Wiesław Łuczyński

PRÓBA ZASTOSOWANIA TRAJEKTORII OKRESOWYCH I CHAOTYCZNYCH ATRAKTORÓW W PROGNOZOWANIU ZJAWISK GOSPODARCZYCH

Celem niniejszego opracowania jest odtworzenie skomplikowanego obrazu dynamiki gospodarczej. Procesy ekonomiczne to procesy w większości nieliniowe. Ekonomia nie jest nauką czystą: regularność w zjawiskach ekonomicznych „prześwieca" poprzez pozorny i rzeczywisty chaos. Naszym zadaniem jest dowiedzenie, że w gospodarce mamy do czynienia z procesami nieliniowymi. Nie jest to zadanie łatwe. Jeżeli jednak się uda, wówczas można sięgnąć do arsenału znanych równań w celu wyjaśnienia związków występujących w badanych procesach. Dowód, że procesy ekonomiczne mają charakter nieliniowy, wymaga dużej cierpliwości oraz zastosowania (często niekonwencjonalnych) narzędzi. Dowodu takiego nie da się uzyskać a priori, lecz jedynie na drodze eksperymentowania. Wnioski wynikające z przeprowadzonych dotychczas eksperymentów pozwalają z umiarkowanym optymizmem spojrzeć na problemy prognozowania. Prawdą jest, że „mimo wszelkich postępów w konstrukcji coraz inteligentniejszych komputerów i programów nie jesteśmy w stanie zmienić natury obiektów ekonomicznych"(Z. Czerwiński, 2002, s. 370). Możemy się jednak zbliżać do ich rekonstrukcji pojęciowej i empirycznej: teoria chaosu oferuje bowiem narzędzia coraz lepiej imitujące zachowania społeczne.

Jedną z podstawowych cech dynamik chaotycznych jest ich czułość na warunki początkowe. Taka czuła zależność dotyczyć może także stanu ustalonego. Zjawisko to pojawia się w warunkach współistnienia wielu atraktorów[1]. Mogą to

[1] Atraktor to obszar poziomu równowagi systemu w nieliniowych szeregach czasowych. Atraktory to szczególne stany układów dynamicznych. Wyróżniającą ich cechą jest stabilność i ruch zmierzający od dowolnego stanu (w miarę upływu czasu) do danego stanu wyróżnionego. Bardziej sformalizowanym określeniem atraktora A jest wyjście od jego otoczenia R: dla każdego punktu $(x,y)\in A$ istnieje dowolnie małe otoczenie o środku w (x,y), które zawarte jest w R. W szczególności zatem $A\subset R$. R jest obszarem-pułapką co oznacza, że każda orbita zaczynająca się w R pozostaje na zawsze w R. Przy czym orbita zbliża się na dowolnie małą odległość do A. Takie

być tzw. dziwne atraktory[2] lub punkty stałe przekształcenia. Każdy stan może zostać ustalony jedynie ze skończoną dokładnością p. Jeżeli orbity (trajektorie) przebiegu procesu nie oddalają się od danego punktu początkowego (lub stanu wcześniej ustalonego) na odległość większą niż p, wówczas można łatwo przewidzieć przyszły stan badanego procesu. Trajektorie takich procesów będą zbieżne do jednego z atraktorów tworzących brzegi określonych basenów przyciągania[3]. Brzegi te są często fraktalami[4]. Jeżeli jednak orbity przebiegu danego procesu oddalają się na odległość większą od p, wówczas, w warunkach występowania wielu obszarów przyciągania, trudno jest prognozować, do jakiego stanu zbiegać się będą trajektorie punktów początkowych. Jedne trajektorie będą zbieżne do jednego atraktora, pozostałe zaś do innego. Siła przyciągania zależy od tzw. wymiaru fraktalnego[5] brzegów obszarów przyciągania. Im większy wymiar fraktalny brzegu, tym trudniej przewidzieć stan końcowy badanego układu. I przeciwnie, obszar niepewności kurczy się wraz ze zmniejszaniem wymiaru fraktalnego brzegu basenów przyciągania.

Zgodnie z powyższym schematem, punkt początkowy $x(1)$ będzie przyciągany przez atraktor A1 i jego zachowanie w danych warunkach jest całkowicie przewidywalne. Natomiast stan końcowy punktu $x(2)$ jest nieprzewidywalny ze względu na jego wejście w otoczenie p brzegu basenu przyciągania. Ten fakt, że warunki początkowe $x(i)$, $(i = 1,2)$ są określone z niepewnością p oznacza, że ustalenie iż $x(i) = x$ jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że $x(i)$ znajdują się w pobliżu x: $|x - x(i)| \leq p$. Dla sytuacji zilustrowanej na rysunku 1 z niepewnością p wiadomo na pewno, że proces $x(1)$ zdąża do atraktora A1. Punkt początkowy procesu $x(2)$ znajduje się w obszarze przyciągania atraktora A2, ale z powodu niepewności p jego trajektoria może w rzeczywistości zbliżyć się albo do atraktora A2 albo do atraktora A1. Warunek początkowy $x(1)$ nosi nazwę warunku p-pewnego, zaś $x(2)$ – warunku p-niepewnego. Warunki p-niepewne leżą w odległości mniejszej lub równej p od brzegu obszarów przyciągania. Prawdopodo-

---

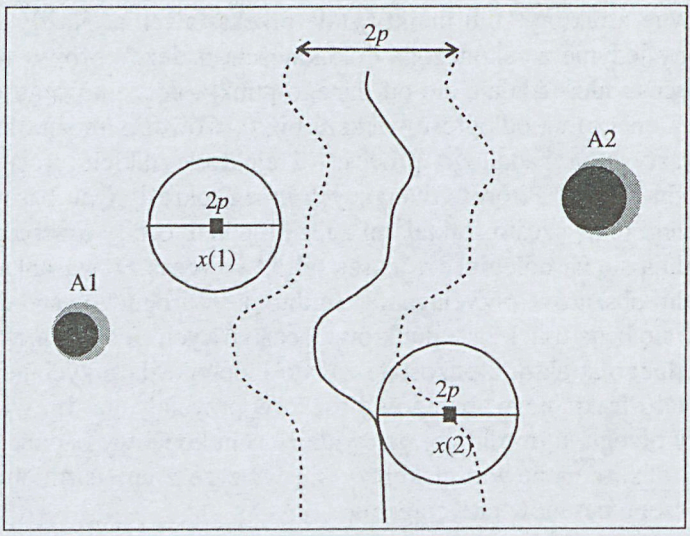
A jest atraktorem. Por. M. Tempczyk (2002, s. 27), H.-O. Peitgen, H. Jürgen, D. Saupe (1996, t. 2, s. 329), E. E. Peters (1997, s. 242).

[2] Dziwny atraktor cechuje się tym, że jego trajektorie nie przecinają się, zaś punkty nigdy nie powtarzają się w tych samych obszarach przestrzeni fazowej. Ma on na ogół budowę fraktalną i jest nieokresowy.

[3] Basenem przyciągania atraktora jest zbiór punktów płaszczyzny, których orbity pozostają uwięzione w obszarze-pułapce. Obszar-pułapka jest całkowicie zawarty w obszarze przyciągania.

[4] Fraktale to obiekty, których części są (jakościowo) podobne do całości. Przykładem może być drzewo: relacja samopodobieństwa obejmuje ciąg drzewo – korzenie – korona – gałąź – liść.

[5] Wymiar fraktalny wyraża się liczbą ułamkową, ponieważ fraktale nie są obiektami ciągłymi i wypełnionymi. Wymiary topologiczne (–1, 0, 1, 2, 3 dla odpowiednio: zbioru pustego, punktu i zbioru punktów, linii prostej i odcinka prostej, płaszczyzny, bryły) nie są odpowiednie do mierzenia wymiaru takich obiektów, jak linia brzegu morza, pajęczyna, ser szwajcarski, chmura, powierzchnia morza, dym z komina itp.



Rysunek 1. Przewidywalne i nieprzewidywalne stany początkowe
Źródło: opracowanie własne na podstawie: H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe (cz. 2, 1996, s. 386), E.Ott (1997, s.190)

bieństwo losowego wyboru warunku początkowego p-niepewnego można określić jako stosunek rozmiaru (powierzchni, objętości) obszaru wyznaczonego linią przerywaną do pola (objętości) całego obszaru przyciągania (tzw. przestrzeni fazowej). Stosunek ten jest zatem funkcją p: $f(p)$. Dla brzegu, który nie jest fraktalem, występuje zależność wprost proporcjonalna $f(p) \sim p$. Dwukrotne zmniejszenie p (czyli dwukrotnie zwiększenie dokładności warunku początkowego) zmniejsza dwukrotnie potencjalną niepewność prognozy stanu końcowego procesu $x(i)$. Jeżeli jednak brzeg obszaru przyciągania sam jest fraktalem, wówczas $f(p)$ nie jest już funkcją liniową p. Mamy wówczas do czynienia z zależnością o charakterze nieliniowym: $f(p) \sim p^A$, $A = N - D$, gdzie N jest wymiarem przestrzeni fazowej, zaś D – wymiarem brzegu obszaru przyciągania. Jeżeli np. $A = 0{,}1$, to aby dwukrotnie zmniejszyć niepewność stanu końcowego $f(p)$ poprzez poprawę dokładności ustalenia warunku początkowego p, p należałoby zmniejszyć aż 2^{10}-krotnie! Parametr A nosi nazwę wykładnika niepewności, bowiem wraz z jego spadkiem pogarsza się sytuacja poprawy prognozowania poprzez zwiększenie dokładności warunku początkowego. Co więcej, wraz ze zmianą wymiaru fraktalnego obszaru przyciągania zmienia się poziom niepewności w przewidywaniu stanów końcowych orbit (trajektorii) punktów początkowych. W danych warunkach wymiary fraktalne brzegów basenów przyciągania (atraktorów) uzyskują jednoznaczną interpretację dynamiczną. Wraz ze wzrostem wymiaru fraktalnego rośnie niepewność prognozowania przebiegu trajektorii procesów gospodarczych. Jak można obliczyć wymiar fraktalny szeregów dynamiki gospodarczej?

B. Mandelbrot, w swojej klasycznej już monografii z 1982 roku zatytułowanej *Fraktalna geometria przyrody*, pisał zgodnie z Kantowską krytyką czystego rozumu, że „Chmury nie są kulami, góry nie są stożkami, wybrzeże morskie to nie koło, szczeknięcie psa nie jest łagodnym dźwiękiem, a błyskawica nie zakreśla linii prostej" (B. B. Mandelbrot, 1982). Geometria fraktalna umożliwia zrozumienie związku pomiędzy strukturą całkowicie przypadkowych kształtów i procesem ich powstawania i rozwoju oraz – analogicznie – pomiędzy strukturą cykliczną procesów dynamiki gospodarczej a wzrostem gospodarczym. Pierwszym, kto zwrócił na to uwagę, był W. D'Arcy Thompson, który w swojej pracy z 1917 roku *O wzroście i kształtach* (*On Growth and Form*) zauważył związek pomiędzy nieuporządkowaniem struktur i procesów przyrodniczych na mikroskopowym poziomie i uporządkowaniem zjawisk makroskopowych: kształtów, struktur i wzorów.

Struktury fraktalne charakteryzują się wymiarami pośrednimi pomiędzy wymiarami takich obiektów geometrycznych, jak punkty ($D = 0$), linie proste ($D = 1$), powierzchnie ($D = 2$), czy przestrzenie ($D = 3$). Poszarpany wykres kursów giełdowych ma wymiar pośredni $1 \leq D \leq 2$. Aby obliczyć wymiar fraktalny szeregów dynamiki gospodarczej, stosować będziemy metodę zaproponowaną przez P. Grassbergera i I. Procaccię (P. Grassberger, I. Procaccia, 1972).

Wymiar fraktalny przybliżany jest w procedurze wyznaczania całki korelacyjnej $C_m(R)$. Całka korelacyjna mierzy prawdopodobieństwo dwóch dowolnych punktów atraktora w odległości R od siebie wzajemnie. Rekonstrukcja szeregu czasowego odbywa się poprzez umieszczenie go w przestrzeni fazowej o niskiej pojemności $m = 2$. Jeżeli atraktor jest nieliniowym procesem dynamicznym, to będzie zachowywać swój wymiar niezależnie od wymiaru pojemnościowego obszaru, w jakim zostanie umieszczony: linia prosta zachowuje swój wymiar niezależnie od tego, czy przebiega dwuwymiarową płaską powierzchnię, czy też trójwymiarową przestrzeń. Punkty trajektorii nieliniowego atraktora natomiast są wzajemnie skorelowane i ulegają zagęszczaniu w określonych punktach. W błądzeniu przypadkowym brak autokorelacji powoduje, że punkty równomiernie zapełniają przestrzeń, w jakiej zostały umieszczone, i nie wykazują niezmiennego wymiaru niezależnego od wymiaru pojemnościowego przestrzeni.

Niech $f(p)=p^A$. Jeżeli dany proces umieścimy w skali podwójnie logarytmicznej, to otrzymamy równianie liniowe $\log[f(p)]=A\log(p)$. Mając dany wykładnik niepewności A możemy wyznaczyć wymiar fraktalny $d_f \approx A = \log[f(p)]/\log(p)$. Funkcja $f(p)$ maleje monotonicznie wraz ze wzrostem p i nie ma dolnej granicy. To zaś oznacza, że można poprzez zwiększanie ilości iteracji uzyskać obiekt o dowolnie małej gęstości.

Całkę korelacyjną liczymy zgodnie z formułą:

$$C_m(p) = \frac{1}{N^2} \times \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} Z(p - |x_i - x_j|),$$

gdzie:
$Z(x) = 1$, jeżeli $p = |x_i - x_j| > 0$, w pozostałych przypadkach $Z(x) = 0$,
N – liczba danych,
p – odległość,
C_m – całka korelacyjna dla wymiaru m.

$Z(x)$ jest zero-jedynkową funkcją Heaviside'a. Całka korelacyjna mierzy pewność tego, że dwa losowo wybrane punkty są oddalone od siebie o mniej niż p jednostek. Wraz ze wzrostem p całka korelacyjna rośnie wykładniczo w tempie p^A:

$$C_m = p^A,$$

tzn. otrzymujemy podwójnie logarytmiczną zależność liniową

$$\log(C_m) = A\log(p) + C,$$

(gdzie C = constans). W miarę zwiększania wymiaru pojemnościowego m wymiar korelacyjny A zbliżać się będzie do swojej prawdziwej wartości (E. E. Peters, 1997, s. 153–155).

Umieszczenie obiektu fraktalnego w wymiarze wyższym niż jego własny nie zmienia wymiaru fraktalnego ze względu na występującą korelację wzajemną między punktami. Dlatego wymiar korelacyjny liczony metodą Grassbergera i Procaccii jest dobrym oszacowaniem wymiaru fraktalnego.

Rysunek 5 zawiera wyniki obliczeń całek korelacyjnych (liczonych opisaną wyżej metodą) dla wymiarów pojemnościowych $m = 2, 3, ..., 10$. Następnie liczyliśmy regresję liniową w obszarach podwójnie logarytmicznych wykresów. Współczynnik kierunkowy regresji liniowej jest przybliżeniem wymiaru fraktalnego w przestrzeni fazowej. Wymiar fraktalny zbliżać się będzie do swojej prawdziwej wartości w miarę zwiększania wymiaru pojemnościowego m. Zbieżność ta jest wyraźnie widoczna na rysunku 6. Wyniki zostały zebrane w tabeli 3 i 4.

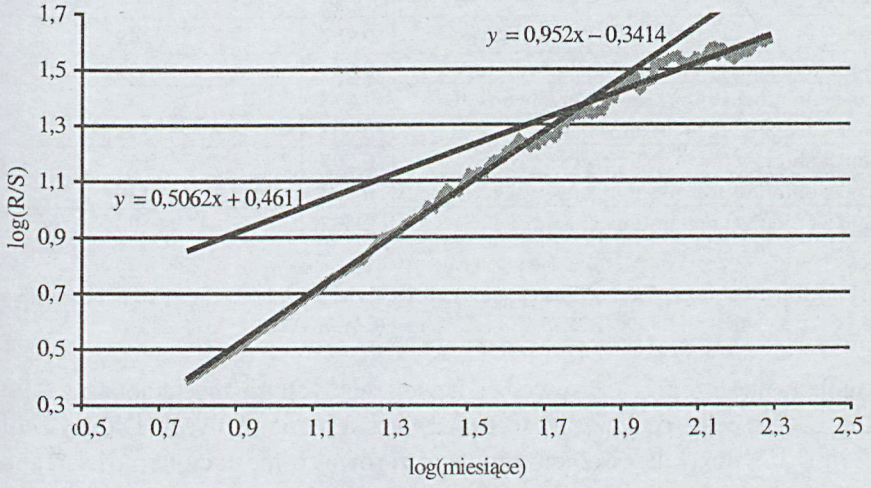
Program autorski przeprowadzający obliczenia całek korelacyjnych wymagał podania, poza wymiarem pojemnościowym i liczbą danych, takich parametrów początkowych, jak przesunięcie czasowe rekonstruowanej przestrzeni fazowej (t), przyrost stosowany w każdym pomiarze (dt), oraz odległość początkową (p). Przyjęte przez nas wartości p oraz dt wynosiły ok. 10% różnicy pomiędzy maksymalną i minimalną wartością analizowanego szeregu czasowego. Natomiast przy wyborze przesunięcia czasowego t korzystaliśmy z równania

$$m \times t = Q,$$

gdzie:
m – wymiar pojemnościowy,

t – przesunięcie czasowe,
Q – przeciętny okres orbitalny.

Opóźnienie czasowe stanowi zatem wielkość przeciętnego okresu orbitalnego przypadającą na jeden wymiar pojemnościowy. Jeżeli np. okres orbitalny wynosi 96 miesięcy, a wymiar pojemnościowy $m = 2$, to przesunięcie czasowe $t = 48$, dla $m = 4$ przesunięcie czasowe t maleje do 24, dla $m = 8$ $t = 12$ itd. Skąd jednak wiadomo, jaki jest okres orbitalny badanego procesu dynamicznego? Przeciętny okres orbitalny ustalaliśmy na podstawie analizy przeskalowanego zakresu (pomocna może się okazać także dekompozycja dyskretnej transformacji falkowej oraz analiza spektralna, por. E. E. Peters, 1997, s.72–104; J. T. Białosiewicz, 2000, s. 204–237; W. Łuczyński, 1998, s. 82–119). W analizie przeskalowanego zakresu (lub zasięgu, *rescaled range analysis*, R/S) obserwuje się zanik korelacji między obserwacjami w miarę wydłużania szeregu czasowego. Miarą takiej swoistej dekorelacji szeregów jest wykładnik Hursta: $C = 2^{(2H-1)}-1$, gdzie C – miara korelacji, H – wykładnik Hursta. Wykładnik Hursta równy 0,5 oznacza szereg quasi-losowy, dane procesy dynamiczne pozbawione są pamięci. Procesy dynamiczne, dla których wykładnik Hursta zawiera się w przedziale $0<H<0,5$ są, procesami antypersystentnymi lub ergodycznymi. Dane procesy mają tendencję powrotu do średniej, to znaczy po każdym odchyleniu od średniej jest bardziej prawdopodobne (w następnym okresie) odchylenie w przeciwnym kierunku niż zachowanie zgodne z trendem. Jeżeli natomiast $0,5<H<1$ to takie procesy dynamiczne wzmacniają trend, są procesami persystentnymi. Rysunek 2 ilustruje utratę pamięci przez procesy dynamiczne.



Rysunek 2. Analiza R/S miesięcznych wskaźników prognozy koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec (01.1971–12.2002, $N = 384$)
Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych IFO-Institut

Szeregi związane z koniunkturą przemysłową tracą pamięć po 30–90 miesiącach, natomiast szeregi tempa wzrostu cen produkcji oraz produkcji sprzedanej przemysłu przetwórczego wykazują znacznie dłuższą pamięć 140–190 miesięcy. Wykładniki Hursta kształtują się na poziomie 0,76–0,95. Tak wysokie wartości świadczą o tym, że dane procesy nie są błądzeniem przypadkowym, lecz są procesami persystentnymi wzmacniającymi trend. A to oznacza, że jeżeli obserwujemy wysokie (lub niskie) wartości, to bardzo prawdopodobne jest ich utrzymywanie się na raczej wysokim (lub niskim) poziomie w następnym okresie. Takie procesy są w istocie fraktalami. Dynamika produkcji przemysłowej natomiast wykazuje, że produkcja sprzedana przemysłu przetwórczego Niemiec jest procesem antypersystentnym lub ergodycznym, jego zmienność ma cechy błądzenia przypadkowego, a momentami przewyższa zmienność procesów losowych. W okolicach cyklu 90-miesięcznego obserwujemy nieznaczną zmianę wykładnika Hursta (z 0,502 do 0,522). W miarę wydłużania okresów ruchu orbitalnego trajektorii produkcji przemysłowej poprawia się pamięć danego procesu: wyższą korelację obserwujemy dla zjawisk oddalonych od siebie w czasie o 90 i więcej miesięcy. Zależność ta nie jest spowodowana żadnymi procesami odpowiedzialnymi za krótkookresowe zależności, jakimi są np. procesy autoregresji AR. Omówione cykle to cykle przeciętne, nieokresowe, które są charakterystyczne dla nieliniowych procesów dynamicznych. Cykle te, ze względu na swą nieokresowość, są niewykrywalne metodami analizy spektralnej.

Tabela 1. Analiza przeskalowanego zakresu R/S wybranych szeregów czasowych (wykładnik Hursta)

Szereg czasowy	H	Cykl (w miesiącach) = 1/*H*
Prognoza koniunktury przemysłu przetwórczego	0,952	49
Diagnoza koniunktury przemysłu przetwórczego	0,941	90
Prognoza cen produkcji przemysłu przetwórczego	0,873	32
Dynamika cen produkcji przemysłowej	0,803	192
Dynamika obrotów przemysłu przetwórczego*)	0,795	151
Dynamika obrotów przemysłu przetwórczego **)	0,757	138
Dynamika produkcji przemysłowej netto	0,502	90

*) w ujęciu nominalnym **) w ujęciu realnym

Źródło: obliczenia własne przy wykorzystaniu programu autorskiego zgodnie z algorytmem opisanym przez E. E. Petersa (1997, s. 235–238), A. Weron, R. Weron (1998, s. 324–330).

Analizowane szeregi czasowe wielkości realnych są niestacjonarne. Zastosowany w tym celu rozszerzony test pierwiastka jednostkowego Dickey-Fullera (ADF-test) nie pozwala odrzucić hipotezy zerowej o niestacjonarności realnych sygnałów. Natomiast są podstawy do odrzucenia hipotezy o istnieniu pierwiastka jednostkowego szeregów jakościowych, związanych z subiektywnymi ocenami koniunktury gospodarczej i zmian cen. Wartości krytyczne odrzucenia

hipotezy zerowej kształtowały się (przy określonym jedno-, pięcio- i dziesięcioprocentowym poziomie popełnienia błędu) następująco:

1% – –2,5710,
5% – –1,9403,
10% – –1,6161.

Tabela 2. Wyniki testu pierwiastka jednostkowego Dickey-Fullera

Szereg czasowy	Statystyka ADF
Prognoza koniunktury przemysłu przetwórczego	–2,268996
Diagnoza koniunktury przemysłu przetwórczego	–4,281191
Prognoza cen produkcji przemysłu przetwórczego	–3,823928
Dynamika cen produkcji przemysłowej	–0,074745
Dynamika obrotów przemysłu przetwórczego*)	–0,557636
Dynamika obrotów przemysłu przetwórczego **)	–0,568553
Dynamika produkcji przemysłowej netto	–1,221020

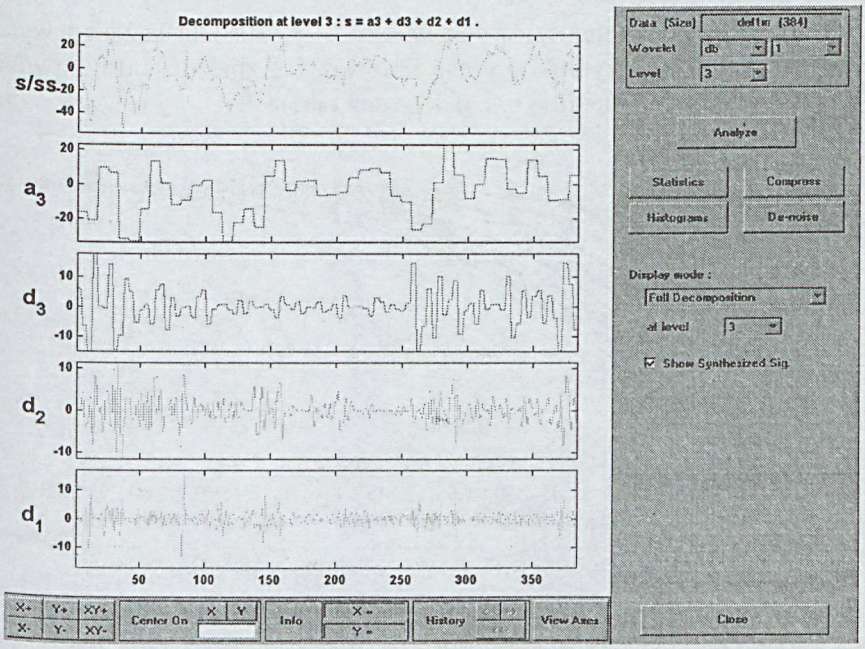
*) w ujęciu nominalnym **) w ujęciu realnym
Źródło: obliczenia własne na podstawie programu E-Views v.3.0s.

Niestacjonarne szeregi czasowe wymagają analizy w płaszczyźnie czas – częstoliwość. Odwołamy się do wielorozdzielczej, dyskretnej analizy falkowej[6] oferowanej przez środowisko Wavelet Toolbox MATLAB-a oraz pakiet TimeStat. W dekompozycji sygnału zastosowaliśmy dostępny w Wavelet Toolbox oraz w TimeStat filtr Daubechiesa (J. T. Białosiewicz, 2000, s. 111–114). W rezultacie dekompozycji otrzymujemy składowe wysokoczęstotliwościowe d_i, zwane detalami, oraz składową niskoczęstotliwościową (nie poddawaną już dalszej filtracji) a_i, zwaną aproksymacją analizowanego szeregu czasowego (tzw. sygnału – S). Proces dekompozycji oryginalnego sygnału jest procesem iteracyjnym, w wyniku którego uzyskujemy jego rozłożenie na wiele składowych o malejącej rozdzielczości (w stosunku do aproksymacji). Procesem odwrotnym do procesu dekompozycji jest synteza albo rekonstrukcja sygnału (SS – synthesized signal), umożliwiająca jego odtworzenie na podstawie detali oraz aproksymacji. W procesie rekonstrukcji (przy właściwym doborze filtrów) można usunąć zakłócenia występujące w sygnale oryginalnym i – dzięki temu – idealnie go odtworzyć. Ponadto analiza falkowa umożliwia wykrycie – niewidocznego gołym okiem – momentu, w jakim pojawiają się nieciągłe zmiany częstotliwości sygnału. Takie zmiany są niewykrywalne metodami analizy

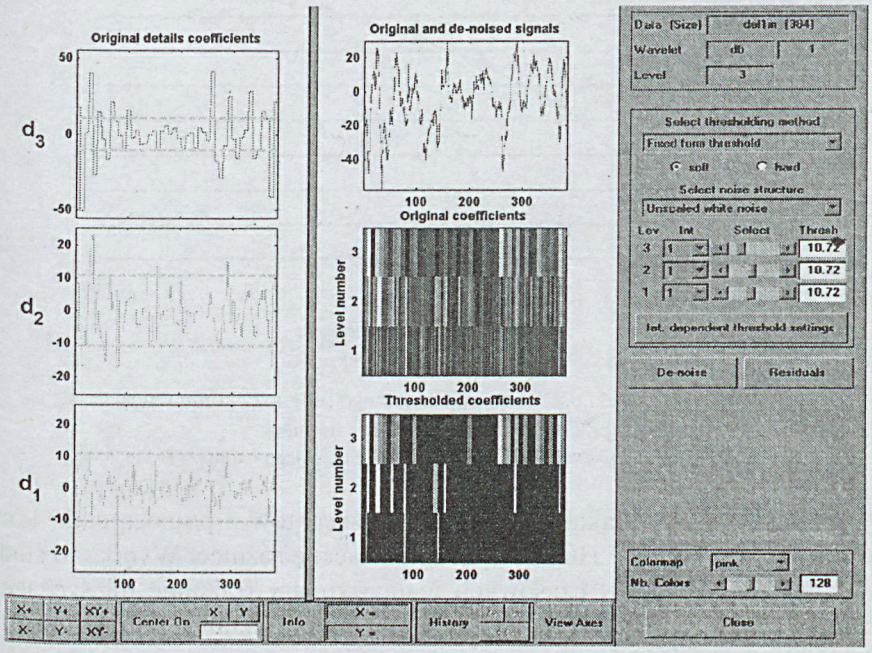
[6] Falką jest funkcja $\Psi(t) \in L_2(\mathrm{R})$ taką, że układ $\Psi_{j,k} =: 2^{j/2}\Psi(2^j t - k)$, gdzie j, k to dowolne liczby całkowite, jest bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta $L_2(R)$; zob. P. Wojtaszczyk (2000, s. 8).

spektralnej lub transformatą Fouriera. Widoczna na wykresie detalu d_1 (rys. 3) igła odpowiada danym z listopada–grudnia 1977 roku. W tym okresie, jak można przypuszczać, nastąpiła skokowa zmiana częstotliwości badanego sygnału. Po usunięciu szumu zauważamy zmianę polegającą na usunięciu w każdym paśmie częstotliwości współczynników o niewielkiej amplitudzie (nie przewyższającej ustalonego automatycznie progu). Podobne zmiany można zaobserwować dla danych prognostycznych koniunktury gospodarczej w przemyśle przetwórczym Niemiec w okresie po czerwcu–lipcu 1980 roku oraz po wrześniu 1980 roku dla danych jakościowych prognoz cen. Dla danych opisujących zmiany cen produkcji przemysłu przetwórczego zmiana ich częstości nastąpiła w grudniu 1967–styczniu 1968 roku, w grudniu 1968–styczniu 1969 roku oraz w styczniu–lutym 1975 roku. Cezura zmiany obrazu częstotliwości obrotów i dynamiki produkcji przemysłu przetwórczego Niemiec odnosi się zgodnie do maja–czerwca 1984 roku. Przy czym dla danych nominalnych szeregu dynamiki obrotów w przemyśle obserwujemy zmianę częstości w styczniu–lutym 1975 roku. Ponieważ takiej zmiany nie ma w szeregu czasowym realnej dynamiki obrotów, można przypuszczać, że to wzrost cen wywindował amplitudę ich wahań. Usunięcie wpływu cen na dynamikę procesów ekonomicznych ma, jak widać, dużą wagę metodologiczną. Analiza falkowa pozwala zatem sformułować tezę, iż każdorazowo po kryzysach lat: 1966/67 1974/75 oraz 1980–83 częstotliwość wahań gospodarczych Niemiec ulegała nieciągłym, skokowym zmianom. Kryzysy zatem stanowiłby swoiste przełączniki pomiędzy odmiennymi strukturami cyklicznymi. Przerwanie ciągłości w strukturze częstościowej dynamiki gospodarczej odbywałoby się skokowo w formie kryzysu. Można mówić tu o zjawisku histerezy w obszarze czasowej częstotliwości cyklu. Ma to kapitalne znaczenie dla prognozowania, daje bowiem wskazówkę o konieczności wprowadzenia odpowiednich poprawek do stosowanych modeli prognostycznych. Te ostatnie nie mogą pozostawać inwariancyjne w warunkach zmiany częstotliwości prognozowanych zjawisk gospodarczych.

Wymiar fraktalny D związany jest ze współczynnikiem Hursta formułą $D = 2 - H$. Jeżeli zatem system jest pozbawiony długotrwałej pamięci i $H = 0{,}5$, to wymiar fraktalny szeregu czasowego $D = 1{,}5$. Dla $0{,}5 \leq H < 1$ wymiar fraktalny wykresu zawierać się będzie w przedziale $<1{,}5, 1)$, linia wykresu będzie gładsza i mniej postrzępiona niż w błądzeniu losowym. Jeżeli zaś $0<H<0{,}5$, wówczas wyższy wymiar fraktalny szeregu czasowego generowanego przez antypersystentny system oznacza bardziej postrzępioną linię wykresu. W danym przypadku bardzo łatwo dochodzi do odwrócenia trendu. Dane wymiaru fraktalnego badanych szeregów zawarte w tabeli 2 uzupełnione zostały analizą zbieżności całek korelacyjnych. Zwiększanie wymiaru pojemnościowego pozwala uzyskiwać zbieżność wymiaru fraktalnego w przestrzeni fazowej do swojej prawdziwej wartości. Rysunek 5 ilustruje wartości całek korelacyjnych oblicza-

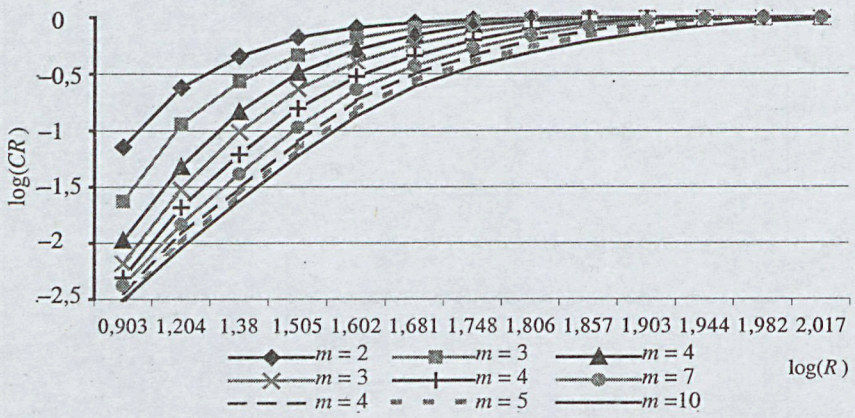


Rysunek 3. Dekompozycja szeregu prognozy koniunktury w przemyśle na poziomie 3
Źródło: obliczenia własne w środowisku Matlab 6.1

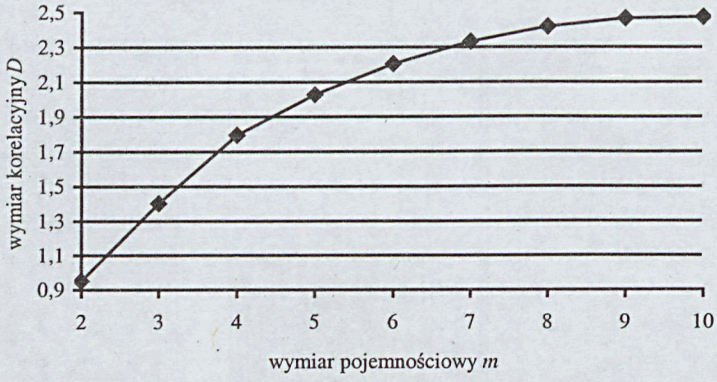


Rysunek 4. Mechanizm usuwania szumu z danych prognozy koniunktury w przemyśle
Źródło: obliczenia własne w środowisku Matlab 6.1

nych dla wymiarów pojemnościowych $m = 2, 3, ..., 10$. Dla każdego wykresu obliczone zostały współczynniki regresji liniowej. Ich zbieżność do prawdziwego wymiaru fraktalnego ilustruje rysunek 6 oraz tabela 3.



Rysunek 5. Całki korelacyjne prognozy koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego i arkusza Excel 2000



Rysunek 6. Zbieżność wymiaru fraktalnego prognozy koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego i arkusza Excel 2000

Pomiary wymiarów fraktalnych badanych szeregów z pomocą całki korelacyjnej i z pomocą formuły Hursta wykazują znaczne różnice. Wynika to stąd, że liniowe wykresy szeregów czasowych mają wymiary fraktalne mieszczące się w przedziale od 1 (wymiar prostej) do 2 (wymiar fraktalny płaszczyzny). Na wielkość wymiaru fraktalnego ma tu wpływ jedna tylko zmienna. Natomiast wymiar fraktalny tego samego szeregu czasowego umieszczonego w przestrzeni

Tabela 3. Wymiary korelacyjne szeregów jakościowych i ilościowych koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec

m	prog_prz	diag_prz	prog_cen	ceny	obr_nom	obr_real	przem
2	0,951445	1,240533	0,910138	0,676736	0,858696	0,791542	0,347190
3	1,402252	1,682157	1,382535	0,991661	1,407128	1,274781	0,562051
4	1,796921	1,925025	1,812967	1,458209	1,906166	1,784620	0,799762
5	2,027689	1,916431	2,039003	1,579563	2,288900	2,162704	1,039919
6	2,205401	2,070042	2,265423	1,818872	2,561587	2,465001	1,322552
7	2,332816	2,088710	2,356946	1,927166	2,752121	2,668146	1,540987
8	2,418274	2,064701	2,469352	1,980347	2,909867	2,812107	1,709492
9	2,464034	2,033451	2,488521	2,088133	2,944901	2,903846	1,902097
10	2,473943	1,982044	2,540476	2,145300	3,033046	3,006264	2,047208

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego i arkusza Excel 2000.

Tabela 4. Wymiary fraktalne wybranych jakościowych i ilościowych wskaźników koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec

Szereg czasowy	Całki korelacyjne zbieżne do D	Formuła Hursta $D = 2–H$
Prog_przem	2,473943	1,242122
Diag_przem	1,982044	1,145053
Prog_cen	2,540476	1,273605
Ceny	2,145300	1,119253
Obr_nom	3,033046	1,203219
Obr_real	3,006264	1,233204
przem	2,047208	1,431357

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego i arkusza kalkulacyjnego Excel 2000.

fazowej obejmuje wszystkie zmienne opóźnione i zależy od korelacji pomiędzy nimi i nieopóźnionymi danymi szeregu. Dlatego na jego poziom ma wpływ stopień złożoności badanego szeregu. Wymiar fraktalny dynamiki produkcji przemysłowej Niemiec (mierzony formułą Hursta) jest najbliższy wymiarowi fraktalnemu błądzenia przypadkowego. Dowodziłoby to, że jedynym antypersystentnym procesem jest produkcja przemysłowa, odwrócenie trendu następuje tutaj względnie częściej aniżeli w pozostałych szeregach czasowych. Jest to ważna wskazówka w prognozowaniu dynamiki produkcji przemysłowej. Ponadto przyjęcie cyklu przemysłowego jako cyklu referencyjnego dla persystentnych procesów byłoby w tych warunkach niewskazane. Wymiary fraktalne szeregów czasowych umieszczonych w przestrzeni fazowej mieszczą się w przedziałach od 1 do 2, od 2 do 3 i powyżej 3. Oznacza to, że np. w przypadku wskaźników diagnozy koniunktury w niemieckim przemyśle przetwórczym niezbędne są dwie zmienne do ich modelowania. Trzy zmienne pozwalają mo-

delować prognozę koniunktury przemysłu przetwórczego, prognozę cen przemysłowych, ich dynamikę oraz dynamikę produkcji przemysłu przetwórczego. Natomiast do opisu dynamiki nominalnych (bieżących) i realnych obrotów przemysłu przetwórczego niezbędne będą aż cztery zmienne. Dynamika tych procesów jest względnie bardziej złożona i jej modelowanie może okazać się trudne. Uzyskane wyniki stwarzają obiecującą perspektywę w modelowaniu dynamiki produkcji przemysłowej, dynamiki cen oraz wskaźników jakościowych koniunktury gospodarczej. Mimo że przeprowadzona analiza nie pozwala na zidentyfikowanie zmiennych objaśniających (problem ich doboru wymaga zastosowania specjalnych metod[7]), to jednak pozwala na rekonstrukcję dwu- i trójwymiarowych „portretów" fazowych nieliniowych systemów dynamicznych. Stwarza to realną perspektywę efektywnego prognozowania takich systemów.

Aby ocenić tempo zanikania zdolności prognozowania badanych procesów, przeprowadzono obliczenia pozwalające ocenić zbieżność wykładników Lapunowa do stabilnej wartości. Wartość najwyższego wykładnika Lapunowa określa szybkość zaniku zdolności przewidywania przyszłych zachowań systemu (w bitach na jednostkę czasu). Dodatnie wartości wykładnika Lapunowa są miarą wrażliwości systemu na zmiany warunków początkowych. Prognoza oparta na niedokładnym pomiarze warunków początkowych systemu będzie (w zależności od rozmiarów błędu pomiarowego) wolniej lub szybciej odbiegać od rzeczywistego rozwoju systemu. Każdy wymiar fraktalny atraktora ma swój wykładnik Lapunowa, który jest w istocie miarą dynamiki atraktora[8]. Jeżeli np. dane wyjściowe (inaczej: warunki początkowe) zmierzone są z dokładnością do jednego bita na miesiąc (dla danych miesięcznych), wartość najwyższego wykładnika Lapunowa 0,02041 (dla prognozy koniunktury przemysłu przetwórczego) oznacza zanikanie zdolności prognozowania danego procesu w tempie 0,02041 bita na miesiąc. Zdolność prognostyczna zaniknie zatem po upływie 1/0,02041 miesięcy, tzn. gdy osiągnie wartość (jednobitowej) dokładności pomiaru warunków początkowych. W danym przypadku będzie to okres 49 miesięcy. Po tym okresie system traci, jak to stwierdziliśmy wyżej z pomocą analizy przeskalowanego zasięgu *R/S*, pamięć. Jego prognozowanie po tym okresie nie jest zatem możliwe. Oznacza to, że wartość danych historycznych, na podstawie których budowane są prognozy po przekroczeniu wartości progowej horyzontu prognozy (ustalonej przez najwyższy wykładnik Lapunowa), jest żadna. Obliczanie wykładników Lapunowa jest czasochłonne, wymaga bowiem wielu prób z różymi parametrami. Ich dobór jest w gruncie rzeczy eksperymentalny i sprawia wraże-

[7] Por. Z. Hellwig (1969), J. S. Armstrong (1978), M. Cieślak (red., 2001, s. 106–108), P. Dittmann (2000, s.111–112).

[8] Zob. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano (1985), E. E. Peters (1997, s. 166–179).

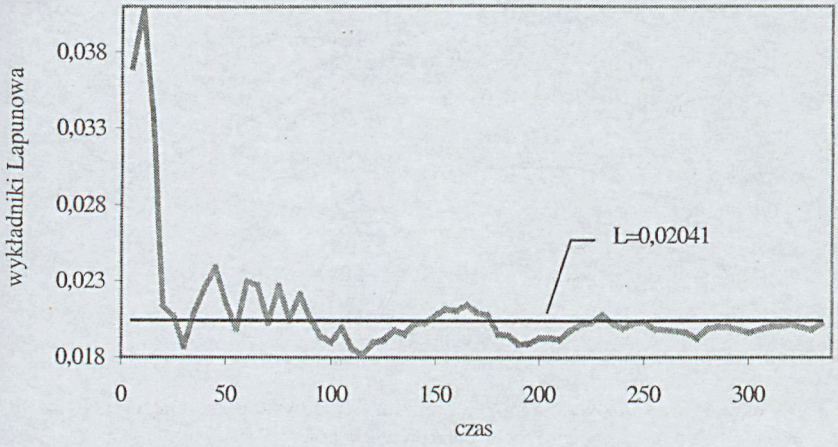
nie dobierania danych do znanego wyniku. Metodologiczne wskazówki Wolfa i in. to jedynie do niczego nie zobowiązujące sugestie. W istocie wynik zależy od liczby eksperymentów numerycznych. Dobór parametrów dotyczy wymiaru pojemnościowego *m*, przesunięcia czasowego rekonstruowanej przestrzeni fazowej *tau*, czasu ewolucji systemu *evolv* oraz minimalnego czasu między parami punktów atraktora *lag*. Parametry te są dobierane tak, aby zbieżność wykładnika Lapunowa (L) nie odbiegała rażąco od wyników analizy *R/S*. Tabela 5 zawiera wymienione parametry.

Tabela 5. Parametry i wyniki obliczeń najwyższego wykładnika Lapunowa

Szereg	*m*	*tau*	*evolv*	*lag*	*L*	1/*L* (w miesiącach)
Prog_prz	3	16	5	3	0,02041	49
Diag_prz	3	30	3	5	0,01100	91
Prog_cen	3	11	3	5	0,03100	32
Ceny	4	48	6	2	0,00520	192
Obr_nom	5	30	6	1	0,00660	152
Obr_real	5	28	3	1	0,00720	139
Przem	3	30	6	1	0,01110	90

Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego.

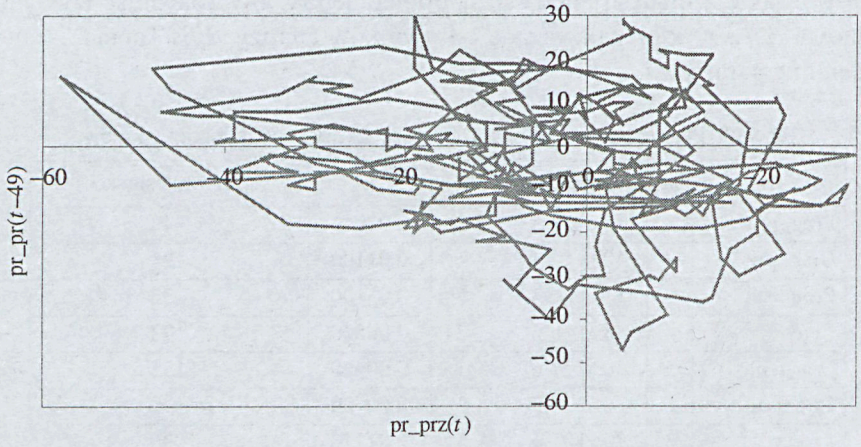
Poniższy wykres ilustruje zbieżność wykładników Lapunowa do stabilnej wielkości *L* określającej tempo zaniku zdolności przewidywania zachowania się badanych procesów (w bitach na miesiąc). Uzyskane wyniki są zgodne z wynikami analizy *R/S*.



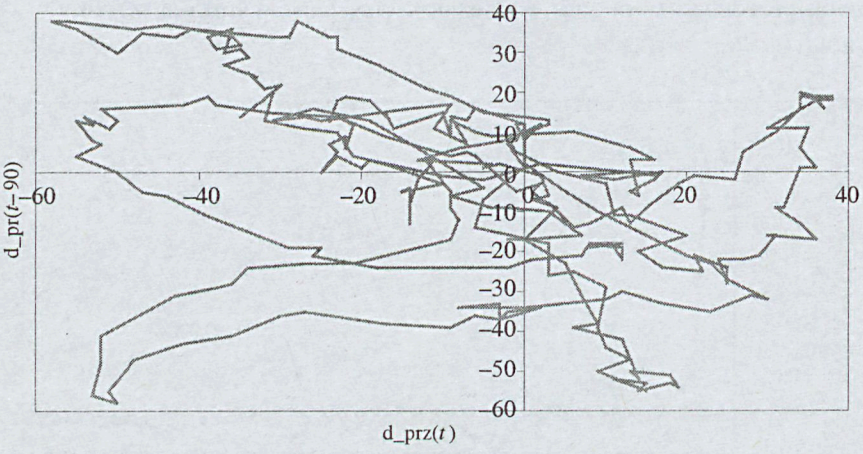
Rysunek 7. Zbieżność najwyższego wykładnika Lapunowa prognozowania koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: obliczenia własne na podstawie programu autorskiego

BIBLIOTEKA AE

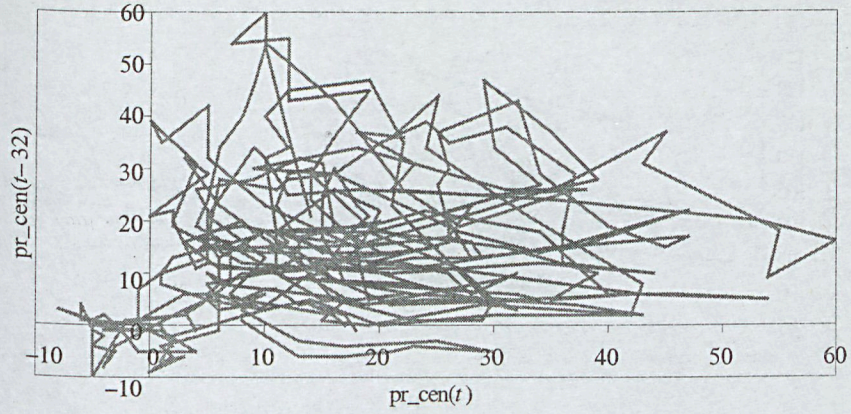
Zrekonstruowane dzięki przeprowadzonej analizie portrety fazowe dziwnych atraktorów wykazują nie tylko samopodobieństwo (co jest cechą charakterystyczną obiektów fraktalnych), lecz ponadto wykazują znaczne podobieństwo wzajemnie.



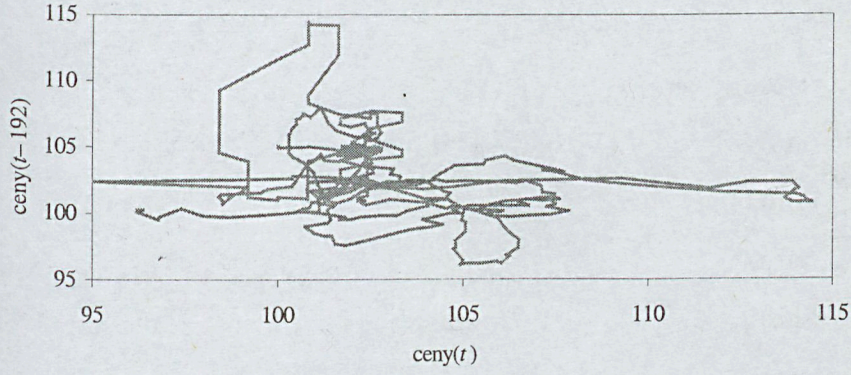
Rysunek 8. Portret fazowy prognoz koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



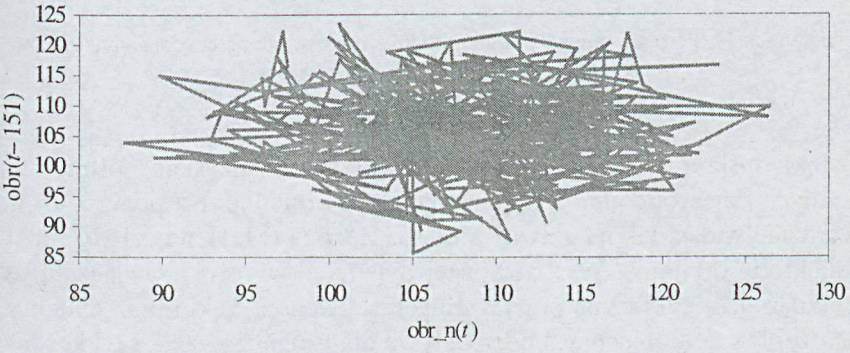
Rysunek 9. Portret fazowy diagnoz koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



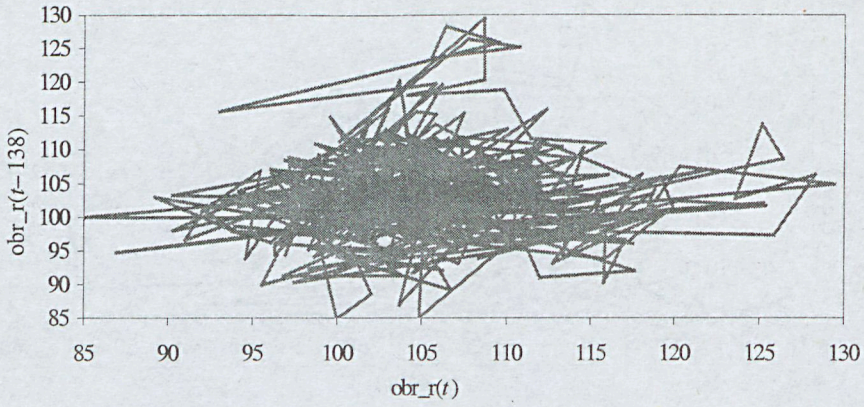
Rysunek 10. Portret fazowy prognoz cen przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



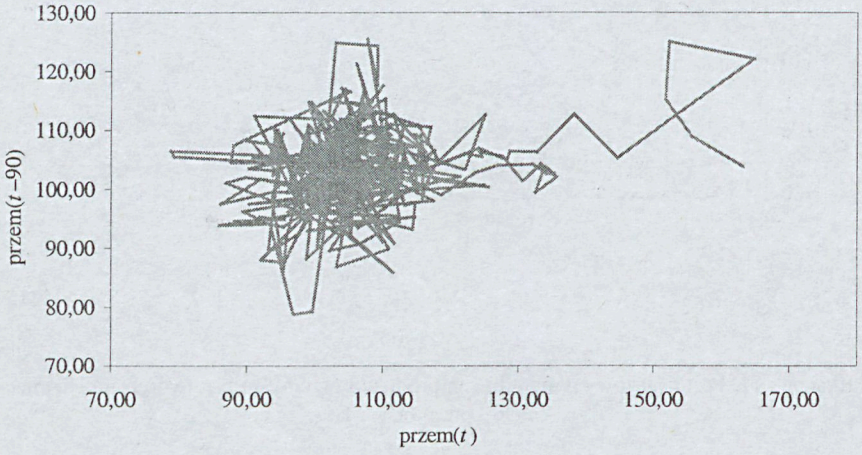
Rysunek 11. Portret fazowy dynamiki cen produkcji przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



Rysunek 12. Portret fazowy dynamiki obrotów bieżących przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne

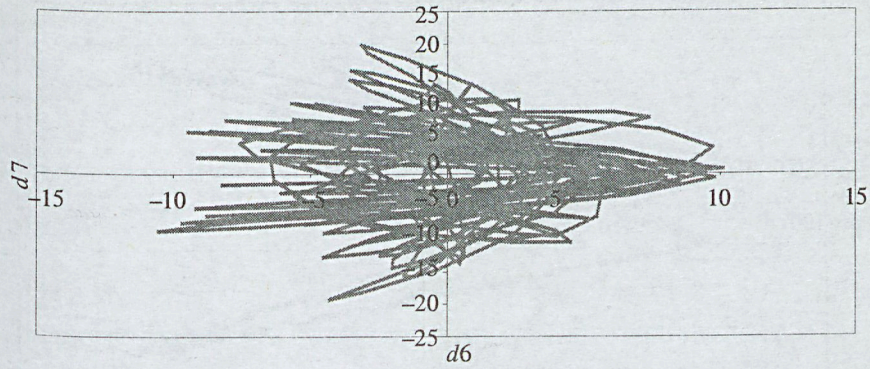


Rysunek 13. Portret fazowy dynamiki obrotów realnych przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne

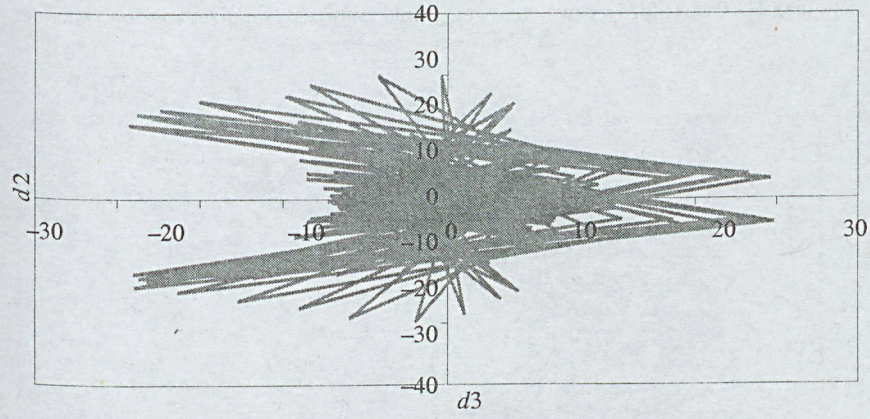


Rysunek 14. Portret fazowy dynamiki produkcji przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne

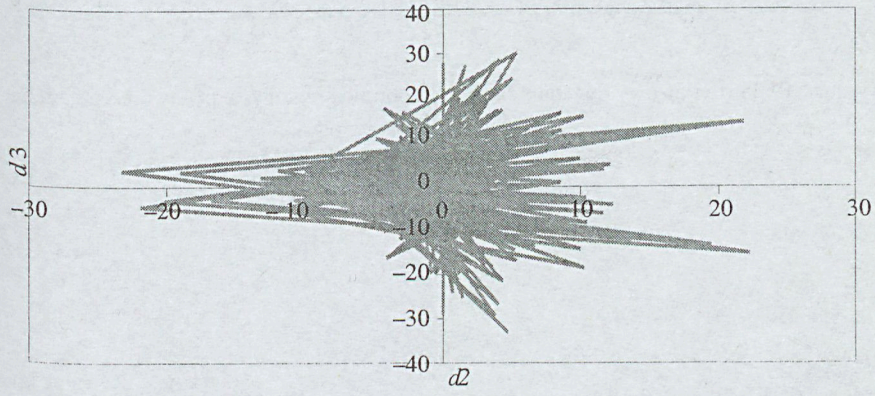
Dzięki dyskretnej transformacji falkowej można uzyskać portrety fazowe zawierające trajektorie chaotyczne i trajektorie orbitalne. Na poniższym wykresie wyraźnie widać, jak na dziwny atraktor Hénona (M. Hénon, 1976) nakładają się trajektorie orbitalne. W chaotycznej dynamice wyraźnie zaznaczają się wyspy regularnych, cyklicznie powtarzalnych sekwencji. Taki obraz dynamiki gospodarczej stwarza obiecującą perspektywę dla prognozowania szybkości zmian procesów ekonomicznych. Bez cyklicznie powtarzających się zjawisk prognozowanie gospodarki byłoby bowiem zasadniczo niemożliwe.



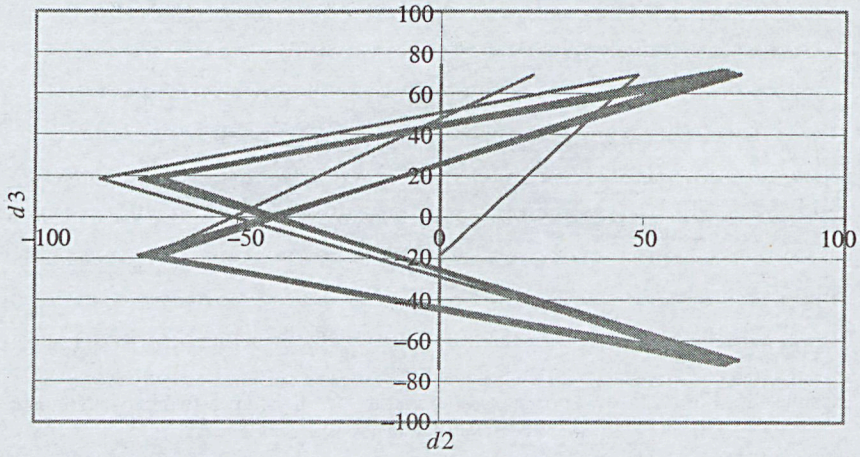
Rysunek 15. Portret fazowy prognozy koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



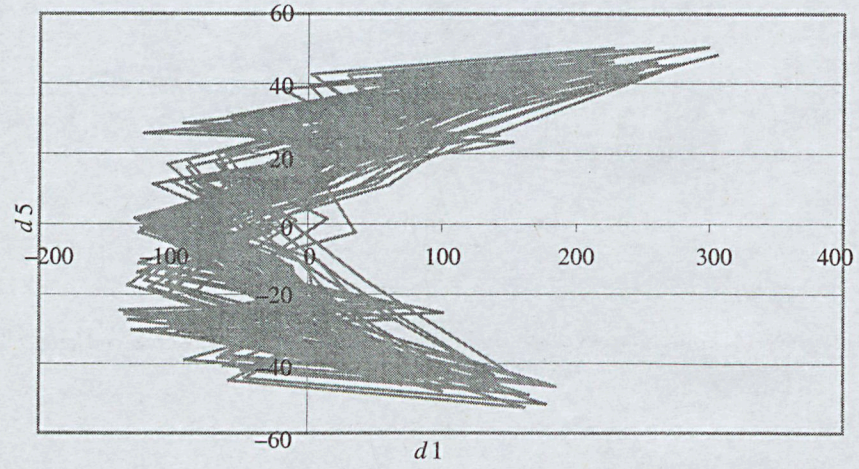
Rysunek 16. Portret fazowy diagnozy koniunktury przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



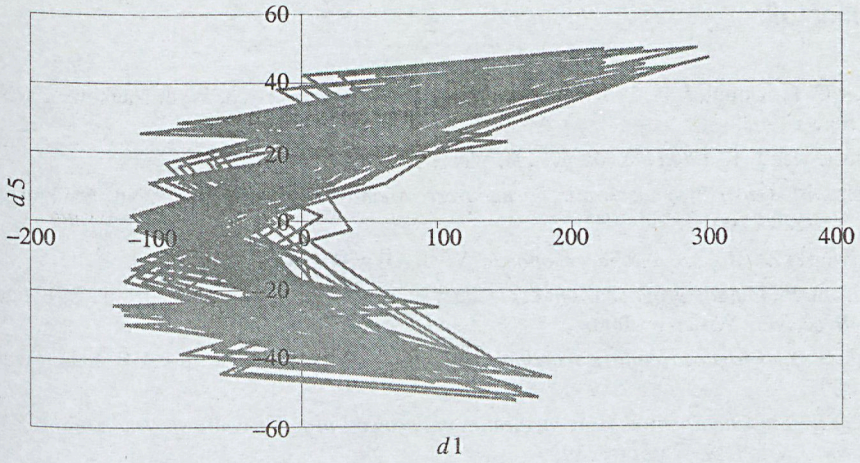
Rysunek 17. Portret fazowy prognozy cen przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



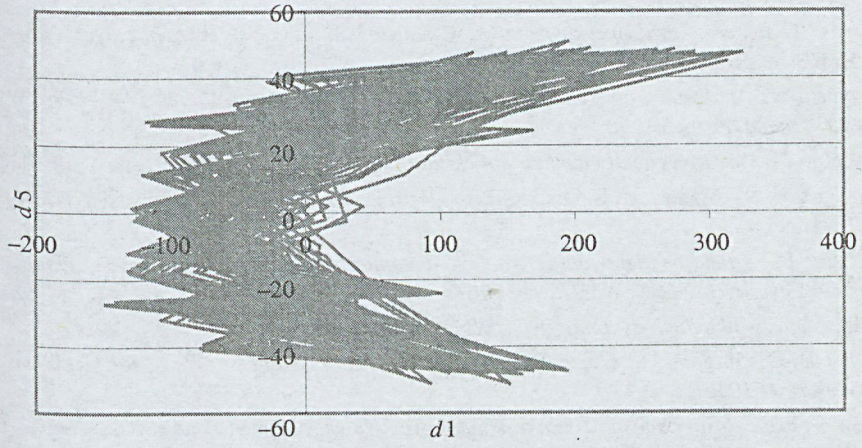
Rysunek 18. Portret fazowy dynamiki cen produkcji przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



Rysunek 19. Portret fazowy dynamiki bieżących obrotów przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



Rysunek 20. Portret fazowy dynamiki realnych obrotów przemysłu przetwórczego Niemiec
Źródło: opracowanie własne



Rysunek 21. Portret fazowy dynamiki produkcji przemysłowej Niemiec
Źródło: opracowanie własne

W uzyskanych portretach fazowych dominują trajektorie chaotyczne. Nie są one jednak jedynymi trajektoriami badanych procesów. Prognozowanie stanów danych procesów jest możliwe na podstawie trajektorii cyklicznych oraz odkrytych (dzięki analizie wymiaru fraktalnego, analizie przeskalowanego zakresu, zbieżności najwyższych współczynników Lapunowa oraz analizie falkowej) własności trajektorii chaotycznych. Ze względu na nieliniowość związków i zależności badanego układu efektywnym narzędziem prognostycznym może okazać się procedura oferowana przez szybko rozwijające się sztuczne sieci neuronowe (J. Gajda, 2001, s.116).

Bibliografia

Baker G. L., Gollub J. P., *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1998.

Białosiewicz J. T., *Falki i aproksymacje*, WNT, Warszawa 2000.

Cieślak M. (red), *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Czerwiński Z., *Moje zmagania z ekonomią*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2002.

Dittmann P., *Metody prognozowania sprzedaży w przedsiębiorstwie*, Wyd. AE im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000.

Gajda J. B., *Prognozowanie i symulacja a decyzje gospodarcze*, Wyd. C. H. Beck, Warszawa 2001.

Gately E., *Sieci neuronowe. Prognozowanie finansowe i projektowanie systemów transakcyjnych*, Wyd. WigPress, Warszawa 1999.

Grassberger P., Procaccia I., *Characterization of Strange Atractors*, „Physical Review Letters" 1972, 48.

Hénon M., *Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*, „Communications in Mathematical Physic" 1976, 50.

Lula P., *Jednokierunkowe sieci neuronowe w modelowaniu zjawisk ekonomicznych*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków 1999.

Łuczyński W., *Analiza dynamiki procesów gospodarczych Niemiec w latach 1949–1996*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 1998.

Mandelbrot B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York 1982.

Montegna R. N., Stanley H. E., *Ekonofizyka. Wprowadzenie*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2001.

Morrison F., *Sztuka modelowania układów dynamicznych, deterministycznych, chaotycznych, stochastycznych*, WNT, Warszawa 1996.

Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997.

Peitgen H.-O., Jürgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*, cz. 2, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1996.

Peters E. E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe. Nowe spojrzenie na cykle, ceny i ryzyko*, WIG-Press, Warszawa 1997.

Tempczyk M., *Teoria chaosu a filozofia*, Wyd.CiS, Warszawa 1998.

Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, WNT, Warszawa 1998.

Wojtaszczyk P., *Teoria falek. Podstawy matematyczne*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2000.

Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A., *Detrmining Lyapunov exponents from a time series*, p. 285-317, „Physica" July 1985, 16D, No. 3.

Wiesław Łuczyński

An attempt to apply periodical trajectories and chaotic attractors in forecasting economic phenomena

Summary

First the basic concepts used in the article are discussed. Then, having discussed the way of determining correlation integral, fractal dimension, the author calculates average orbital periods and Hurst's indexes of the time series of economic dynamics of Germany. Further on, having examined the stationary character of the time series by means of unit root test (Augmented Dickey-Fuller's test) a discreet wavelet analysis was conducted in the Matlab environment. Thanks to this analysis it was possible to determine the moment of change in the frequency structure of the time series (undetectable when using spectral analysis methods). On the basis of the calculated correlation integrals the author determines fractal dimensions of the studied series. Evaluation of the rate of disappearance of information in the analysed processes on the basis of calculations of convergence of Lapunov's exponents to a stable value made it possible to determine the period of credibility of the forecast as regards the course of the given processes. Phase portraits of strange attractors reconstructed thanks to the conducted analysis show not only self-similarity (which is a characteristic feature of the fractal objects) but also a significant mutual similarity.

Część II

BADANIE KONIUNKTURY