Henryk J. RUNKA

Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

OGRANICZENIA NA ZMIENNE W ALGORYTMACH PUNKTÓW WEWNĘTRZNYCH

Wprowadzenie

W artykule rozważa się struktury układów prymalno-dualnych z dolnymi i górnymi ograniczeniami na zmienne (w układzie prymalnym) w optymalizacji liniowej i kwadratowej. Uzyskane wyniki mają istotny wpływ na rozmiary zadań rozwiązywanych za pomocą algorytmów prymalno-dualnych. W początkowym układzie ograniczeń w algorytmach prymalnych rozważa się warunki w postaci nierówności i równań, które występują w realnych zadaniach. W tzw. algorytmach punktów wewnętrznych kolejnymi rozwiązaniami w procedurze iteracyjnej mogą być wektory, które nie są wierzchołkami, lecz na przykład punktami wewnętrznymi zbioru rozwiązań dopuszczalnych. W ogólnych układach ograniczeń zmienne dualne mogą przyjmować dowolne wartości. Ze względu na teoretyczne własności tych algorytmów są one włączane do komercyjnego oprogramowania, na przykład SAS/OR, [12]. W artykule rozważany jest uogólniony układ prymalny i wynikający z niego układ prymalno-dualny oraz konstrukcje algorytmów prymalno-dualnych punktów wewnętrznych. Zgodnie z [10], rozróżnianie podukładów ograniczeń w postaci równań i nierówności ma znaczenie o tyle, że prowadzi do mniejszej liczby ograniczeń prymalno-dualnych aniżeli automatyczne przekształcanie podukładów nierówności w równania.

1. Ograniczenia prymalno-dualne

Rozważmy problem *optymalizacji liniowej* (POL) postaci:

(P) $\min c^{\mathrm{T}} x$,

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle} x \geqslant b_{\langle 1\rangle},\quad A_{\langle 2\rangle} x = b_{\langle 2\rangle},\quad l \leqslant x \leqslant u,$$

gdzie:

$$A_{\langle 1\rangle} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n},\quad A_{\langle 2\rangle} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n},\quad b_{\langle 1\rangle} \in \mathbb{R}^{m_1},\quad b_{\langle 2\rangle} \in \mathbb{R}^{m_2},$$

$$l \in \mathbb{R}^n_+,\quad u \in \mathbb{R}^n_+,\quad l \leqslant u,\quad x \in \mathbb{R}^n_+,\quad m = m_1 + m_2,$$

którego układ ograniczeń można zapisać w następujący równoważny sposób (po prawej stronie występują oznaczenia powiązanych z blokami ograniczeń zmiennych dualnych):

$$\begin{bmatrix} A_{\langle 1\rangle} x & -Iy & & \\ A_{\langle 2\rangle} x & & & \\ Ix & & -Iv & \\ -Ix & & & -Iw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\langle 1\rangle} \\ b_{\langle 2\rangle} \\ l \\ -u \end{bmatrix} \begin{matrix} // \pi \\ // \rho \\ // s_{\langle l\rangle} \\ // s_{\langle u\rangle} \end{matrix} \tag{1}$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^{m_1}_+$, $v, w \in \mathbb{R}^n_+$.

Problem dualny (D) względem (P) – uwzględniając (1) – ma postać [9, rozdz. 2]:

(D) $\max b^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle} \pi + b^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle} \rho + l^{\mathrm{T}} s_{\langle l\rangle} - u^{\mathrm{T}} s_{\langle u\rangle}$,

przy ograniczeniach:

$$A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle} \pi + A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle} \rho + s_{\langle l\rangle} - s_{\langle u\rangle} = c,$$

gdzie:

$$\pi \in \mathbb{R}^{m_1}_+,\quad \rho \in \mathbb{R}^{m_2},\quad s_{\langle l\rangle} \in \mathbb{R}^{n_1}_+,\quad s_{\langle u\rangle} \in \mathbb{R}^{m_1}_+.$$

Z (1) i (D) wynikają następujące warunki komplementarności:

(K) $\pi^{\mathrm{T}} y = 0,\quad v^{\mathrm{T}} s_{\langle l\rangle} = 0,\quad w^{\mathrm{T}} s_{\langle u\rangle} = 0$

lub w postaci macierzowo-wektorowej

$$\Pi Ye=0, \quad VS_{\langle l\rangle}e=0, \quad WS_{\langle u\rangle}=0,$$

gdzie:

$$\Pi=\operatorname{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_{m_1}), \quad Y=\operatorname{diag}(y_1,\ldots,y_{m_1}), \quad V=\operatorname{diag}(v_1,\ldots,v_n),$$

$$S_{\langle l\rangle}=\operatorname{diag}(s_{\langle l\rangle 1},\ldots,s_{\langle l\rangle n}), \quad W=\operatorname{diag}(w_1,\ldots,w_n), \quad S_{\langle u\rangle}=\operatorname{diag}(s_{\langle u\rangle 1},\ldots,s_{\langle u\rangle n}),$$

przy czym $e^{\mathrm{T}}=[1\ \ldots\ 1]$ jest wektorem samych jedynek.

Uwzględniając (D) i (K), stwierdzamy, że kolumnie (zmiennej) j (dla $j=1,\ldots,n$) w (P) odpowiadają ograniczenia:

$$\pi^{\mathrm{T}}a_{\langle 1\rangle j}+\rho^{\mathrm{T}}a_{\langle 2\rangle j}+s_{\langle l\rangle j}-s_{\langle u\rangle j}=c_j, \quad v_j s_{\langle l\rangle j}=0, \quad w_j s_{\langle u\rangle j}=0.$$

Kolumnie związanej ze zmienną y_i odpowiadają ograniczenia

$$-\pi_i\leqslant 0 \ \ (\pi_i\geqslant 0) \quad \text{dla} \quad i=1,\ldots,m_1,$$

a kolumnom związanym ze zmiennymi v_j i w_j – odpowiednio:

$$-s_{\langle l\rangle j}\leqslant 0 \ \ (s_{\langle l\rangle j}\geqslant 0), \quad -s_{\langle u\rangle j}\leqslant 0 \ \ (s_{\langle u\rangle j}\geqslant 0) \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,n.$$

Przyjmując w (1), że $l=0$, otrzymujemy $x=v$ i warunek komplementarności $v^{\mathrm{T}}s_{\langle l\rangle}=0$ w (K) przyjmuje postać $x^{\mathrm{T}}s_{\langle l\rangle}=0$, a wektor zmiennych v zostaje wyeliminowany. Gdy $u=+\infty$, wtedy $x<u$ (zawsze) i $s_{\langle u\rangle}=0$ (zawsze), a to oznacza, że warunki komplementarności $w^{\mathrm{T}}s_{\langle u\rangle}=0$ są zbędne.

Ograniczenia $x\geqslant l$ łatwo usunąć z układu (P), dokonując podstawienia $x=l+x'$, co prowadzi do zastąpienia wektorów prawej strony przez:

$$b'_{\langle 1\rangle}=b_{\langle 1\rangle}-A_{\langle 1\rangle}l, \quad b'_{\langle 2\rangle}=b_{\langle 2\rangle}-A_{\langle 2\rangle}l, \quad u'=u-l. \tag{2}$$

Ograniczenia górne możemy również usunąć, przyjmując $x=u-x'\geqslant 0\ (\geqslant l)$, ale wówczas musi również zachodzić $0\leqslant x'\leqslant u\ (l\leqslant x'\leqslant u)$, w przeciwnym razie, gdy $x'>u$, nastąpi naruszenie ograniczenia $x\geqslant 0\ (\geqslant l)$. Z równości $c^{\mathrm{T}}x=c^{\mathrm{T}}(u-x')=c^{\mathrm{T}}u-c^{\mathrm{T}}x'$, wynika zmiana kierunku szukania optimum, ale w ogólnym przypadku nie daje to podstaw do pominięcia ograniczenia $x'\leqslant u$.

Łącząc układy (P), (D) i (K) w układ prymalno-dualny otrzymujemy:

$$
\begin{array}{cccccccc}
A_{\langle 1\rangle}x & -Iy & & & & & = & b_{\langle 1\rangle}, \\
A_{\langle 2\rangle}x & & & & & & = & b_{\langle 2\rangle}, \\
Ix & & -Iv & & & & = & l, \\
-Ix & & & -Iw & & & = & -u, \\
A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\pi & A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\rho & & & Is_{\langle l\rangle} & -Is_{\langle u\rangle} & = & c, \\
 & Y\Pi e & & & & & = & r_{\langle y\rangle}, \\
 & & VS_{\langle l\rangle}e & & & & = & r_{\langle v\rangle}, \\
 & & & WS_{\langle u\rangle}e & & & = & r_{\langle w\rangle},
\end{array}
\tag{3}
$$

gdzie:

$$(r_{\langle y\rangle})^{\mathrm{T}}=[r_{\langle y\rangle 1}\ \dots\ r_{\langle y\rangle m_1}],\quad r_{\langle y\rangle i}=\pi_i y_i \quad \text{dla} \quad i=1,\dots,m_1,\ r_{\langle y\rangle}\in\mathbb{R}^{m_1},$$

$$(r_{\langle v\rangle})^{\mathrm{T}}=[r_{\langle v\rangle 1}\ \dots\ r_{\langle v\rangle n}],\quad r_{\langle v\rangle j}=v_j s_{\langle l\rangle j} \quad \text{dla} \quad j=1,\dots,n,\ r^{(k)}_{\langle v\rangle}\in\mathbb{R}^{n},$$

$$(r_{\langle w\rangle})^{\mathrm{T}}=[r_{\langle w\rangle 1}\ \dots\ r_{\langle w\rangle n}],\quad r_{\langle w\rangle j}=w_j s_{\langle w\rangle j},\quad r_{\langle w\rangle}\in\mathbb{R}^{n}.$$

Przy tej samej strukturze ograniczeń co w (1), problem prymalny optymalizacji kwadratowej (POK) przyjmuje postać:

$$\text{(PK)}\qquad \min\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+c^{\mathrm{T}}x,$$

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle}x\geqslant b_{\langle 1\rangle},\ A_{\langle 2\rangle}x=b_{\langle 2\rangle},\ l\leqslant x\leqslant u,$$

gdzie nadal:

$$A_{\langle 1\rangle}\in\mathbb{R}^{m_1\times n},\quad A_{\langle 2\rangle}\in\mathbb{R}^{m_2\times n},\quad b_{\langle 1\rangle}\in\mathbb{R}^{m_1},\quad b_{\langle 2\rangle}\in\mathbb{R}^{m_2},$$

$$l\in\mathbb{R}^{n}_{+},\quad u\in\mathbb{R}^{n}_{+},\quad l\leqslant u,\quad x\in\mathbb{R}^{n}_{+},\quad m=m_1+m_2.$$

Podobnie (por. [9, rozdz. 2]) uwzględniając (1) otrzymujemy problem dualny względem (PK):

$$\text{(DK)}\qquad \max-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+b^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\pi+b^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\rho+l^{\mathrm{T}}s_{\langle l\rangle}-u^{\mathrm{T}}s_{\langle u\rangle},$$

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi + A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho - Qx + s_{\langle l\rangle} - s_{\langle u\rangle} = c,$$

gdzie:

$$\pi \in \mathbb{R}_{+}^{m_1}, \quad \rho \in \mathbb{R}^{m_2}, \quad s_{\langle l\rangle} \in \mathbb{R}_{+}^{n}, \quad s_{\langle u\rangle} \in \mathbb{R}_{+}^{n}.$$

Warunki komplementarności (KK) w powyższym problemie optymalizacji kwadratowej są takie jak w (K).

Łącząc ograniczenia wynikające z (PK), (DK) i (KK), otrzymujemy, podobnie jak w (3), układ ograniczeń prymalno-dualnych optymalizacji kwadratowej:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & A_{\langle 1\rangle}x & -I & & & & = b_{\langle 1\rangle}, \\
 & & A_{\langle 2\rangle}x & & & & & = b_{\langle 2\rangle}, \\
 & & Ix & & -Iv & & & = l, \\
 & & -Ix & & & -Iw & & = -u, \\
A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi & A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho & -Qx & & & & Is_{\langle l\rangle} \quad -Is_{\langle u\rangle} & = c, \\
 & & YIIe & & & & & = r_{\langle y\rangle}, \\
 & & & & VS_{\langle l\rangle}e & & & = r_{\langle v\rangle}, \\
 & & & & & WS_{\langle u\rangle}e & & = r_{\langle w\rangle}.
\end{array} \tag{4}$$

Ponieważ translacja warunków komplementarności (K) w (3) i (KK) w (4) prowadzi do ograniczeń nieliniowych, więc rozwiązując te układy, realizuje się podejście stosowane w optymalizacji nieliniowej, z uwzględnieniem specyficznej struktury układu ograniczeń prymalno-dualnych. Zwykle dodatkowo rozszerza się funkcje celu w (P) i (PK) do postaci funkcji barierowych, co prowadzi do algebraicznych warunków wymuszających zachowania pewnego minimalnego poziomu zbieżności oraz umożliwia uniknięcie zbyt wczesnego zbliżenia się do brzegu zbioru rozwiązań.

W dalszej części artykułu korzystamy z układów Newtona w celu rozwiązania obydwu wyżej przedstawionych problemów.

Zarówno w ogólnym przypadku, jak i dla układu ograniczeń prymalno-dualnych rozważa się wektor-funkcję $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (por. [4], [7], [9]), której przybliżenie liniowe jest postaci:

(N1) $$F(x^{(k)}+\Delta x)\approx F(x^{(k)})+J(x^{(k)})\,\Delta x,$$

gdzie $x^{(k)}$, $\Delta x\in\mathbb{R}^n$, $J(x^{(k)})$ jest macierzą Jacobiego funkcji F w punkcie $x^{(k)}$.

Przyjmując, że przesunięcie Δx jest takie, że $F(x^{(k)}+\Delta x)=0$, rozwiązujemy układ

(N2) $$F(x^{(k)})+J(x^{(k)})\,\Delta x=0,$$

który po przekształceniu przyjmuje postać

(N3) $$J(x^{(k)})\,\Delta x=-F(x^{(k)}).$$

Układ (N3) jest układem ograniczeń (równań) liniowych.

2. Ograniczenia prymalno-dualne przy barierowych funkcjach celu

Na podstawie (1) oraz (P) możemy sformułować następujący problem prymalny optymalizacji liniowej z klasyczną barierową funkcją celu (por. [4], [7], [9]):

(PB) $$\min c^{\mathrm{T}}x-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln x_j-\mu\sum_{i=1}^{m_1}\ln y_i-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln v_j-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln w_j,$$

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle}x-y=b_{\langle 1\rangle},\qquad A_{\langle 2\rangle}x=b_{\langle 2\rangle},\qquad l\leqslant x\leqslant u,$$

gdzie:

$$x\in\mathbb{R}^n_{++},\qquad v\in\mathbb{R}^n_{++},\qquad w\in\mathbb{R}^n_{++},\qquad y\in\mathbb{R}^{m_1}_{++}.$$

Jeżeli przez

$$\Phi(x,y,v,w;\mu)=c^{\mathrm{T}}x-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln x_j-\mu\sum_{i=1}^{m_1}\ln y_i-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln v_j-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln w_j$$

oznaczymy funkcję celu w (PB), to jej gradient tworzy wektor:

$$\nabla\Phi(x,y,v,w;\mu)=\begin{bmatrix}\nabla_x\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_y\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_v\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_w\Phi(x,y,v,w;\mu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c-\mu X^{-1}e\\ -\mu Y^{-1}e\\ -\mu V^{-1}e\\ -\mu W^{-1}e\end{bmatrix}.$$

Korzystając ponownie z (1) oraz (D), możemy sformułować problem dualny względem (PB):

$$\text{(DB)}\quad \max b_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi+b_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho+\sum_{i=1}^{m_1}\ln\pi_i+\sum_{j=1}^{n}\ln s_{\langle l\rangle j}+\sum_{j=1}^{n}\ln s_{\langle u\rangle j},$$

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi+A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho+s_{\langle l\rangle}-s_{\langle u\rangle}=c-\mu X^{-1},$$

$$-I\pi\leqslant-\mu Y^{-1}e,\qquad -Is_{\langle l\rangle}\leqslant-\mu V^{-1}e,\qquad -Is_{\langle u\rangle}\leqslant-\mu W^{-1}e,$$

gdzie:

$$\pi\in\mathbb{R}_{++}^{m_1},\qquad s_{\langle l\rangle},s_{\langle u\rangle}\in\mathbb{R}_{++}^{n}.$$

Z nierówności $\pi\geqslant\mu Y^{-1}e$ wynika, że $\pi\geqslant 0$, gdy $\mu=0$. Podobnie warunki $s_{\langle l\rangle}\geqslant\mu V^{-1}$ i $s_{\langle u\rangle}\geqslant\mu W^{-1}e$ redukują się do $s_{\langle l\rangle}\geqslant 0$ oraz $s_{\langle u\rangle}\geqslant 0$, przy $\mu=0$. Przyjmując początkowe (dolne) wartości:

$$\pi=\mu Y^{-1}e,\quad s_{\langle l\rangle}=\mu V^{-1}e\quad\text{i}\quad s_{\langle u\rangle}=\mu W^{-1}$$

otrzymujemy:

$$Y\Pi e=\mu YY^{-1}e=\mu e\text{ oraz }e^{\mathrm{T}}Y\Pi e=e^{\mathrm{T}}\mu YY^{-1}e=\mu e^{\mathrm{T}}e=\mu m_1,\qquad(5)$$

$$VS_{\langle l\rangle}e=\mu VV^{-1}e=\mu e\text{ oraz }e^{\mathrm{T}}VS_{\langle l\rangle}e=\mu e^{\mathrm{T}}VV^{-1}e=\mu e^{\mathrm{T}}e=\mu n,\qquad(6)$$

$$WS_{\langle u\rangle}e=\mu WW^{-1}e=\mu e,\text{ a stąd }e^{\mathrm{T}}WS_{\langle u\rangle}e=\mu e^{\mathrm{T}}WW^{-1}e=\mu e^{\mathrm{T}}e=\mu n.\qquad(7)$$

Wynikają stąd następujące początkowe warunki komplementarności:

$$\pi^{\mathrm{T}}y=\mu m_1,\qquad v^{\mathrm{T}}s_{\langle l\rangle}=\mu n,\qquad w^{\mathrm{T}}s_{\langle u\rangle}=\mu n.$$

Na podstawie (1), (DB), (5)-(7) oraz (N3), otrzymujemy wówczas układ Newtona postaci:

$$\begin{bmatrix} & A_{\langle 1\rangle} & -I & & & & \\ & A_{\langle 2\rangle} & & & & & \\ & I & & -I & & & \\ & -I & & & -I & & \\ A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} & A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} & & & & I & -I \\ Y_{(k)} & & \Pi_{(k)} & & & & \\ & & & S_{\langle l\rangle(k)} & & V_{(k)} & \\ & & & & S_{\langle u\rangle(k)} & & W_{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\pi \\ \Delta\rho \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta s_{\langle l\rangle} \\ \Delta s_{\langle u\rangle} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} r_{\langle P1\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle P2\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle l\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle u\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle D\rangle}^{(k)} \\ Y_{(k)}\Pi_{(k)}e - \mu_k e \\ S_{\langle l\rangle(k)}V_{(k)}e - \mu_k e \\ S_{\langle u\rangle(k)}W_{(k)}e - \mu_k e \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

gdzie:

$$(r_{\langle P1\rangle}^{(k)})^{\mathrm{T}} = [r_{\langle P1\rangle 1}^{(k)} \ldots r_{\langle P1\rangle m_1}^{(k)}], \quad r_{\langle P1\rangle}^{(k)} = b_{\langle 1\rangle} - A_{\langle 1\rangle}x^{(k)} + y^{(k)}, \quad r_{\langle P1\rangle}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_1},$$

$$(r_{\langle P2\rangle}^{(k)})^{\mathrm{T}} = [r_{\langle P2\rangle 1}^{(k)} \ldots r_{\langle P2\rangle m_2}^{(k)}], \quad r_{\langle P2\rangle}^{(k)} = b_{\langle 2\rangle} - A_{\langle 2\rangle}x^{(k)}, \quad r_{\langle P2\rangle}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_2},$$

$$(r_{\langle D\rangle}^{(k)})^{\mathrm{T}} = [r_{\langle \mathrm{D}\rangle 1}^{(k)} \ldots r_{\langle D\rangle n}^{(k)}], \quad r_{\langle D\rangle}^{(k)} = c - A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi^{(k)} - A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho^{(k)} - s_{\langle l\rangle}^{(k)} + s_{\langle u\rangle}^{(k)}, \quad r_{\langle D\rangle}^{(k)} \in \mathbb{R}^{m_1},$$

$$(r_{\langle l\rangle}^{(k)})^{\mathrm{T}} = [r_{\langle l\rangle 1}^{(k)} \ldots r_{\langle l\rangle n}^{(k)}], \quad (r_{\langle l\rangle}^{(k)}) = l - x^{(k)} + v^{(k)}, \quad r_{\langle l\rangle}^{(k)} \in \mathbb{R}^n,$$

$$(r_{\langle u\rangle}^{(k)})^{\mathrm{T}} = [r_{\langle u\rangle 1}^{(k)} \ldots r_{\langle u\rangle n}^{(k)}], \quad (r_{\langle u\rangle}^{(k)}) = -u + x^{(k)} + w^{(k)}, \quad r_{\langle u\rangle}^{(k)} \in \mathbb{R}^n.$$

W układzie (8) zachodzą warunki: $r_{\langle P1\rangle}^{(k)} \to 0$, $r_{\langle P2\rangle}^{(k)} \to 0$, $r_{\langle l\rangle}^{(k)} \to 0$, $r_{\langle u\rangle}^{(k)} \to 0$, i $r_{\langle D\rangle}^{(k)} \to 0$, przy $k \to \infty$.

Problem optymalizacji kwadratowej z barierową funkcją celu ma postać:

$$\text{(PKB)} \quad \min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+c^{\mathrm{T}}x-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln x_j-\mu\sum_{i=1}^{m_1}\ln y_i-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln v_j-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln w_j,$$

przy ograniczeniach:

$$A_{\langle 1\rangle}x-y=b_{\langle 1\rangle}, \quad A_{\langle 2\rangle}x=b_{\langle 2\rangle}, \quad l\leqslant x\leqslant u,$$

gdzie:

$$x\in\mathbb{R}^n_{++}, \quad v\in\mathbb{R}^n_{++}, \quad w\in\mathbb{R}^n_{++}, \quad y\in\mathbb{R}^{m_1}_{++}.$$

Oznaczając ponownie funkcję (kwadratową) celu przez

$$\Phi(x,y,v,w;\mu)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+c^{\mathrm{T}}x-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln x_j-\mu\sum_{i=1}^{m_1}\ln y_i-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln v_j-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln w_j$$

otrzymujemy jej gradient:

$$\nabla\Phi(x,y,v,w;\mu)=\begin{bmatrix}\nabla_x\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_y\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_v\Phi(x,y,v,w;\mu)\\ \nabla_w\Phi(x,y,v,w;\mu)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Qx+c-\mu X^{-1}e\\ -\mu Y^{-1}e\\ -\mu V^{-1}e\\ -\mu W^{-1}e\end{bmatrix}.$$

Korzystając z (1) oraz (DK), uzyskujemy problem dualny względem (PKB):

$$\text{(DKB)} \quad \max -\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+b^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\pi+b^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\rho+\sum_{i=1}^{m_1}\ln\pi_i+\sum_{j=1}^{n}\ln s_{\langle l\rangle j}+\sum_{j=1}^{n}\ln s_{\langle u\rangle j},$$

przy ograniczeniach:

$$A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\pi+A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\rho-Qx+s_{\langle l\rangle}-s_{\langle u\rangle}=c-\mu X^{-1},$$

$$-I\pi\leqslant-\mu Y^{-1}e, \quad -Is_{\langle l\rangle}\leqslant-\mu V^{-1}e, \quad -Is_{\langle u\rangle}\leqslant-\mu W^{-1}e,$$

gdzie:

$$\pi\in\mathbb{R}^{m_1}_{++}, \quad s_{\langle l\rangle}, s_{\langle u\rangle}\in\mathbb{R}^n_{++}.$$

Na podstawie (1), (5)-(7) oraz (DBK) i (N3) otrzymujemy następujący układ Newtona:

$$\begin{bmatrix} & & A_{\langle 1\rangle} & -I & & & & \\ & & A_{\langle 2\rangle} & & & & & \\ & & I & & -I & & & \\ & & -I & & & -I & & \\ A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} & A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} & -Q & & & & I & -I \\ Y_{(k)} & & & \Pi_{(k)} & & & & \\ & & & & S_{\langle l\rangle(k)} & & V_{(k)} & \\ & & & & & S_{\langle u\rangle(k)} & & W_{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\pi \\ \Delta\rho \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta s_{\langle l\rangle} \\ \Delta s_{\langle u\rangle} \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} r_{\langle P1\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle P2\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle l\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle u\rangle}^{(k)} \\ r_{\langle D\rangle}^{(k)} \\ Y_{(k)}\Pi_{(k)}e - \mu_k e \\ S_{\langle l\rangle(k)}V_{(k)}e - \mu_k e \\ S_{\langle u\rangle(k)}W_{(k)}e - \mu_k e \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

w którym w stosunku do (8) zmienia się tylko równanie

$$r_{\langle D\rangle}^{(k)} = c - A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\pi - A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\rho^{(k)} + Qx^{(k)} - s_{\langle l\rangle}^{(k)} + s_{\langle u\rangle}^{(k)}.$$

W obydwu przypadkach, korzystając z (5)-(7), otrzymujemy następującą początkową uśrednioną niedopuszczalność warunków komplementarności:

$$\mu_0 = \frac{(y^{(0)})^{\mathrm{T}}\pi^{(0)} + (v^{(0)})^{\mathrm{T}}s_{\langle l\rangle}^{(0)} + (w^{(0)})^{\mathrm{T}}s_{\langle u\rangle}^{(0)}}{2n + m_1}, \qquad (10)$$

gdzie μ_0 jest średnią wartością początkowej niedopuszczalności.

W dwóch kolejnych iteracjach, powiedzmy k i $(k+1)$, niedopuszczalność komplementarności oznaczoną przez ζ_k i ζ_{k+1}, można wyrazić następująco. Niech

$$\zeta_k = (y^{(k)})^T \pi^{(k)} + (v^{(k)})^T s_{\langle l \rangle}^{(k)} + (w^{(k)})^T s_{\langle u \rangle}^{(k)},$$

wtedy

$$\begin{aligned}
\zeta_{k+1} &= (y^{(k+1)})^T \pi^{(k+1)} + (v^{(k+1)})^T s_{\langle l \rangle}^{(k+1)} + (w^{(k+1)})^T s_{\langle u \rangle}^{(k+1)} = \\
&= (y^{(k)} + \lambda \Delta y)^T (\pi^{(k)} + \lambda \Delta \pi) + (v^{(k)} + \lambda \Delta v)^T (s_{\langle l \rangle}^{(k)} + \lambda \Delta s_{\langle l \rangle}) + \\
&\quad + (w^{(k)} + \lambda \Delta w)^T (s_{\langle u \rangle}^{(k)} + \lambda \Delta s_{\langle u \rangle}) = \\
&= (y^{(k)})^T \pi^{(k)} + (v^{(k)})^T s_{\langle l \rangle}^{(k)} + (w^{(k)})^T s_{\langle u \rangle}^{(0)} + \\
&\quad + \lambda \left((\pi^{(k)})^T \Delta y + (y^{(k)})^T \Delta \pi + (s_{\langle l \rangle}^{(k)})^T \Delta v + (v^{(k)})^T \Delta s_{\langle l \rangle} + \right. \\
&\quad \left. + (s_{\langle u \rangle}^{(k)})^T \Delta w + (w^{(k)})^T \Delta s_{\langle u \rangle} \right) + \\
&\quad + \lambda^2 (\Delta \pi^T \Delta y + \Delta s_{\langle l \rangle}^T \Delta v + \Delta s_{\langle u \rangle}^T \Delta w). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Korzystając z (8) i (11) otrzymujemy:

$$S_{\langle l \rangle (k)} \Delta v + V_{(k)} \Delta s_{\langle l \rangle} = \mu_k e - S_{\langle l \rangle (k)} V_{(k)} e$$

oraz

$$S_{\langle u \rangle (k)} \Delta w + W_{(k)} \Delta s_{\langle u \rangle} = \mu_k e - S_{\langle u \rangle (k)} W_{(k)} e,$$

a stąd

$$e^T S_{\langle l \rangle (k)} \Delta v + e^T V_{(k)} \Delta s_{\langle l \rangle} = \mu_k e^T e - e^T S_{\langle l \rangle (k)} V_{(k)} e = \mu_k n - (s_{\langle l \rangle}^{(k)})^T v^{(k)}$$

oraz

$$e^T S_{\langle u \rangle (k)} \Delta w + e^T W_{(k)} \Delta s_{\langle u \rangle} = \mu_k e^T e - e^T S_{\langle u \rangle (k)} W_{(k)} e = \mu_k n - (s_{\langle u \rangle}^{(k)})^T w^{(k)},$$

więc

$$(s_{\langle l \rangle}^{(k)})^T \Delta v + (v^{(k)})^T \Delta s_{\langle l \rangle} = \mu_k n - (s_{\langle l \rangle}^{(k)})^T v^{(k)}, \qquad (12)$$

$$(s_{\langle u \rangle}^{(k)})^T \Delta w + (w^{(k)})^T \Delta s_{\langle u \rangle} = \mu_k n - (s_{\langle u \rangle}^{(k)})^T w^{(k)}, \qquad (13)$$

Zgodnie z szóstym równaniem w (8) mamy:

$$\Pi_{(k)}\Delta y + Y_{(k)}\Delta\pi = -Y_{(k)}\Pi_{(k)}e + \mu_k e.$$

Mnożąc to równanie obustronnie przez e^{T}, otrzymujemy

$$(\pi^{(k)})^{\mathrm{T}}\Delta y + (y^{(k)})^{\mathrm{T}}\Delta\pi = m_1\mu_k - (y^{(k)})^{\mathrm{T}}\pi^{(k)}. \tag{14}$$

Stąd, na podstawie (12)-(13), stwierdzamy, że wyrażenie przy λ w (11) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}(\pi^{(k)})^{\mathrm{T}}\Delta y + (s^{(k)}_{\langle l\rangle})^{\mathrm{T}}\Delta v + (s^{(k)}_{\langle u\rangle})^{\mathrm{T}}\Delta w = \\ = m_1\mu_k - (y^{(k)})^{\mathrm{T}}\pi^{(k)} + \mu_k n - (s^{(k)}_{\langle l\rangle})^{\mathrm{T}}v^{(k)} + \mu_k n - (s^{(k)}_{\langle u\rangle})^{\mathrm{T}}w^{(k)} = \\ = \mu_k(m_1 + 2n) - \big((y^{(k)})^{\mathrm{T}}\pi^{(k)} + (s^{(k)}_{\langle l\rangle})^{\mathrm{T}}v^{(k)} + (s^{(k)}_{\langle u\rangle})^{\mathrm{T}}w^{(k)}\big) = \\ = \mu_k(m_1 + 2n) - \zeta_k. \end{aligned} \tag{15}$$

Dla ustalenia postaci wyrażenia przy λ^2 w (11) przyjmijmy, że rozwiązanie $\pi^{(k)}$, $\rho^{(k)}$, $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$, $s^{(k)}_{\langle l\rangle}$ i $s^{(k)}_{\langle u\rangle}$ spełnia pierwszych pięć równań w (8) i (9). Korzystając z pięciu pierwszych równań w (8) mamy:

$$A_{\langle 1\rangle}\Delta x - \Delta y = 0, \quad A_{\langle 2\rangle}\Delta x = 0, \quad A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi + A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho + \Delta s_{\langle l\rangle} - \Delta s_{\langle u\rangle} = 0,$$

$$\Delta x - \Delta v = 0, \quad -\Delta x - \Delta w = 0.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\Delta\pi^{\mathrm{T}}A_{\langle 1\rangle}\Delta x - \Delta\pi^{\mathrm{T}}\Delta y = 0,$$

więc

$$\Delta\pi^{\mathrm{T}}\Delta y = \Delta\pi^{\mathrm{T}}A_{\langle 1\rangle}\Delta x, \tag{16}$$

$$\Delta\rho^{\mathrm{T}}A_{\langle 2\rangle}\Delta x = 0, \tag{17}$$

$$\Delta x^{\mathrm{T}} A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\pi + \Delta x^{\mathrm{T}} A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\rho + \Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle l\rangle} - \Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle u\rangle} = 0, \tag{18}$$

$$\Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta x - \Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta v = 0,$$

zatem

$$\Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle l\rangle} = \Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta v, \tag{19}$$

$$-\Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta x - \Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta w = 0,$$

skąd

$$-\Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle u\rangle} = \Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta w. \tag{20}$$

Wstawiając do (18) odpowiednio (16), (17), (19) i (20), otrzymujemy

$$\Delta\pi^{\mathrm{T}} \Delta y + \Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta v + \Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta w = 0,$$

co oznacza, że startując od takiego rozwiązania, w którym $r_{\langle P1\rangle}^{(k)} = 0$, $r_{\langle D\rangle}^{(k)} = 0$, $r_{\langle l\rangle}^{(k)} = 0$, $r_{\langle u\rangle}^{(k)} = 0$ i $r_{\langle D\rangle}^{(k)} = 0$, dochodzimy do zerowej wartości wyrażenia przy λ^2 w (11).

Podobnie, korzystając z pięciu pierwszych równań w (9) stwierdzamy, że

$$A_{\langle 1\rangle} \Delta x - \Delta y = 0, \quad A_{\langle 2\rangle} \Delta x = 0, \quad A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\pi + A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\rho - Q\Delta x + \Delta s_{\langle l\rangle} - \Delta s_{\langle u\rangle} = 0,$$

$$\Delta x - \Delta v = 0, \qquad -\Delta x - \Delta w = 0,$$

wobec czego równanie (18) przyjmie postać:

$$\Delta x^{\mathrm{T}} A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\pi + \Delta x^{\mathrm{T}} A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\rho - \Delta x^{\mathrm{T}} Q \Delta x^{\mathrm{T}} + \Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle l\rangle} - \Delta x^{\mathrm{T}} \Delta s_{\langle u\rangle} = 0.$$

Korzystając ponownie z (16), (17), (19) i (20), otrzymujemy:

$$\Delta\pi^{\mathrm{T}} \Delta y - \Delta x^{\mathrm{T}} Q \Delta x + \Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta v + \Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta w = 0,$$

Przyjmując, że macierz Q jest dodatnio półokreślona (wypukła funkcja celu), mamy $-\Delta x^{\mathrm{T}} Q \Delta x \leqslant 0$, co oznacza, że

$$\Delta\pi^{\mathrm{T}}\Delta y-\Delta x^{\mathrm{T}}Q\Delta x+\Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta v+\Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta w\leqslant 0. \tag{21}$$

Widzimy więc, że wyrażenie przy λ^2 w (9) przyjmuje wartość niedodatnią. Pomijając je, otrzymamy ograniczenie z góry na wielkość niespełnionej komplementarności.

Startując zatem z punktu dopuszczalnego dla układów (3) i (4), dochodzimy do wniosku, że niedopuszczalność komplementarności jest mniejsza o wyrażenie

$$\lambda^2(\Delta\pi^{\mathrm{T}}\Delta y+\Delta s_{\langle l\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta v+\Delta s_{\langle u\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta w)=(\leqslant)0.$$

3. Kierunki zmiany rozwiązań

Poniżej przedstawimy wyprowadzenie kierunków zmiany rozwiązań w przypadku optymalizacji liniowej. W układzie (8) mamy osiem równań. Wyznaczanie kierunków zmiany rozwiązań wygodnie zacząć od trzech ostatnich. W celu uproszczenia notacji pominięto indeks w zapisach macierzy i wektorów. Kolejno otrzymujemy:

$$\Delta s_{\langle u\rangle}=\mu W^{-1}e-W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-W^{-1}S_{\langle u\rangle}\Delta w \quad \text{(z ósmego równania)}, \tag{22}$$

$$\Delta s_{\langle l\rangle}=\mu V^{-1}e-V^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-V^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v \quad \text{(z siódmego równania)}, \tag{23}$$

$$\Delta y=\mu\Pi^{-1}e-\Pi^{-1}Y\Pi e-\Pi^{-1}Y\Delta\pi \quad \text{(z szóstego równania)}. \tag{24}$$

Dzięki temu wykluczamy trzy wektory zmiennych, występujące w tym układzie. Wektor Δy eliminujemy z pierwszego równania w układzie (8). W rezultacie

$$A_{\langle 1\rangle}\Delta x-\mu\Pi^{-1}e+\Pi^{-1}Y\Pi e+\Pi^{-1}Y\Delta\pi=-r_{\langle P1\rangle},$$

a po uporządkowaniu

$$\Pi^{-1}\Delta\pi+A_{\langle 1\rangle}\Delta x=\mu\Pi^{-1}e-\Pi^{-1}Y\Pi e-r_{\langle P1\rangle}. \tag{25}$$

Wektory zmiennych $\Delta s_{\langle l\rangle}$ i $\Delta s_{\langle u\rangle}$ możemy usunąć z piątego równania. Więc

$$A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi + A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho + \mu V^{-1}e - V^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve - V^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v - \mu W^{-1}e +$$
$$+ W^{-1}S_{\langle u\rangle}We + W^{-1}S_{\langle u\rangle}\Delta w = -r_{\langle D\rangle},$$

co po uporządkowaniu daje:

$$A^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi + A^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho - V^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v + W^{-1}S_{\langle u\rangle}\Delta w =$$
$$= \mu(W^{-1} - V^{-1})e + V^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve - W^{-1}S_{\langle u\rangle}We - r_{\langle D\rangle}. \quad (26)$$

Z (26) można wyznaczyć Δw i wyeliminować ten wektor zmiennych w układzie (8).

Mamy więc

$$\Delta w + S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi + S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho - S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v =$$
$$= \mu S^{-1}_{\langle u\rangle}W(W^{-1} - V^{-1})e + S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve - W^{-1}S_{\langle u\rangle}We - S^{-1}_{\langle u\rangle}Wr_{\langle D\rangle},$$

a po przekształceniu

$$\Delta w = -S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi - S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho + S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v +$$
$$+ \mu S^{-1}_{\langle u\rangle}(I - WV^{-1})e + S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve - W^{-1}S_{\langle u\rangle}We - S^{-1}_{\langle u\rangle}Wr_{\langle D\rangle}. \quad (27)$$

Sumując teraz trzecie i czwarte równanie w (8), otrzymujemy

$$-\Delta v - \Delta w = -r_{\langle l\rangle} - r_{\langle u\rangle},$$

zatem

$$\Delta v = r_{\langle l\rangle} + r_{\langle u\rangle} - \Delta w.$$

Korzystając z powyższego równania, mamy

$$\Delta v = r_{\langle l\rangle} + r_{\langle u\rangle} + S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 1\rangle}\Delta\pi + S^{-1}_{\langle u\rangle}WA^{\mathrm{T}}_{\langle 2\rangle}\Delta\rho - S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}\Delta v -$$
$$- \mu S^{-1}_{\langle u\rangle}(I - WV^{-1})e - S^{-1}_{\langle u\rangle}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve + W^{-1}S_{\langle u\rangle}We + S^{-1}_{\langle u\rangle}Wr_{\langle D\rangle},$$

a po uporządkowaniu

$$(I+S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle})\Delta v=r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle}+S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho-$$

$$-\mu S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e+S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+W^{-1}S_{\langle u\rangle}We+S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}.$$

Oznaczając

$$G=I+S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}$$

i przekształcając dalej wzór na Δv, otrzymujemy

$$\Delta v=G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho-$$

$$-\mu G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e-G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+$$

$$+G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}. \tag{28}$$

Wektor Δx możemy teraz wyznaczyć z trzeciego lub czwartego równania w (8). Korzystając z trzeciego równania, otrzymujemy

$$\Delta x=-r_{\langle l\rangle}+\Delta v.$$

Zatem, zastępując Δv w powyższym równaniu jego prawą stroną z (28), otrzymujemy

$$\Delta x=-r_{\langle l\rangle}+G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho-$$

$$-\mu G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e-G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+$$

$$+G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We+G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}. \tag{29}$$

Wstawiając powyższy wynik do pierwszych dwóch równań w (8), otrzymujemy układ tylko z dwoma wektorami zmiennych, a mianowicie $\Delta\pi$ i $\Delta\rho$. Wstawiając Δx z (29) do równania (25), który jest wynikiem przekształcenia pierwszego równania w (8), otrzymujemy

$$\Pi^{-1}Y\Delta\pi-A_{\langle 1\rangle}r_{\langle l\rangle}+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+$$

$$+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho-\mu A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e-$$

$$-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}=$$

$$=\mu\Pi^{-1}e-\Pi^{-1}Y\Pi e-r_{\langle P1\rangle}.$$

Porządkując, otrzymujemy

$$(\Pi^{-1}Y+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}})\Delta\pi+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho=$$
$$=\mu(\Pi^{-1}+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1}))e+A_{\langle 1\rangle}r_{\langle l\rangle}-$$
$$-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-$$
$$-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-\Pi^{-1}Y\Pi e-r_{\langle P1\rangle}. \quad (30)$$

Podobnie, wstawiając Δx bezpośrednio do drugiego równania w (8), mamy

$$-A_{\langle 2\rangle}r_{\langle l\rangle}+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+\mathrm{A}_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+$$
$$+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho-\mu A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e-$$
$$-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We+$$
$$+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}=-r_{\langle P2\rangle}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\pi+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}\Delta\rho=$$
$$=\mu A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e+$$
$$+A_{\langle 2\rangle}r_{\langle l\rangle}-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-$$
$$-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-r_{\langle P2\rangle}.$$

Zatem do rozwiązania pozostaje układ

$$\begin{bmatrix} \Pi^{-1}Y+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} & A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \\ A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} & A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\pi\\ \Delta\rho\end{bmatrix}=$$
$$=\mu(\Pi^{-1}+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1}))e+A_{\langle 1\rangle}r_{\langle l\rangle}-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+$$
$$+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-$$
$$-\Pi^{-1}Y\Pi e-r_{\langle P1\rangle}+\mu A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}(I-WV^{-1})e+$$
$$+A_{\langle 2\rangle}r_{\langle l\rangle}-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-$$
$$-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-r_{\langle P2\rangle}: \quad (31)$$

Z tego układu wyznaczamy najpierw $\Delta\rho$. Przyjmijmy oznaczenie

$$H = A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}.$$

Z podukładu drugiego w (31) wyznaczamy

$$\begin{aligned}\Delta\rho = &-H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\pi + \\ &+ \mu H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} (I - WV^{-1}) e + H^{-1} A_{\langle 2\rangle} r_{\langle I\rangle} - H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} (r_{\langle I\rangle} + r_{\langle u\rangle} + \\ &+ H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W V^{-1} S_{\langle I\rangle} V e - H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} W^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W e - \\ &- H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W r_{\langle D\rangle} - H^{-1} r_{\langle P2\rangle}. \end{aligned} \tag{32}$$

Wstawiając $\Delta\rho$ do pierwszego podukładu w (31), otrzymujemy

$$\begin{aligned}&(\Pi^{-1} Y + A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}) \Delta\pi + \\ &+ A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} (-H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} \Delta\pi) + \\ &+ \mu A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} (I - WV^{-1}) e + \\ &+ A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} H^{-1} A_{\langle 2\rangle} r_{\langle I\rangle} - A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} (r_{\langle I\rangle} + r_{\langle u\rangle}) + \\ &+ \mathrm{A}_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W V^{-1} S_{\langle I\rangle} V e - \\ &- A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} (H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} W^{-1} S_{\langle u\rangle} W e - H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W r_{\langle D\rangle} - H^{-1} r_{\langle P2\rangle}) = \\ &= \mu (\Pi^{-1} + A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} (I - WV^{-1})) e + A_{\langle 1\rangle} r_{\langle I\rangle} - A_{\langle 1\rangle} G^{-1} (r_{\langle I\rangle} + r_{\langle u\rangle}) + \\ &+ A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W V^{-1} S_{\langle I\rangle} V e - A_{\langle 1\rangle} G^{-1} W^{-1} S_{\langle u\rangle} W e - A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W r_{\langle D\rangle} - \\ &- \Pi^{-1} Y \Pi e - r_{\langle P1\rangle}. \end{aligned}$$

W ten sposób dochodzimy do równania:

$$\begin{aligned}&[\Pi^{-1} Y + A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W (A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}} + A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} (-H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 1\rangle}^{\mathrm{T}}))] \Delta\pi = \\ &= \mu (\Pi^{-1} + A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} (I - WV^{-1}) - \\ &- A_{\langle 1\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} W A_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}} H^{-1} A_{\langle 2\rangle} G^{-1} S_{\langle u\rangle}^{-1} (I - WV^{-1})) e + \end{aligned}$$

$$-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}H^{-1}A_{\langle 2\rangle}r_{\langle l\rangle}+A_{\langle 1\rangle}r_{\langle l\rangle}-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})+$$

$$+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}(H^{-1}A_{\langle 2\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}^{1}We-H^{-1}A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-H^{-1}r_{\langle P2\rangle})+$$

$$+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}H^{-1}A_{\langle 1\rangle}G^{-1}(r_{\langle l\rangle}+r_{\langle u\rangle})-$$

$$-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WA_{\langle 2\rangle}^{\mathrm{T}}H^{-1}A_{\langle 2\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve+$$

$$+A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}WV^{-1}S_{\langle l\rangle}Ve-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}W^{-1}S_{\langle u\rangle}We-A_{\langle 1\rangle}G^{-1}S_{\langle u\rangle}^{-1}Wr_{\langle D\rangle}-$$

$$-\Pi^{-1}Y\Pi e-r_{\langle P1\rangle}. \tag{33}$$

Po wyznaczeniu $\Delta\pi$ z (33), sukcesywnie możemy wyznaczyć pozostałe kierunki zmiany rozwiązań. I tak z (32) otrzymujemy $\Delta\rho$, z (29) wyznaczamy Δx, wektor $\Delta v = r_{\langle l\rangle} + \Delta x$ możemy wyznaczyć z (28). Z kolei Δw otrzymujemy z (27), a Δy, $\Delta s_{\langle l\rangle}$, $\Delta s_{\langle u\rangle}$ odpowiednio z (24), (23) i (22).

Podobną technikę należy zastosować do wyznaczania kierunków zmiany rozwiązań układu (9) w przypadku optymalizacji kwadratowej.

Zakończenie

W klasycznym algorytmie sympleks ze zmiennymi ograniczonymi układ m ograniczeń jest równocześnie wymiarem bazy. Wychodząc od ograniczeń prymalnych w (1), otrzymujemy dużych rozmiarów układ prymalno-dualny $(m+6n)\times(m+6n)$. W punkcie 3 pokazaliśmy, że wykorzystując strukturę układu (8), w celu wyznaczenia kierunków zmiany rozwiązań rozwiązuje się znacznie prostszy układ równań liniowych o rozmiarach co najwyżej $n \times n$.

Literatura

[1] *Advances in Nonlinear Programming*, red. Ya-Xiang Yuan, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] *Approximation, Optimization and Mathematical Economics*, red. M. Lassonde, Springer Verlag, 2001.

[3] Bazaraa M.S., Sherall H.D., Shetty C.M., *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, J. Wiley & Sons, 2nd ed., 1993.

[4] Fang Shu-Cherng, Puthenpura S., *Linear Optimization and Extensions. Theory and Algorithms*, Prentice Hall, 1993.
[5] Giannesi F., Rapisak T., Komlosis S., *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer 1998.
[6] Jansen B., *Interior Point Techniques in Optimization. Complementarity, Sensitivity and Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, 1997.
[7] Nocedal J., Wright S.J., *Numerical Optimization*, Springer (Series in Operations Research), 1999.
[8] Runka H.J., *Początkowe rozwiązanie dla afinicznego algorytmu skalującego*, Przegląd Statystyczny 1999, z. 2.
[9] Runka H.J., *Optymalizacja w procesach gospodarczych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2003.
[10] Runka H.J., *Układy prymalne i prymalno-dualne ograniczeń w optymalizacji ciągłej*, w: *Matematyka w ekonomii*, red. E. Panek, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.
[11] Runka H.J., *Analiza złożoności i zbieżności w algorytmach punktów wewnętrznych*, Poznań 2005.
[12] SAS/OR 9.1, *User's Guide: Mathematical Programming*, SAS Publishing, 2004.
[13] Vanderbei R.J., *Linear Programming. Foundations and Extensions*, Kluwer 2000.

BOUNDED VARIABLES IN INTERIOR POINT ALGORITHMS

Summary

This paper is devoted to prima-dual constraint system in linear and quadratic optimization created by the transformation form a general primal constraints extended with lower and upper bounds on variables.
There are presented general structures of primal-dual constraint systems using classical and logarithmic barrier objective functions formulated as approximation linear equations.

Additionally, carrying out analysis of starting point in the case of the barrier objective function its influence on infesibility of original complementary conditions is shown. This paper contains (in the last part) a technique of getting directions for primal-dual interior point algorithms at the specific structure of primal-dual constraints derived from general original primal constraints with bounded variables.