuszy (wypłacając dywidendy) a inwestycje, które pozwalają jej zachować majątek na poziomie K_5^*. Stan ten utrzymuje się do końca horyzontu.

4. Szczególny przypadek modelu (z funkcją produkcji Cobba-Douglasa)

Podstawiając w omawianym modelu funkcję produkcji Cobba-Douglasa jednorodną, stopnia θ: $Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $\alpha + \beta = \theta$, $0 < \theta < 1$ (funkcja tej postaci spełnia założenia stawiane funkcji produkcji w modelu), można wyznaczyć optymalne, stałe wartości K_i^*, L_i^*, dla i = 2, 4, 5 w zależności od stałych parametrów modelu.
Z układu warunków optymalności (19) – (30) w tych szczególnych przypadkach, wyprowadzamy zależności:

$$p\frac{\partial Q}{\partial K}\Big|_{K=K^*} = a + C_i\,, \tag{31}$$

$$p\frac{\partial Q}{\partial L}\Big|_{L=L^*} = w, \tag{32}$$

gdzie C_i, $i = 2, 4, 5$, wynosi odpowiednio:

$$C_2 = r, \tag{33}$$

$$C_4 = \frac{i}{1-f}, \tag{34}$$

$$C_5 = \frac{h}{1+h}r + \frac{1}{1+h}\frac{i}{1-f}. \tag{35}$$

Zauważmy, iż z zależności (31), (32) wynika, że na ścieżkach 2., 4. i 5. zachodzi równość pomiędzy wyrażoną wartościowo krańcową produktywnością majątku a kosztem krańcowym kapitału (przed opodatkowaniem) oraz że stawka płac jest równa wyrażonej wartościowo krańcowej wydajności pracy .

C_i, $i = 2, 4, 5$ oznacza koszt finansowy (przed opodatkowaniem) dodatkowej jednostki majątku[9]; jest on oczywiście na każdej z tych trzech ścieżek inny, ponieważ inny jest sposób finansowania majątku na każdej ze ścieżek.

Na ścieżce 2. majątek finansowany jest przez kapitał własny i obcy, lecz nie w maksymalnej proporcji. Jest to ścieżka, na której firma redukuje swój dług i koszt dodatkowej jednostki majątku jest zatem równy kosztowi jednostkowemu długu (33).

Na ścieżce 4. majątek finansowany jest wyłącznie kapitałem własnym, zatem koszt dodatkowej jednostki majątku jest równy kosztowi jednostkowemu kapitału własnego (przed opodatkowaniem) (34).

Na ścieżce 5. majątek finansowany jest przez kapitał własny i obcy w maksymalnej proporcji 1:*h*. Zatem dodatkowa jednostka majątku jest finansowana w tej samej proporcji i koszt jej wyraża (35).

Podstawiając do równań (31), (32) postaci pochodnych funkcji Cobba-Douglasa dla odpowiednich wartości K_i^* i L_i^*, $i = 2, 4, 5$, otrzymujemy układ:

$$A\alpha(K_i^*)^{\alpha-1}(L_i^*)^{\beta} = \frac{a}{p} + \frac{C_i}{p}, \tag{36}$$

$$A\beta(K_i^*)^{\alpha}(L_i^*)^{\beta-1} = \frac{w}{p}. \tag{37}$$

Rozwiązaniem układu (36), (37) są następujące pary:

- dla ścieżki 2.:

$$K_2^* = \left(A\left(\frac{a+r}{p\alpha}\right)^{\beta-1}\left(\frac{w}{p\beta}\right)^{-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{38}$$

$$L_2^* = \left(A\left(\frac{a+r}{p\alpha}\right)^{-\alpha}\left(\frac{w}{p\beta}\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{39}$$

- dla ścieżki 4.:

$$K_4^* = \left(A\left(\frac{i+a(1-f)}{p(1-f)\alpha}\right)^{\beta-1}\left(\frac{w}{p\beta}\right)^{-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{40}$$

$$L_4^* = \left(A\left(\frac{i+a(1-f)}{p(1-f)\alpha}\right)^{-\alpha}\left(\frac{w}{p\beta}\right)^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \tag{41}$$

---

[9] Zob. J.F. Weston, T.E. Copeland, *Managerial Finance* eight ed., Chicago: The Dryden Pres, 1989, za M. Blok, *Dynamic Models of the Firm*, Springer-Verlag Berlin 1996, s. 22.

- dla ścieżki 5.:

$$K_5^* = \left(A \left(\frac{i + a(1-f)(1+h) + rh(1-f)}{p(1-f)(1+h)\alpha} \right)^{\beta-1} \left(\frac{w}{p\beta} \right)^{-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \quad (42)$$

$$L_5^* = \left(A \left(\frac{i + a(1+h)(1-f) + rh(1-f)}{p(1-f)(1+h)\alpha} \right)^{-\alpha} \left(\frac{w}{p\beta} \right)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}. \quad (43)$$

Przyjęta w rozpatrywanym modelu funkcja Cobba-Douglasa jako funkcja produkcji stanowi pewne ograniczenie przedstawionego wnioskowania. Trudno jednak wskazać, która funkcja z pokaźnej listy dwuczynnikowych funkcji produkcji najlepiej opisuje powiązania pomiędzy majątkiem, pracą i produkcją w realnej gospodarce[10].

5. *Przykład*

Sokołowskie Zakłady Mięsne S.A. powstały decyzją ministra przekształceń własnościowych przekształcającą przedsiębiorstwo państwowe (istniejące od 1975 r.) w spółkę akcyjną. Dnia 16 marca 1993 roku uchwałą walnego zgromadzenia akcjonariuszy zmieniono statut spółki i uzyskała ona ostateczną formę[11]. W roku1997 została utworzona grupa kapitałowa „Sokołów" S.A. poprzez połączenie istniejącej spółki z mniejszymi zakładami mięsnymi.

Zarządza nią obecnie zarząd spółki, powoływany przez radę nadzorczą, której członków wybiera (raz na trzy lata) walne zgromadzenie akcjonariuszy. Zarząd jest zatem bezpośrednim reprezentantem interesów akcjonariuszy. Celem akcjonariuszy są oczywiście korzyści finansowe, jakie mogą otrzymać w postaci dywidendy, dzięki zwiększaniu wartości i majątku firmy. Zatem optymalną politykę inwestycyjną i strukturę finansową spółki „Sokołów" S.A. wyznaczyć można za pomocą opisanego modelu.

Majątek firmy jest finansowany przez kapitał własny (akcyjny i rezerwowy), a także kapitał obcy (zobowiązania długo- i krótkoterminowe). Zakłada się jednakże, iż udział kapitału obcego w majątku (z powodu jego wysokich kosztów) będzie stopniowo malał, a „podstawowym źródłem finansowania przedsięwzięć inwestycyjnych w latach 1998 i 1999 będą środki własne skumulowane na koniec roku 1997

---

[10] Por. E. Panek, *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa – Poznań 1989, s. 47.

[11] Prospekt emisyjny „Sokołowskich Zakładów Mięsnych" S.A., s. 35.

oraz zysk netto i amortyzacja za lata 1998 i 1999. Niedobór źródeł finansowania planowanych inwestycji będzie pokryty ze środków zewnętrznych"[12]. Zatem, skoro tańsze jest dla firmy finansowanie kapitałem własnym niż obcym ($i < (1 - f)\, r$), powinna ona realizować I strategię rozwoju wyznaczoną na podstawie opisanego modelu.

Za początek okresu planowania przyjmujemy 01.01.1998 rok (t_0).
Zasób majątku spółki „Sokołów" S.A. i zatrudnienie kształtują się na poziomie:

$K_0 = K(t_0) = 231\,953{,}6$ tys.
$L_0 = L(t_0) = 4{,}5$ tys.
Pozostałe parametry przyjmują następujące wartości:
$a = 0{,}1$ (stopa deprecjacji),
$f = 0{,}36$ (obowiązująca stopa podatkowa),
$r = 0{,}14$ (oprocentowanie kredytu),
$i = 0{,}07$ (stopa dyskontowa),
$w = 883{,}6$ zł/mies. (przeciętne wynagrodzenie miesięczne),
$c = 0{,}14$ (średni koszt kapitału w Spółce „Sokołów" S.A.)[13],
$\alpha = 0{,}14$ (elastyczność dochodu względem majątku)[14],
$\beta = 0{,}18$ (elastyczność dochodu względem pracy)[15],
$A = 8\,152\,132{,}08$ (współczynnik skali)[16].

Zgodnie z I wyznaczoną w opisanym modelu strategią, rozwój spółki „Sokołów" S.A. przebiegać powinien w czterech etapach.

Etap I:
W tym okresie intensywnego wzrostu firma powinna inwestować całą wypracowaną nadwyżkę finansową, oraz cały pożyczony kapitał obcy. Spowoduje to znaczny wzrost majątku firmy i powinno trwać do chwili osiągnięcia przez niego poziomu K_2^*, czyli do momentu $t_{1,2}$. Dla spółki „Sokołów" S.A. wartość K_2^* wyznaczona zgodnie ze wzorem (38) wynosi:

$$K_2^* = 389\,460{,}7 \text{ tys. zł.} \tag{44}$$

Towarzyszące mu zatrudnienie kształtuje się na poziomie:

$$L_2^* = 11{,}1 \text{ tys.} \tag{45}$$

---

[12] *Ibidem.* 73.
[13] Zob. Dodatek 3.
[14] Zob. Dodatek 2.
[15] Zob. Dodatek 2.
[16] Zob. Dodatek 2.

Etap II:
Gdy spółka osiągnie stan równowagi stacjonarnej, powinna utrzymywać swój majątek na osiągniętym poziomie K_2^* = 389 460,7 tys. zł (prowadząc niezbędne inwestycje, służące odnowieniu zużytej części majątku), a pozostałą częścią nadwyżki finansowej zacząć spłacać dług. Stan ten firma powinna utrzymywać aż do wywiązania się ze zobowiązań wobec wszystkich wierzycieli. Oczywiście, na tym etapie nie są jeszcze wypłacane żadne dywidendy.

Etap III:
Rozpoczyna się on w momencie spłacenia ostatniej złotówki długu. Jest to drugi etap wzrostu, jednak inwestycje finansowane są wyłącznie kapitałem własnym spółki. Powodują one wzrost majątku do poziomu K_4^*, który dla spółki „Sokołów" S.A. wynosi:

$$K_4^* = 459\ 060{,}6 \text{ tys. zł} \tag{46}$$

Towarzyszące mu zatrudnienie kształtuje się na poziomie:

$$L_4^* = 11{,}4 \text{ tys.} \tag{47}$$

Etap IV:
Etap ten rozpoczyna się w momencie osiągnięcia przez majątek firmy poziomu $K_4^* = 459\,060{,}6$ tys. zł. Pozycja firmy jest stabilna, osiągnięty poziom majątku pozwala na wypracowanie takiej nadwyżki, która oprócz finansowania niezbędnych inwestycji pozwala na wypłatę dywidend dla akcjonariuszy.

6. Wnioski

Oczywiste jest, że przedstawione w modelowej sytuacji wartości majątku i zatrudnienia mogą być w praktyce trudne do osiągnięcia. Natomiast nie ma wątpliwości, że model matematyczny, z samej swojej definicji upraszczający rzeczywistą sytuację, powinien służyć jako narzędzie pomocne przy podejmowaniu strategicznych decyzji dotyczących fundamentalnych kierunków rozwoju firmy. A to oznacza, że plan optymalny uzyskany dzięki zastosowaniu modelu matematycznego powinien zostać skorygowany i zatwierdzony (lub odrzucony) przez człowieka (lub grupę ludzi) podejmujących w firmie decyzje finansowe.

W spółce „Sokołów" S.A. decyzje i założenia Zarządu są zbieżne z głównymi postulatami optymalnej strategii wyznaczonej według opisanego modelu:

- głównym celem strategicznym firmy jest wzrost majątku[17];

[17] Zob. Prospekt emisyjny „Sokołowskich Zakładów Mięsnych" S.A., s. 57.

- firma okresowo (początkowo, jeśli za początek okresu planowania przyjmujemy 01.01.1998 roku (t_0)) zwiększyła zadłużenie (nie przekraczając jednakże bezpiecznego poziomu)[18];
- firma zakłada jednakże, iż zadłużenie będzie stopniowo malało, a podstawowym źródłem finansowania przedsięwzięć inwestycyjnych będą środki własne[19];
- nakłady inwestycyjne będą rosły, spółka zamierza przeznaczyć na inwestycje 33 000 tys. w 1998 i 45 500 tys. zł. w 1999 roku[20];
- firma zobowiązuje się do niewypłacania dywidendy do czasu wywiązania się ze zobowiązań inwestycyjnych[21].

Dodatek 1.

Dalsza charakterystyka i procedura łączenia ścieżek

Rozpatrzmy na początku, które z pięciu dopuszczalnych ścieżek mogą być ścieżkami końcowymi (tzn. spełniają warunki transwersalności (27) – (30)).

ścieżka 1.: $\mu(t)>0,\ v_1(t)=0,\ v_2(t)>0.$
Na ścieżce tej dla wszystkich t zachodzą warunki (w szczególności powinny one być także spełnione dla $t=z$). Z (21) i (27) wynika, iż:

$$\gamma_1=\gamma_2, \tag{D1.1}$$

ponieważ $v_1(t)=0$, to:

$$K(z)-X(z)>0. \tag{D1.2}$$

Z (D1.1), (D1.2) i (29) wynika, iż:

$$\gamma_1=\gamma_2=0. \tag{D1.3}$$

Zatem z (28):

$$\lambda_2(z)=1; \tag{D1.4}$$

warunek (D1.4) daje sprzeczność z warunkiem (22) i założeniem, że $\mu(t)>0$.

---

[18] Zob. *ibidem*, s. 71.
[19] Zob. *ibidem*, s. 72.
[20] Zob. *ibidem*, s. 72.
[21] Zob. *ibidem*, s. 57.

Zatem ścieżka 1. nie może być ścieżką końcową.

Analogicznie pokazujemy, iż ścieżki 2. i 3. nie spełniają warunków transwersalności (27) – (30).

Pokażemy teraz, iż ścieżkami końcowymi mogą być jedynie ścieżki 4 i 5.

ścieżka 4.: $\mu(t)=0,\ \nu_1(t)>0,\ \nu_2(t)=0.$

Z (21) i (22) otrzymujemy:

$$\lambda_1(t)=0, \text{ dla każdego } t, \text{ w szczególności dla } t=z, \tag{D1.5}$$

$$\lambda_2(t)=1, \text{ dla każdego } t, \text{ w szczególności dla } t=z. \tag{D1.6}$$

Warunki transwersalności będą spełnione, gdy wykażemy, że $\gamma_1=\gamma_2=0$.
Ponieważ $\nu_2(t)=0$, to również $\nu_2(z)=0$, zatem zgodnie z (26) i (30):

$$\gamma_2=0, \tag{D1.7}$$

a na podstawie (22) i (27):

$$\gamma_1=0, \tag{D1.8}$$

co trzeba było wykazać.

Analogicznie pokazujemy, iż ścieżka 5 spełnia warunki transwersalności (27) – (30).

Dalsza charakterystyka ścieżek:

ścieżka 1.: $\mu(t)>0,\ \nu_1(t)=0,\ \nu_2(t)>0.$

Ze znaków zmiennych dodatkowych $(\mu(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t))$ i z (24), (26) wynika, iż ścieżkę tę charakteryzuje maksymalny dopuszczalny poziom zadłużenia i brak dywidend:

$$Y(t)=hX(t),\ D(t)=0. \tag{D1.9}$$

Zatem zgodnie z (9):

$$CF(K,L,Q)+\dot{Y}(t)=I(t). \tag{D1.10}$$

Cała wypracowana nadwyżka finansowa, a także cały kapitał obcy, jaki uda się przyciągnąć, jest przeznaczany na inwestycje, które powodują szybki wzrost majątku.
Z (19),(20) i (21):

$$(1-f)\left(p\frac{\partial Q}{\partial K}-(a+r)\right)\lambda_2(t)=\nu_2(t), \tag{D1.11}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = (i-(1-f)r)\lambda_2(t) - (1+h)\nu_2. \tag{D1.12}$$

ścieżka 2.: $\mu(t)>0,\ \nu_1(t)=0,\ \nu_2(t)=0.$
Ze znaków zmiennych dodatkowych $(\mu(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t))$ i z (23), (26) wynika, iż ścieżkę tę charakteryzuje średni (nie maksymalny) poziom zadłużenia i brak dywidend:

$$Y(t)<hX(t),\ D(t)=0. \tag{D1.13}$$

Z (19) i (21):

$$p\frac{\partial Q}{\partial K} = a+r \tag{D1.14}$$

Ta ustalona produktywność kapitału oznacza, iż firma znajduje się w stanie równowagi stacjonarnej, w którym utrzymuje produkcję na stałym poziomie Q_2^* zużywając K_2^* i L_2^* nakładów.

$$\dot{K}_2^* = 0, \tag{D1.15}$$

zatem także inwestycje utrzymują się na stałym poziomie $I_2^* = a K_2^* > 0$.
Zgodnie z (9):

$$-\dot{Y}(t) = CF(K,L,Q) - I(t). \tag{D1.16}$$

Wszystko co pozostanie z wypracowanej nadwyżki finansowej po poczynieniu niezbędnych inwestycji powinno być przeznaczone na spłatę długu.
Z (20) odczytujemy, że:

$$\dot{\lambda}_2(t) = (i-(1-f)r)\lambda_2(t). \tag{D1.17}$$

ścieżka 3.: $\mu(t)>0,\ \nu_1(t)>0,\ \nu_2(t)=0.$
Ze znaków zmiennych dodatkowych $(\mu(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t))$ i z (24), (25) wynika, iż ścieżkę tę charakteryzuje zarówno brak zadłużenia (firma sama finansuje swoją działalność), jak i brak dywidend:

$$Y(t)=0,\ K(t)=X(t),\ D(t)=0. \tag{D1.18}$$

Zatem zgodnie z (9):

$$CF(K,L,Q) = I(t). \tag{D1.19}$$

Cała nadwyżka powinna być przeznaczona na inwestycje, które spowodują wzrost majątku.
Z (19),(20) i (21):

$$-(1-f)(p\frac{\partial Q}{\partial K}-(a+r))\lambda_2(t)=\nu_1(t), \tag{D1.20}$$

$$\dot{\lambda}_2(t)=(i-(1-f)r)\lambda_2(t)+\nu_1 \tag{D1.21}$$

Z (D1.20) i (D1.21):

$$\dot{\lambda}_2(t)=(i-(1-f)(p\frac{\partial Q}{\partial K}-a)\lambda_2(t). \tag{D1.22}$$

ścieżka 4.: $\mu(t)=0,\ \nu_1(t)>0,\ \nu_2(t)=0.$
Ze znaków zmiennych dodatkowych $(\mu(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t))$ i z (24), (25) wynika, iż ścieżkę tę charakteryzuje samofinansowanie się firmy i dodatnie dywidendy.

$$Y(t)=0,\ K(t)=X(t),\ D(t)>0. \tag{D1.23}$$

Z (19), (20) i (21):

$$p\frac{\partial Q}{\partial K}=a+\frac{i}{1-f}. \tag{D1.24}$$

Ta ustalona produktywność kapitału oznacza, iż firma znajduje się w stanie równowagi stacjonarnej, w którym utrzymuje produkcję na stałym poziomie Q_4^* zużywając K_4^* i L_4^* nakładów.

$$\dot{K}_4^*=0, \tag{D1.25}$$

zatem także inwestycje utrzymują się na stałym poziomie $I_4^*=aK_4^*>0$.
Zgodnie z (9):

$$CF(K,L,Q)=I(t)+D(t). \tag{D1.26}$$

Nadwyżka finansowa jest dzielona między niezbędne inwestycje a akcjonariuszy (w postaci wypłaty dywidend).
Ponadto z (20) i (22) odczytujemy, że:

$$\nu_1=-(i-(1-f)r)>0, \tag{D1.27}$$

zatem

$$i<(1-f)r. \tag{D1.28}$$

ścieżka 5.: $\mu(t)=0,\ \nu_1(t)=0,\ \nu_2(t)>0.$

Ze znaków zmiennych dodatkowych $(\mu(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t))$ i z (24), (26) wynika, iż ścieżkę tę charakteryzuje maksymalny dopuszczalny zasób długu i dodatnie dywidendy.

$$Y(t)=hX(t),\ D(t)>0. \tag{D1.29}$$

Z (19), (20), (21) i (22):

$$p\frac{\partial Q}{\partial K}=a+\frac{h}{1+h}r+\frac{1}{1+h}\frac{i}{1-f}. \tag{D1.30}$$

Produktywność kapitału jest stała, co oznacza, iż firma znajduje się w stanie równowagi stacjonarnej, utrzymując produkcję na stałym poziomie Q_5^*, zużywając K_5^* i L_5^* nakładów,

$$\dot{K}_5^*=0, \tag{D1.31}$$

zatem także inwestycje utrzymują się na stałym poziomie $I_5^*=aK_5^*>0$.
Zgodnie z (9):

$$CF(K,L,Q)+\dot{Y}(t)=I(t)+D(t). \tag{D1.32}$$

Cała wypracowana nadwyżka finansowa, a także cały kapitał obcy, jaki uda się przyciągnąć jest dzielona między niezbędne inwestycje a akcjonariuszy (w postaci wypłaty dywidend).
Ponadto z (20) i (22) odczytujemy, że:

$$\nu_2(1+h)=(i-(1-f)r)>0, \tag{D1.33}$$

zatem

$$i>(1-f)r. \tag{D1.34}$$

Należy teraz rozważyć, w jaki sposób połączyć opisane dopuszczalne ścieżki tak, aby otrzymać żądaną optymalną strategię rozwoju firmy[22]. Zakładać przy tym będziemy, iż optymalnie jest dla firmy rozpoczynać działalność z maksymalnym długiem.

---

[22] Pierwszy procedurę łączenia ścieżek opisał P.J.J.M. Van Loon (1983) w pracy *A Dynamic Theory of the Firm: Production, Finance and Investment*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 281, Springer Verlag Berlin.

- Rozważmy na początku, która ze ścieżek może poprzedzać ścieżkę 4.

1 → 4 nie, sprzeczność między (D1.9) i (D1.23),

2 → 4 nie, sprzeczność między (D1.14), (D1.15) i (D1.24),

3 → 4 tak,

5 → 4 nie, sprzeczność między (D1.28) i (D1.34).

- Rozważmy teraz, która ze ścieżek może poprzedzać trajektorię 3 → 4.

1 → 3 nie, sprzeczność między (D1.9) i (D1.18),

2 → 3 tak,

4 → 3 nie,

z (D1.6), (22) i znaków zmiennych pomocniczych wynika, iż $\lambda_2(t)$ jest funkcją rosnącą ($\dot{\lambda}_2(t) > 0$), zatem z (D1.21):

$$i > (1-f)r, \tag{D1.35}$$

co daje sprzeczność z (D1.28),

5 → 3 nie, sprzeczność między (D1.18) i (D1.29).

- Rozważmy, która ze ścieżek może przechodzić w ścieżkę 2.

1 → 2 tak,

3 → 2 nie, z uwagi na (D1.13) i (D1.18) na ścieżce 2 musiałoby być $\dot{\lambda}_2(t) > 0$ (czyli wzrastające zadłużenie). Znaczyłoby to, że 2 jest ścieżką końcową (niemożliwe), lub 2 → 4 (niemożliwe), lub 2 → 5 (niemożliwe).

4 → 2 nie, sprzeczność między (D1.14), (D1.24) i (D1.25),

5 → 2 nie, sprzeczność między (D1.14), (D1.30) i (D1.31).

- Rozważmy, która ze ścieżek może przechodzić w ścieżkę 5.

1 → 5 tak,

2 → 5 nie, sprzeczność między (D1.14) (D1.15) i (D1.30),

3 → 5 nie, z (22) i znaków zmiennej pomocniczej $\mu(t)$ wynika, iż $\lambda_2(t)$ jest funkcją malejącą ($\dot{\lambda}_2(t) < 0$), zatem z (D1.21):

$$i < (1-f)r, \tag{D1.35}$$

co daje sprzeczność z (D1.34),

4 → 5 nie, sprzeczność między (D1.28) i (D1.34).

Dodatek 2.

Wyznaczenie parametrów funkcji produkcji

Gdy znane są wielkości $K=K(t)$, $L=L(t)$, $Q=Q(t)$ dla pewnej wartości t, oraz parametry modelu, można wyznaczyć potrzebne parametry α i β (elastyczności funkcji produkcji) rozwiązując klasyczne statyczne zadanie maksymalizacji dochodu w warunkach długookresowej strategii rozwoju[23].

Znaleźć:

$$\max\{p(1-m)Q(K,L)-wL-cK\} \tag{D2.1}$$

przy ograniczeniu:

$$K,L\geq 0, \tag{D2.2}$$

gdzie:

Q,K,L,p,w – zdefiniowane jak w modelu,
m – współczynnik materiałochłonności,
c – średni koszt kapitału (wyznaczony np. metodą WACC, zob. Dodatek 3.)

Warunkiem koniecznym i dostatecznym jest w tym przypadku:

$$p(1-m)\frac{\partial Q}{\partial K}=c, \tag{D2.3}$$

$$p(1-m)\frac{\partial Q}{\partial L}=w. \tag{D2.4}$$

Z definicji elastyczności:

$$\alpha=\frac{\partial Q}{\partial K}\frac{K}{Q}, \tag{D2.5}$$

$$\beta=\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q}. \tag{D2.6}$$

Z (D2.3) – (D2.6) otrzymujemy:

$$\alpha=\frac{c}{p(1\text{-}m)}\frac{K}{Q}, \tag{D2.7}$$

$$\beta=\frac{w}{p(1\text{-}m)}\frac{L}{Q}. \tag{D2.8}$$

---

[23] Zob. E. Panek, *Elementy ekonomii matematycznej – statyka*, PWN, Warszawa 1993, s. 85.

Natomiast parametr A obliczamy z zależności:

$$A = \frac{Q}{K^{\alpha} L^{\beta}}. \tag{D2.9}$$

Dla spółki „Sokołów" S.A. wartości szukanych parametrów wyznaczono w oparciu o dane z Prospektu Emisyjnego Sokołowskich Zakładów Mięsnych S.A. z I półrocza 1998 roku. Współczynnik materiałochłonności $m = 0{,}5$ to iloraz nakładów materiałowych i przychodu z produkcji sprzedanej w tym półroczu, średni koszt kapitału w spółce $c = 0{,}14$ policzono metodą WACC (zob. Dodatek 3.), a parametry funkcji produkcji $\alpha = 0{,}14$, $\beta = 0{,}18$ oraz $A = 8\,152\,132{,}08$ wyznaczono na podstawie wzorów (D.2.7) – (D.2.9) dla wielkości charakteryzujących I półrocze 1998 roku.

Dodatek 3.

Wyznaczenie średniego ważonego kosztu kapitału (model WACC)

Składniki kapitału	*Kapitał w tys. zł określony wg wartości księgowej*	*Udział składników kapitału*	*Koszt składnika w %*	*Ważony koszt kapitału w %*
Kapitał akcyjny zwykły	*33 000,00*	*0,13*	*14,9%*	*1,82%*
Kapitał akcyjny uprzywilejowany	*0,00*	*0,00*	*0,0%*	*0,00%*
Zysk zatrzymany	*169 276,3*	*0,62*	*11,7%*	*7,25%*
Kredyt długoterminowy	*12 994,8*	*0,05*	*11,5%*	*0,58%*
Kredyt krótkoterminowy	*55 325,3*	*0,2*	*15,4%*	*3,07%*
Ogółem	*270 596,4*	*1,0*	*x*	*13,66%*

Źródło: Zob. np. W. Dębski, Zarządzanie finansami, CIM, Warszawa 1996, t. II s. 140. Dane: Prospekt emisyjny „Sokołowskich Zakładów Mięsnych" S.A.

Literatura

[1] M.W.J. Blok, *Dynamic Models of the Firm*, Springer-Verlag Berlin 1996

[2] A.C. Chiang, *Elements of dynamic optimalization*, McGraw – Hill, Inc. 1992.
[3] W. Dębski, *Zarządzanie finansami*, CIM, Warszawa 1996
[4] O. Van Hilten, P.M. Kort, P.J.J.M. Van Loon, *Dynamic policies of the firm. An optimal control approach*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1993
[5] P.M. Kort, *Optimal Dynamic Investment Policies of a Value Maximizing Firm*, Springer-Verlag, Berlin 1989
[6] M. Nowak, *Dynamiczne modele zarządzania finansami w przedsiębiorstwie*, Pret, Warszwa 1995
[7] E. Panek, *Elementy ekonomii matematycznej – statyka*, PWN, Warszawa – Poznań 1993
[8] E. Panek, *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa – Poznań 1989
[9] M. Sierpińska, T. Jachna, *Ocena przedsiębiorstwa wg standardów światowych*, PWN, Warszawa 1994