Agata Kliber

BADANIE ZMIENNOŚCI INDEKSU WIG

Wprowadzenie

Istotną cechą rynków finansowych jest zmienność cen instrumentów finansowych. Odgrywa ona ważną rolę między innymi przy ich wycenie. Wysoka zmienność cen to bowiem z jednej strony szansa na ponadprzeciętny zysk, a z drugiej – możliwość dużej straty. Najczęściej stosowaną miarą zmienności jest wariancja (lub odchylenie standardowe). W literaturze podkreśla się dwie cechy zmienności, które komplikują wycenę instrumentów finansowych. Jedną z tych cech jest to, że zmienność ceny instrumentów finansowych ewoluuje w czasie i ma tendencje do tworzenia skupień. Oznacza to, że jeśli w jakimś okresie pojawi się większa wartość wariancji, to najprawdopodobniej pociągnie ona za sobą kolejną większą wartość i odwrotnie: w przypadku wystąpienia mniejszej zmiany, najprawdopodobniej kolejna zmiana też będzie mała. Drugą cechą zmienności, utrudniającą wycenę instrumentów finansowych jest to, że nie można jej zaobserwować. Z tego powodu poszukuje się adekwatnych miar zmienności. Jednym ze sposobów jej badania jest tworzenie parametrycznych modeli zmienności, z których najpopularniejsze są modele autoregresyjne. U ich podstaw leży założenie, że możliwe jest wnioskowanie o charakterystykach przyszłych zwrotów, na podstawie kształtowania się historii cen, a także na podstawie opóźnionych wartości innych zmiennych objaśniających.

Dynamiczna analiza stochastyczna zmienności instrumentów finansowych

Niech r_t oznacza logarytmiczną stopę zwrotu z danego instrumentu finansowego w momencie t. W dynamicznej analizie stochastycznej zakłada się, że proces ceny jest procesem stochastycznym i wyraża się ciągiem zmiennych losowych,

określonych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ – jest σ-ciałem podzbiorów Ω, a P – miarą probabilistyczną. Dodatkowo zakłada się, że przestrzeń probabilistyczna wyposażona jest w filtrację, tj. ciąg σ-algebr $\mathcal{F}_t$ takich, że:

$$\{\varnothing, \Omega\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F.$$

Filtracja obrazuje ciąg napływających do określonego czasu t informacji na temat procesu ceny, które są dostępne dla inwestora [4].

Przy takich założeniach, do badania zmienności procesu ceny instrumentu finansowego można posłużyć się rozkładami i momentami warunkowymi. Zmienność zwrotu z instrumentu w momencie t określa się jako wariancję warunkową zwrotu r_t względem σ-algebry $\mathcal{F}_{t-1}$:

$$\sigma_t^2 = E[(r_t - E(r_t \mid \mathcal{F}_{t-1})) \mid \mathcal{F}_{t-1}], \tag{1}$$

gdzie $E(r_t \mid F_{t-1})$ jest warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej r_t, mierzalnej względem σ-algebry $\mathcal{F}_t$

Model ARCH(p)

Pierwszym modelem z grupy modeli autoregresyjnych, wykorzystywanych do badania kształtowania zmienności, jest model z warunkową heteroskedastycznością (*autoregressive conditional heteroscedasticity model*: ARCH)[1]. Model ten opiera się na obserwacji zmienności wariancji warunkowej składnika resztowego, którą określamy na podstawie modelu dla warunkowej wartości oczekiwanej. Niech:

$$z_t = r_t - E(r_t \mid F_{t-1}). \tag{2}$$

W praktyce warunkową wartość oczekiwaną opisuje się np. dla równania autoregresji AR(1), tj.:

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + z_t. \tag{3}$$

[1] Po raz pierwszy model ten zaprezentowany został w pracy [5].

Ideą modelu ARCH(q) jest założenie, że losowy szereg czasowy z_t nie wykazuje autokorelacji, ale zmienne te są zależne i zależność tę można opisać za pomocą funkcji, której argumentami są kwadraty wartości opóźnionych[2]:

$$z_t = \sigma_t \varepsilon_t , \tag{4}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q z_{t-q}^2 , \tag{5}$$

gdzie:

$\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie standaryzowanym, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$, dla $i > 0$.

Ponieważ σ_t^2 jest mierzalna względem $\mathcal{F}_{t-1}$, to σ_t^2 jest wariancją warunkową zwrotu r_t i równanie (4) jest równoznaczne z:

$$\sigma_t^2 = E(z_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1}). \tag{6}$$

Model ARCH uwzględnia nie tylko skłonność zmienności cen do tworzenia skupień, ale również do pojawiania się wysokiej kurtozy w szeregach finansowych. Ma jednak też pewne słabości, wśród których wymienia się założenie, że zarówno pozytywne, jak i negatywne szoki wywierają taki sam wpływ na zmienność, co nie zawsze jest zgodne z rzeczywistością. Ponadto model nie pozwala rozpoznać, w czym leży źródło zmienności szeregów finansowych. Model często przeszacowuje zmienność, ponieważ zbyt późno reaguje na duże pojedyncze zmiany w szeregach zwrotów. Z praktycznego punktu widzenia, ponieważ zależność zmienności od kwadratu zwrotu często bywa długotrwała, to stosując model ARCH, trzeba oszacować bardzo dużą liczbę parametrów. Niedogodność tę udało się przezwyciężyć Bollerslevowi, który zaproponował uogólnienie modelu ARCH [2].

Modele GARCH

Uogólniony model autoregresyjny warunkowej heteroskedastyczności (*Generalised ARCH* – w skrócie GARCH) nie tylko minimalizuje liczbę parametrów przy dużej liczbie opóźnień, ale też lepiej opisuje rozkłady o grubych ogonach. Modele ARCH natomiast lepiej odzwierciedlają okresy mniejszej zmienności, gdyż, jak już wspomniano, bardzo powoli reagują na pojedyncze duże zmiany stóp zwrotu.

[2] Oznaczenia zgodne z [11].

Przy założeniu, że dla logarytmicznych stóp zwrotu, średnia może zostać opisana przez proces ARMA, z_t (zdefiniowane tak, jak we wzorze (2)) można opisać za pomocą modelu GARCH (p, q), jeśli:

$$z_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{7}$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0,1), \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0.$$

Ze wzoru (7) wynika zatem, że dla procesu generowanego przez model GARCH(p, q) zmienność σ^2 zależy od nieskończonej liczby opóźnionych kwadratów zwrotów z_{t-i}^2, aczkolwiek siła zależności maleje wraz z wydłużaniem się horyzontu czasowego.

Dla $q = 0$, model (7) redukuje się do modelu (5).

Jeśli w równaniu (7) ($\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1$), to mamy do czynienia ze zintegrowanym modelem GARCH-IGARCH. W takim przypadku wariancja bezwarunkowa zmiennej z_t jest nieskończona i proces nie jest stacjonarny w szerszym sensie (za to może być ściśle stacjonarny – patrz: [4]). Inną charakterystyczną cechą modelu IGARCH jest jego persystencja, czyli trwały wpływ obecnej zmienności na prognozę (w odróżnieniu od modelu GARCH, w którym wpływ zmienności na prognozę zanika w tempie wykładniczym).

Innym zintegrowanym modelem klasy GARCH jest FIGARCH, czyli model GARCH zintegrowany ułamkowo. Według specyfikacji zaproponowanej przez Chunga, jego postać wyraża się wzorem:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \lambda(L)(z_t^2 - \sigma^2), \tag{8}$$

$$\lambda(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i.$$

Ogólne modele GARCH zakładają, że pozytywne i negatywne zmiany cen mają ten sam wpływ na przyszłą zmienność. Tymczasem wpływ dodatnich i ujemnych zwrotów wywiera wpływ asymetryczny na poziom przyszłej zmienności. Asymetrię tę uwzględnia model APARCH, którego przypadkami szczególnymi, oprócz wspomnianych już modeli ARCH i GARCH, są: TS-GARCH, GJR-GARCH, TARCH, NARCH, Log-ARCH.

Model APARCH(p, q), autorstwa Dinga, Grangera i Engle'a określony jest równaniami:

$$z_t = \sigma_t \varepsilon_t, \tag{9}$$

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (|z_{t-i}| - \gamma_i z_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^{\delta},$$

gdzie:
$\delta > 0$, $\gamma \in (-1;1)$, $i = 1, 2, ..., q$.

Cechą charakterystyczną tego modelu jest, oprócz uwzględniania zjawiska asymetryczności, istnienie wykładnika δ, który gwarantuje istnienie momentu rzędu δ dla procesu σ_t.

Szczególnym przypadkiem modelu APARCH, który też uwzględnia efekt asymetrii, jest model GJR-GARCH (od nazwisk twórców modelu: Glostena, Jagannathana i Runkle'a). Wariancja warunkowa w tym modelu określona jest następująco:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} (\alpha_i z_{t-i}^2 + \gamma \mathrm{I}(z_{t-i} < 0)) z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-1}^2, \tag{10}$$

gdzie:
I(·) jest funkcją indykatorową.

Asymetria uwzględniona została też w modelu EGARCH (GARCH wykładniczy). Wariancję warunkową w tym modelu przedstawia się wzorem:

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(L))^{-1} (1 + \alpha(L)) g(\varepsilon_{t-1}), \tag{11}$$

w którym:

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L + ... + \alpha_q L^q,$$

$$\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + ... + \beta_p L^p$$

są wielomianami, których wszystkie pierwiastki leżą poza kołem jednostkowym.

Ponadto:

$$g(\varepsilon_t) = \gamma_1 \varepsilon_t + \gamma_2 (|\varepsilon_t - E|\varepsilon_t|).$$

Najistotniejszą cechą tego modelu jest nieujemność wariancji warunkowej. Na zmianę wariancji warunkowej wpływa zaś odchylenie zmiennej $|\varepsilon_{t-j}|$ od jej wartości oczekiwanej, a wartość zmiany zależy od siły i kierunku tego odchylenia. Innym modelem GARCH, uwzględniającym ujemne skorelowanie stóp zwrotu z akcji z ich zmiennością jest model GARCH-M (GARCH *in mean*):

$$r_t = a_0 + \sum_{k=1}^{s} b_k x_{k,t} + \sum_{i=1}^{m} a_i (r_{t-i} - a_0 - \sum_{k=1}^{s} b_k x_{k,t-i}) + c\sigma_t^2 + z_t, \qquad (12)$$

$$z_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \text{oraz} \quad \sigma_t = \alpha_0 + \sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

gdzie:
$x_{k,t}$, $k = 1,2,...,s$ to dodatkowe zmienne objaśniające, a c jest parametrem premii za ryzyko.

Rozkłady innowacji w modelach GARCH

Występująca w modelach GARCH zmienna losowa ε_t interpretowana jest jako innowacje. W zależności od badanego szeregu można stawiać hipotezy o różnym ich rozkładzie. Często przyjmuje się, że innowacje mają rozkład normalny. Przy takim założeniu dla modelu GARCH(p, q) zmienna z_t ma również rozkład warunkowy normalny, natomiast jej bezwarunkowy rozkład jest prawostronnie skośny ([4]).

Często jednakże również rozkłady warunkowe charakteryzują się wyższą kurtozą i wtedy właściwości szeregu lepiej opisuje standaryzowany rozkład t-Studenta z $\nu > 2$ stopniami swobody. Innym rozkładem, który często przyjmuje się w odniesieniu do innowacji, jest uogólniony rozkład błędu GED. Ostatecznie, chcąc oprócz własności grubych ogonów uwzględnić występującą często w szeregach finansowych skośność, do opisu rozkładu innowacji stosuje się standaryzowany skośny rozkład t-Studenta[3].

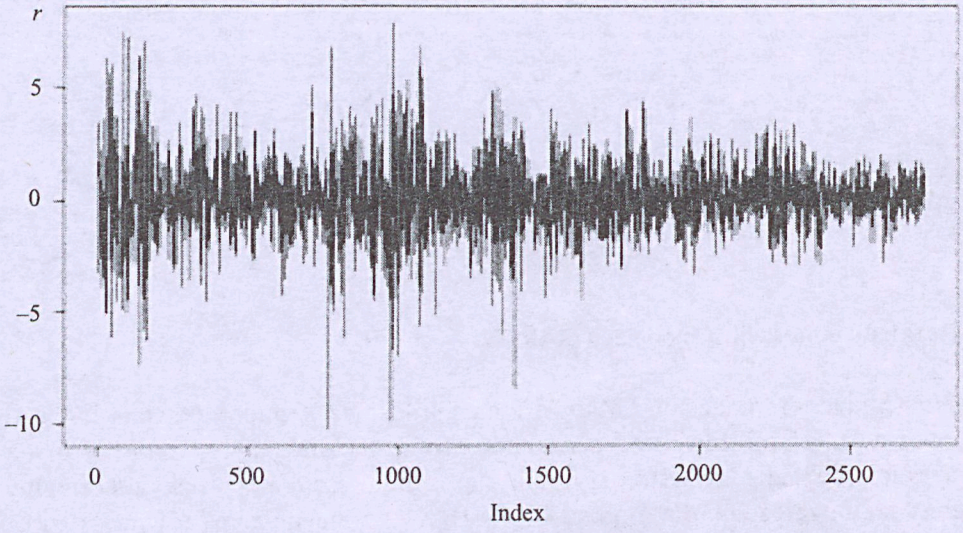
[3] Po raz pierwszy rozkład ten został zaproponowany w [9].

Badania empiryczne

Celem niniejszego opracowania było zbadanie zmienności stóp zwrotu na polskim rynku finansowym oraz weryfikacja możliwości wykorzystania uzyskanych modeli do opisu sytuacji na warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych w analizowanym przedziale czasowym. Badaniu poddano logarytmiczne stopy zwrotu indeksu WIG w okresie od 03.10.1994 do 16.09.2005:

$$r_t = 100 \times (\ln P_t - \ln P_{t-1}).$$

Kształtowanie się ich zmienności przedstawia wykres 1.



Wykres 1. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 03.10.1994 do 16.09.2005
(wykres wykonany w programie R)

Dla tak zmodyfikowanych stóp zwrotu ich średnia wartość w badanym okresie wyniosła 0,04694057, natomiast zmienność (mierzona wariancją): 2,726594. Wartości: minimalna i maksymalna kształtowały się na poziomach, odpowiednio: –10,28644 i 7,893317. Można zatem stwierdzić, ze szereg cechuje się dużą zmiennością. Kurtoza dla szeregu wynosi 3,265 (obliczana w taki sposób, że dla rozkładu normalnego jest równa 0), natomiast skośność jest w zasadzie niewielka, bo kształtuje się na poziomie –0,1107. Z samego już wykresu można stwierdzić, że stopy zwrotu z indeksu mają tendencję do grupowania się w określonych przedziałach czasu, tj. w pewnych okresach można zaobserwować mniejsze lub większe

wahania. Ponadto, po wystąpieniu pojedynczego szoku, wyraźnie widać tendencję do kolejnych dużych zmian wartości. Biorąc pod uwagę wszystkie wymienione wyżej cechy, postawiono hipotezę, że w celu modelowania zmienności stóp zwrotu z indeksu WIG można próbować dopasować do szeregu model AR-GARCH.

Wyniki przeprowadzonych testów na stacjonarność: KPSS[4] i PP[5], odpowiednio: nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o stacjonarności i odrzucają hipotezę o braku stacjonarności w szeregu.

Na podstawie wykresów korelacji i korelacji cząstkowej oraz przy zastosowaniu kryterium Schwarza i maksymalizacji istotności parametrów, za najlepszy do opisu zmienności szeregu w danym okresie uznano model AR(1)-GARCH(1,1), postaci:

$$\underset{(0,\,027497)}{\hat{r}_t = 0{,}070110} + \underset{(0{,}20185)}{0{,}146522 r_{t-1}} + z_t,$$

$$\underset{(0{,}013339)}{\hat{\sigma}_t^2 = 0{,}030866} + \underset{(0{,}016065)}{0{,}089684 z_{t-1}} + \underset{(0{,}018283)}{0{,}900569 \sigma_{t-1}^2},$$

$$z_t = \sigma_t \varepsilon_t .$$

Model został wyestymowany z zastosowaniem skośnego rozkładu *t*-Studenta. Otrzymany wynik jest zgodny z przedstawianymi w literaturze (np. [4], [8]).

W celu sprawdzenia hipotezy o asymetryczności wpływu różnych znaków na zmienność, wyliczono wartość statystyki SB (Sign Bias), NBS (Negative Sign Bias) oraz PSB (Positive Sign Bias) [6]. Hipotezę zerową, o braku wpływu znaku zwrotów na wielkość przyszłych szoków, należało odrzucić w przypadku zwrotów ujemnych, z czego można wyciągnąć wniosek, że duże szoki poprzedzone są spadkami wartości indeksu WIG.

Aby sprawdzić stabilność parametrów modelu, wyliczono również wartości statystyki Nybloma. Okazuje się, że hipotezę zerową o stabilności parametru należało odrzucić w przypadku współczynnika AR(1), co zgadza się z wynikami uzyskanymi przez innych badaczy ([4]). Niestabilny na pięcioprocentowym poziomie ufności okazał się również parametr α_1 (tj. ARCH(1)).

Podział szeregu na podokresy

Już sama tylko pobieżna obserwacja szeregu pozwala na wyróżnienie okresów o większej lub mniejszej zmienności indeksu WIG. Szczególnie wyraźnie rzuca

[4] Test Kwiatkowskiego-Phillipsa-Schmidta-Shina, patrz: pozycja [7].
[5] Test Phillipsa-Perrona, patrz: pozycja [10].

się w oczy złagodzenie dynamiki zmian w końcowym okresie. Własności te, a także fakt, że nie wszystkie parametry w oszacowanym modelu są stabilne, sugerują hipotezę, że być może dopasowany model nie do końca wychwytuje wszystkie zmiany, jakie zachodziły w zmienności indeksu. W literaturze (np. [1], [3]) podkreśla się, że w szeregach finansowych często występują zmiany strukturalne. Przy rozważaniu bardzo długich szeregów istnieje niebezpieczeństwo pominięcia tych zmian. Może to skutkować zawyżonymi lub zaniżonymi oszacowaniami. Dlatego też, w celu dokładniejszego zbadania dynamiki szeregu, podzielono go na mniejsze podokresy, dla których starano się dopasować osobne modele zmienności.

Szereg został podzielony na sześć okresów, w których wahania kształtowały się na podobnym poziomie. Podział szeregu był w dużym stopniu arbitralny, jednak, jak wynika z zaprezentowanych poniżej badań, wyróżnione okresy znacznie różnią się dynamiką. Również analiza wydarzeń historycznych na GPW uzasadnia podział szeregu na prezentowane podokresy. Wyróżniono następujące przedziały czasowe:

– Obserwacje 1–220, odpowiadające okresowi od 10.03.1994 do 23.08.1995.

– Obserwacje 221–760, odpowiadające okresowi od 24.08.1995 do 17.10.1997.

– Obserwacje 761–1224, odpowiadające okresowi od 20.10.1997 do 30.08.1999.

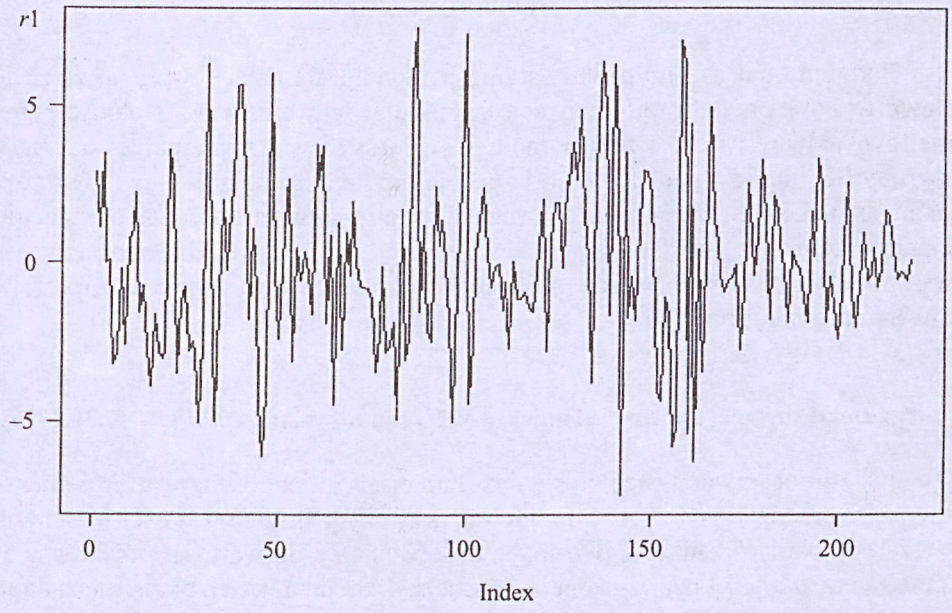
– Obserwacje 1225–1460, odpowiadające okresowi od 31.08.1999 do 10.08.2000.

– Obserwacje 1461–2410, odpowiadające okresowi od 11.08.2000 do 28.05.2004.

– Obserwacje 2411–2741, odpowiadające okresowi od 30.05.2004 do 16.09.2005.

Dla każdego szeregu przeprowadzono testy na stacjonarność: KPSS (Kwiatkowski – Phillips – Schmidt – Shin) oraz PP (Phillips – Perron). Zmienność w każdym okresie została poddana osobnemu modelowaniu. Dla każdego przedziału czasowego wyliczono średnią, drugi, trzeci i czwarty moment centralny oraz współczynnik zmienności, wyznaczono najodpowiedniejszy model autoregresji (głównym kryterium była istotność parametrów, oprócz wyrazu wolnego) i ostatecznie – dopasowano modele zmienności, kierując się kryterium informacyjnym Schwarza oraz istotnością parametrów. W każdym przypadku policzono również statystykę SB, w celu zweryfikowania hipotezy o wpływie zwrotów różnych znaków na zmienność, a także wartości testu Nybloma, aby zbadać stabilność parametrów.

Okres wysokiej zmienności indeksu WIG (notowania: 10.03.1994–23.08.1995)



Wykres 2. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 10.03.1994 do 23.08.1995
(wykres wykonany w programie R)

Zmienność indeksu w omawianym okresie przedstawia wykres 2. W porównaniu z późniejszym okresem można tu wyróżnić bardzo duże, co do wartości bezwzględnej, wahania cen indeksu. W analizowanym przedziale czasowym można wyróżnić powstanie czterech skupień: obserwacje 1–71 (10.03.1994–01.16.1995), 72–116 (17.01.1995–20.03.1995), 117–173 (21.03.1995–14.06.1995) i 174–220 (16.06.1995–23.08.1995). Wartości logarytmicznych stóp zwrotu przybierają w tym okresie wartości od –7,3533 do 7,4611, przy czym ich średnia wynosi –0,037083, a odchylenie standardowe: 2,7379. Przeważają pozytywne zmiany wartości indeksu: (rozkład empiryczny stóp zwrotu jest prawostronnie skośny i sama skośność przybiera największą wartość ze wszystkich rozważanych okresów, równą aż 0,2878), ze szczególnie niską kurtozą na poziomie 0,25.

Do opisu szeregu przyjęto model AR(1). Jednakże próby dopasowania do obserwacji z pierwszego okresu modelu GARCH(1,1) nie dały oczekiwanych rezultatów. Najlepszy do opisu zmienności badanego szeregu okazał się model AR(1)-ARCH(2), następującej postaci:

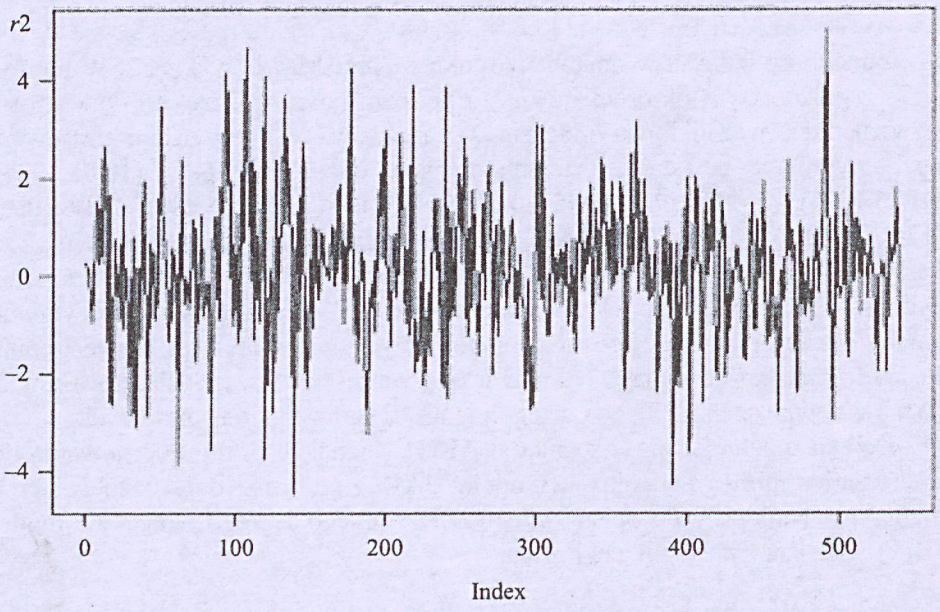
$$\hat{r}_t = \underset{(0,19660)}{-0,086358} + \underset{(0,089095)}{0,282004} r_t ,$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,59721)}{3,000224} + \underset{(0,10592)}{0,229333 z_{t-1}^2} + \underset{(0,10387)}{0,360945 z_{t-2}^2}.$$

Podobnie, jak w przypadku estymacji modelu dla całego szeregu, za podstawę wyboru przyjęto minimalizację kryterium Schwarza oraz istotność parametrów (jedynie wyraz wolny w modelu AR jest nieistotny). Analiza statystyk z grupy SB nie dała podstaw do odrzucenia hipotezy o braku wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność. Natomiast test Nybloma zasugerował odrzucenie hipotezy zerowej o stabilności wyrazu wolnego w modelu ARCH. Podsumowanie wszystkich statystyk dla każdego badanego okresu zawiera tabela 1, zaprezentowana na końcu rozdziału.

Okres umiarkowanej zmienności indeksu WIG (notowania: 24.08.1995–17.10.1997)

Kolejne 540 obserwacji cechuje się dużo mniejszą zmiennością: wartości mieszczą się w przedziale od –4,474 do 5,0748, przy czym skrajne wartości występują w szeregu bardzo rzadko. Tylko jedna obserwacja co do wartości przekracza 5, a pięć co do wartości bezwzględnej przekracza 4. Średnia w tym okresie kształtuje się na poziomie 0,13833, a odchylenie standardowe wynosi 1,4047. Dynamika



Wykres 3. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 24.08.1995 do 17.10.1997 (wykres wykonany w programie R)

zmian jest więc znacznie niższa niż w poprzednim okresie, gdzie stosunek odchylenia standardowego do średniej wynosi w wartościach bezwzględnych: 73,9 (w omawianym okresie „jedynie": 10,17). Wykres 3 przedstawia kształtowanie się zmienności logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu w opisywanym okresie. Rozkład empiryczny okazuje się być lekko prawostronnie skośny (skośność przyjmuje wartość: 0,04), z kurtozą o 0,848 wyższą od kurtozy rozkładu normalnego.

Przeprowadzone badania wykazały, ze zmienność indeksu w analizowanym odcinku czasu najlepiej opisuje model AR(1)-GARCH(1,1), czyli model, który najlepiej nadaje się do opisu zmienności szeregu w całym badanym okresie:

$$\hat{r}_t = \underset{(0,080636)}{0,322895} r_{t-1} + \underset{(0,042359)}{0,120873} + z_t ,$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,092997)}{0,169745} + \underset{(0,035503)}{0,079156} z_{t-1}^2 + \underset{(0,069384)}{0,831048} \hat{\sigma}_{t-1}^2 .$$

Wyniki testów z grupy SB nie dały podstaw do odrzucenia hipotezy o braku wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność. Również test Nybloma nie dał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o stabilności parametrów modelu.

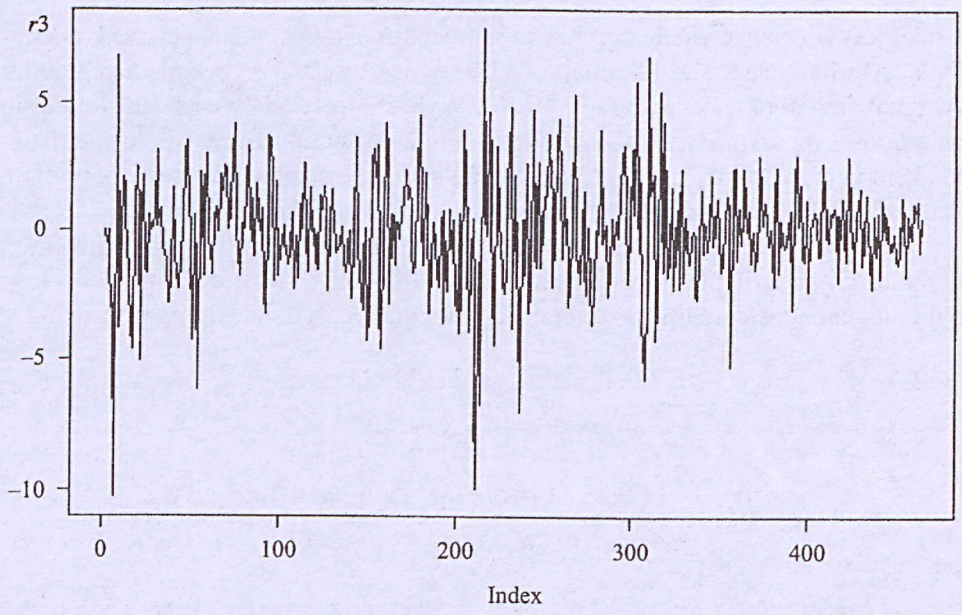
Okres największej zmienności indeksu WIG (notowania: 20.10.1997–30.08.1999)

Kolejne 464 obserwacje cechują się jeszcze większą dynamiką zmienności, niż obserwacje z pierwszego rozważanego okresu. Logarytmiczne stopy zwrotu zawierają się w przedziale od –10,286 do 7,8933, ich średnia wartość wynosi –0,0082532, a odchylenie standardowe: 2,1749. Stosunek odchylenia standardowego do średniej jest tu znacznie większy niż w pierwszym rozważanym podokresie i wynosi ponad 263 (w wartościach bezwzględnych). Obserwacje mają rozkład lewostronnie skośny (skośność jest równa –0,37236, czyli jest około trzy razy większa niż skośność wyznaczona dla całego szeregu), z dużą kurtozą na poziomie 2,465805. Kształtowanie się logarytmicznych stóp zwrotu w badanym okresie przedstawia wykres 4.

Co ciekawe, w przypadku tego szeregu możliwe było dopasowanie modelu AR(1)-GJR-GARCH(1,1). Jego postać przedstawia się następująco:

$$\hat{r}_t = \underset{(0,10315)}{0,023581} + \underset{(0,048038)}{0,176371} r_{t-1} + z_t ,$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,27831)}{0,434768} + \underset{(0,047930)}{0,062232}[z_{t-1} + \underset{(0,12309)}{0,232860}\mathbf{I}(z_{t-1} < 0) z_{t-1}^2] + \underset{(0,10925)}{0,727701} \hat{\sigma}_{t-1}^2 .$$



Wykres 4. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 20.10.1997 do 30.08.1999

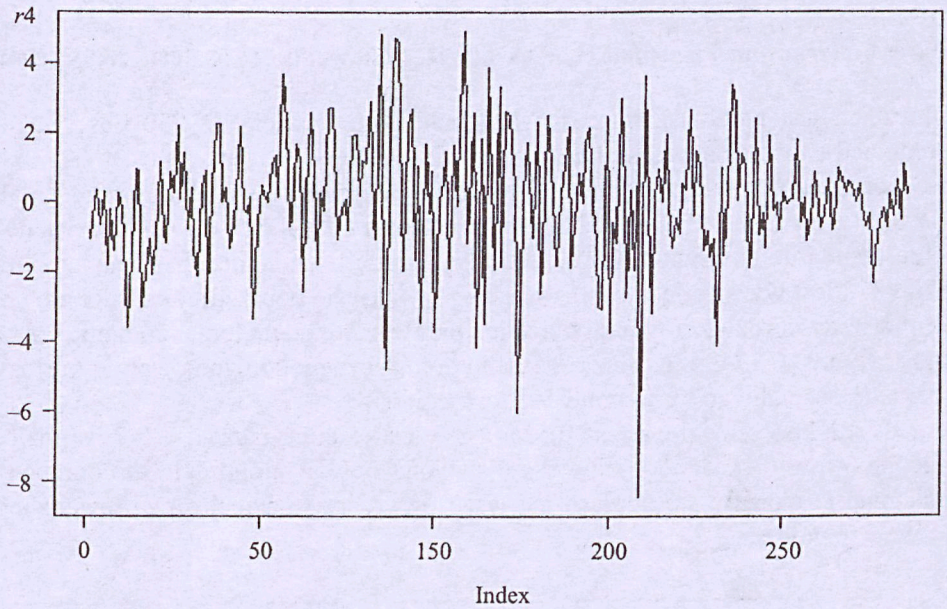
(wykres wykonany w programie R)

Wyraz wolny w równaniu AR jest nieistotny, natomiast wielkość statystyki t-Studenta dla parametru α_1 wynosi 0,19. Warto zwrócić uwagę, że w przypadku tego odcinka czasu statystyki z grupy SB nakazują przyjęcie hipotezy o wpływie zwrotów różnych znaków na zmienność. Istotne są zarówno zwroty dodatnie, jak i ujemne. Ponadto wartości statystyki Nybloma dla parametrów obu modeli nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy o stabilności parametrów (prócz wyrazu wolnego w modelu GJR-GARCH).

Okres umiarkowanej zmienności indeksu WIG (notowania: 31.08.1999–10.08.2000)

Kolejnym wyróżnionym okresem jest przedział od 31.08.1999 do 10.08.2000 roku. Dynamika zmian wyraźnie zanika, a przyjmowane wartości są mniejsze (wykres 5). Minimalna wartość w tym przedziale wynosi –8,4678, zaś maksymalna: 4,9275. Średnia wartość, jaką przyjmują logarytmiczne stopy zwrotu w tym okresie jest większa niż w poprzednim i kształtuje się na poziomie 0,043872, natomiast odchylenie standardowe jest dużo mniejsze i wynosi 1,856. Współczynnik zmienności, jak można by się spodziewać, jest również znacznie niższy niż w poprzednim okresie i przyjmuje wartość 42,3. Empiryczny rozkład zwrotów jest dużo bardziej skośny niż rozkład w całym rozważanym

okresie, przy czym przeważają wartości ujemne (skośność wynosi –0.43669). Kurtoza jest natomiast dużo niższa niż wyznaczona dla całego okresu badania i równa 1, 85963.



Wykres 5. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 31.08.1999 do 10.08.2000 (wykres wykonany w programie R)

Cechą wyróżniającą omawiany okres od pozostałych jest brak zależności między tym, jaką wartość przyjmuje zwrot w okresie t od tego, jaką przyjął w przeszłości. Ponadto dopiero po dodaniu do modelu średniej parametru w postaci wariancji udało się dopasować sensowny model do opisu zmienności szeregu w badanym okresie.

Najlepszym do opisu zmienności w tym okresie okazał się być model AR(0)-ARCH-*in-mean*(1) o następujących parametrach:

$$\hat{r}_t = \underset{(0,46018)}{-0,818627} + \underset{(0,13365)}{0,246293}\hat{\sigma}_t^2 + z_t,$$

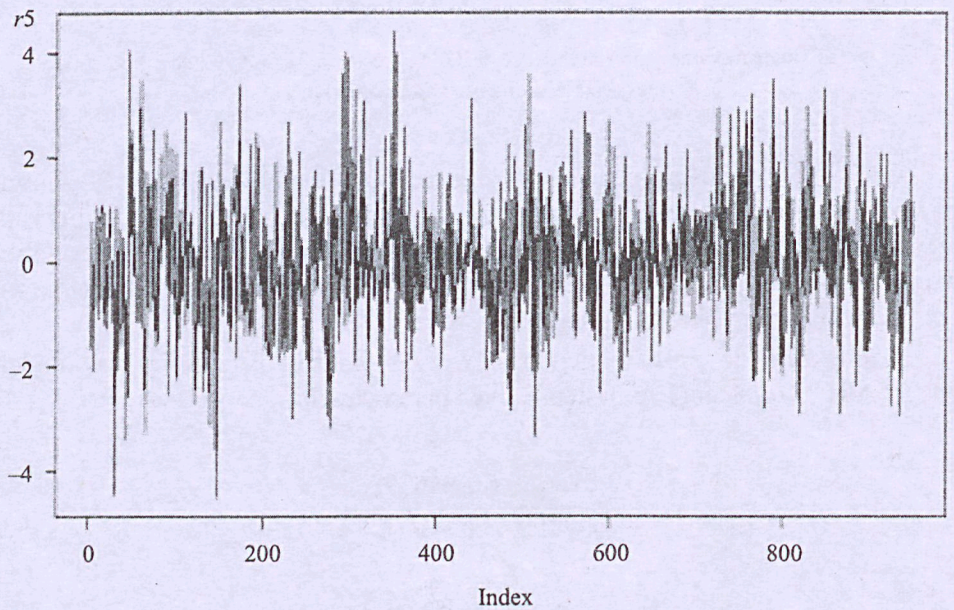
$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,47717)}{-3,008565} + \underset{(0,083332)}{0,152165}z_{t-1}.$$

Wyniki testów z grupy SB nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność. Statystyka Nybloma nakazuje odrzucenie hipotezy o stabilności parametrów tylko w przypadku wyrazu wolnego dla modelu ARCH-*in-mean*.

Okres umiarkowanej zmienności indeksu WIG (notowania: 11.08.2000–28.05.2004)

Okres ten jest najdłuższym z rozważanych, gdyż zawiera aż 950 obserwacji. Średnia wartość osiągana w tym okresie przez stopy zwrotu wynosi 0,022162, a obserwacje odchylają się od niej prawie symetrycznie, zarówno w górę, jak i w dół (przedział zmienności obejmuje wartości od –4,516 do 4,422). Odchylenie standardowe wynosi 1,2747, a współczynnik zmienności osiąga poziom 57,6787 i jest wyższy od zaobserwowanego w okresie poprzednim. Podobnie jak w pierwszym rozważanym przedziale, przeważają odchylenia dodatnie: skośność wynosi 0,17495. Kurtoza rozkładu empirycznego zbliżona jest do kurtozy rozkładu normalnego i przyjmuje wartość 0,5665.

Test KPSS przyjął wartość 0,5347 (przy wartości krytycznej 0,347 na poziomie istotności 0,1), dlatego hipotezę o stacjonarności szeregu należało odrzucić. Stacjonarne okazały się dopiero pierwsze przyrosty i na nich przeprowadzono estymację modelu.



Wykres 6. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 11.08.2000 do 28.05.2004 (wykres wykonany w programie R)

Do opisu zmienności indeksu w analizowanym okresie udało się dopasować model ARIMA(1,1,1)-GARCH(1,1). Przyjmuje on następującą postać:

$$\Delta\hat{r}_t = \underset{(0,0014284)}{0,001011} + \underset{(0,034896)}{0,066480}\Delta r_{t-1} - \underset{(0,012096)}{0,967583} z_{t-1} + z_t ,$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,01752)}{0,032011} + \underset{(0,010842)}{0,033838} z_{t-1} + \underset{(0,014254)}{0,946741}\hat{\sigma}_{t-1}^2 .$$

Wyniki testów z grupy SB nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność. Statystyka Nybloma sugeruje, że niestabilny jest współczynnik przy MA(1).

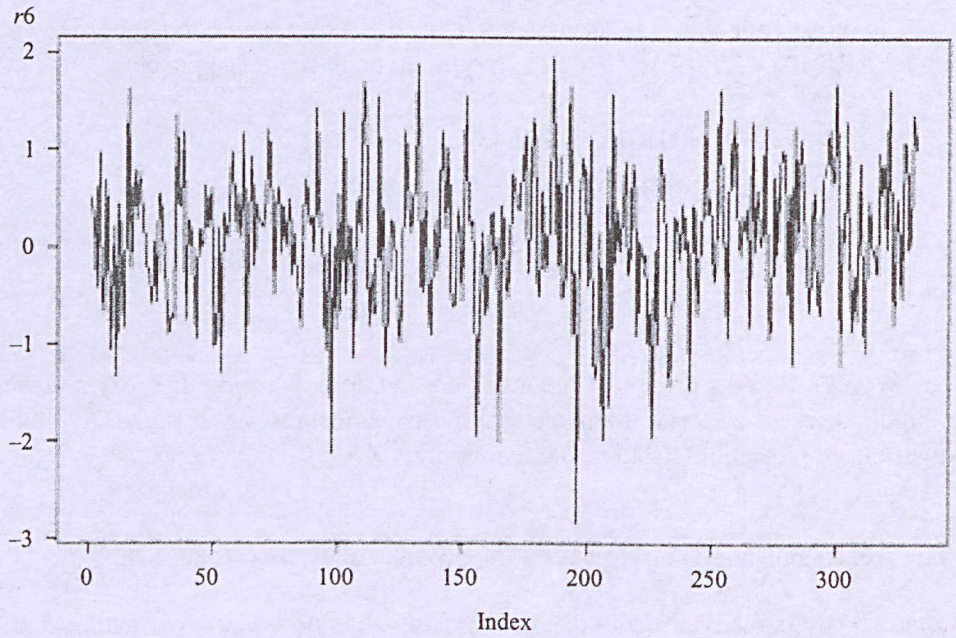
Okres małej zmienności indeksu WIG (notowania: 30.05.2004–16.09.2005)

Ostatni z wyróżnionych podokresów charakteryzuje się wyjątkowo małą, w porównaniu z poprzednimi, zmiennością. Najmniejsza wartość w tym przedziale czasowym to –2,8481, zaś największa: 1,9685. Średnia logarytmiczna stopa zwrotu dla tego przedziału wynosi: 0,10437, a odchylenie: 0,76879. Warto zwrócić uwagę na najmniejszy wśród rozważanych okresów współczynnik zmienności: 7,37. Rozkład empiryczny zwrotów jest lekko lewostronnie skośny (skośność jest równa –0,31574), o kurtozie zbliżonej do rozkładu normalnego: 0,46. Podobnie jak w okresie czwartym, nie udało się dopasować do szeregu logarytmicznych stóp zwrotu modelu AR(1). Nie udało się również uzyskać dobrego oszacowania parametrów dla modelu GARCH(1,1). Ostatecznie, model, który najlepiej opisuje zmienność w omawianym okresie to model AR(0)-ARCH(1):

$$\hat{r}_t = \underset{(0,045317)}{0,076745} + z_t ,$$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \underset{(0,059245)}{0,615284} - \underset{(0,018372)}{0,045213} z_{t-1} .$$

Wszystkie parametry modelu są istotne.
Wyniki testów z grupy SB, podobnie jak w poprzednim okresie, nie dają podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o braku wpływu zwrotów różnych znaków na zmienność. Wszystkie parametry modelu są stabilne.



Wykres 7. Dynamika zmienności indeksu WIG w okresie od 30.05.2004 do 16.09.2005 (wykres wykonany w programie R)

Wnioski końcowe

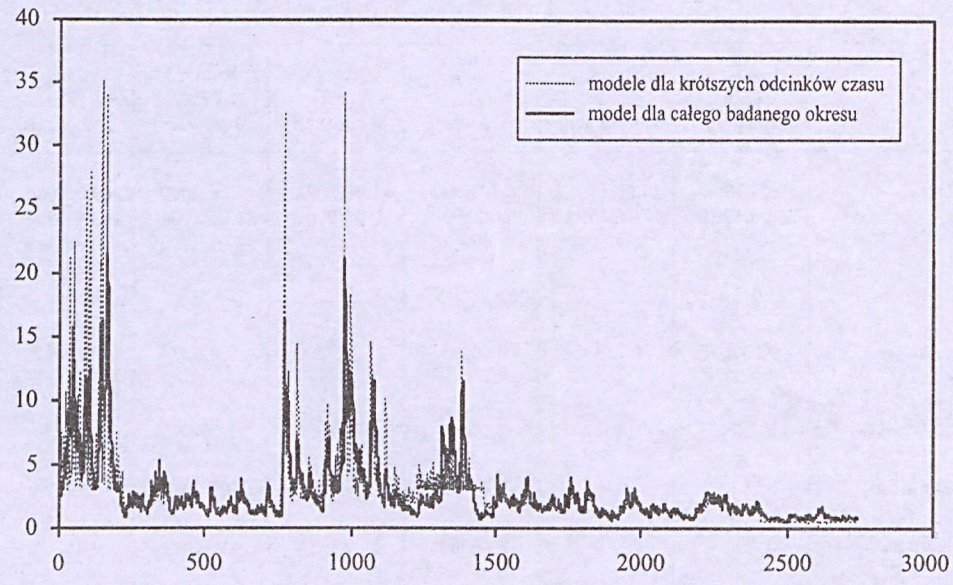
Podsumowując, dla obserwacji z całego badanego okresu udało się, zgodnie z wynikami przedstawianymi w literaturze, dopasować model AR(1)-GARCH(1,1). Stwierdzono też zależność między występowaniem zwrotów ujemnych a przyszłymi szokowymi zmianami wartości indeksu. Po podziale szeregu na sześć okresów o różnej intensywności zmian, w dwóch przypadkach zmienność najlepiej opisywał model GARCH(1,1). Były to szeregi, w których liczba obserwacji była największa, tj. szereg drugi (539 obserwacji) oraz szereg piąty (950 obserwacji), w którym dodatkowo stwierdzono integrację. W dwóch przypadkach udało się dopasować modele uwzględniające zjawisko premii za ryzyko: w przypadku trzecim (464 obserwacje) zmienność najlepiej opisywał model AR(1)-GJR-GARCH(1,1), zaś w czwartym (236 obserwacji) – model AR(0)--ARCH-M(1). Ostatecznie, w przypadku szeregów: pierwszego i szóstego, liczących najmniej, bo odpowiednio: 220 i 330 obserwacji, zmienność najlepiej opisywał model AR(p)-ARCH(p), tj. dla szeregu pierwszego: model AR(1)-ARCH(2) i dla szóstego: AR(0)-ARCH(1). Uzyskane wyniki podsumowuje tabela 1.

Tabela 1. Podsumowanie wyników

	Szereg 1 (220 obserwacji)	Szereg 2 (540 obserwacji)	Szereg 3 (464 obserwacji)	Szereg 4 (236 obserwacji)	Szereg 5 (950 obserwacji)	Szereg 6 (330 obserwacji)
Okres	10.03.1994–23.08.1995	24.08.1995–17.10.1997	20.10.1997–30.08.1999	31.08.1999–10.08.2000	11.08.2000–28.05.2004	30.05.2004–16.09.2005
Współczynnik zmienności	73,9	10,17	263	42,3	57,6787	7,37
Średnia	–0,037083	0,13833	–0,0082532	0,043872	0,022162	0,10437
Odchylenie standardowe	2,7379	1,4047	2,1749	1,856	1,2747	0,76879
Skośność	0,2878	0,04	–0,37236	–0,43669	0,17495	–0,31574
Kurtoza	0,25	0,848	2,465805	1, 85963	0,5665	0,46
Wpływ znaku odchylenia na wielkość szoku (SB)	nie	nie	tak	nie	nie	nie
Model	AR(1)--ARCH(2)	AR(1)--GARCH(1,1)	AR(1)-GJR--GARCH(1,1).	AR(0)-ARCH *-in-mean*(1).	ARIMA(1,1,1)--GARCH(1,1)	AR(0)--ARCH(1)
Stabilność parametrów	niestabilny wyraz wolny w modelu ARCH	wszystkie parametry stabilne	niestabilny wyraz wolny w modelu GJR-GARCH	niestabilny wyraz wolny w modelu ARCH-*in*--*mean*	niestabilny współczynnik przy MA(1)	wszystkie parametry stabilne

Można zatem stwierdzić, że w przypadku badanego indeksu, modele GARCH lepiej opisywały tendencje występujące w dłuższych szeregach, a zależność wariancji rozkładu resztowego od jej opóźnionych wartości była widoczna dopiero wtedy, gdy szereg miał odpowiednią długość. Przy dłuższych szeregach przypadkowe odchylenia mają bowiem mniejsze znaczenie i dużo wyraźniej zaznacza się ogólna tendencja. Na przykład, tylko w szeregu obejmującym dane z całego analizowanego okresu można dostrzec własność szeregów finansowych, sformułowaną przez Blacka, że stopy zwrotu z akcji są ujemnie skorelowane z ich zmiennością, tj. zmienność rośnie, jeśli ceny akcji spadają.

Z drugiej strony, nie wszystkie parametry w modelu oszacowanym dla całego okresu są statystycznie stabilne, co sugeruje, że być może ogólne oszacowanie nie mówi wszystkiego o dynamice zmienności.



Wykres 8. Porównanie empirycznej wariancji warunkowej, uzyskanej z modelu dla całego badanego okresu oraz z modeli dla krótszych odcinków czasu (wykres wykonany w programie Excel)

Może to być skutkiem podkreślanych w literaturze zmian strukturalnych, które obserwuje się w szeregach finansowych. Wykres 8 przedstawia porównanie wariancji warunkowej dla modelu oszacowanego dla całego okresu oraz dla okresów krótkich. Linią przerywaną oznaczona jest wariancja warunkowa wyznaczona z modeli dla krótkich okresów. Jak widać, w wielu przypadkach model ogólny podaje zbyt niskie szacunki, w porównaniu z modelami szczegółowymi. Jest to szczególnie widoczne w okresach o bardzo dużej zmienności. Ponieważ badanie zmienności za pomocą modeli GARCH często stosuje się w analizie wartości narażonej na ryzyko (VaR – Value at Risk), to np. niedoszacowanie zmienności może być zgubne w skutkach. Dlatego uzasadnione jest podzielenie analizowanego okresu na mniejsze odcinki i zaobserwowanie zmienności zwrotów w krótszych okresach. Istotnie, w prawie wszystkich oszacowanych modelach parametry okazały się być stabilne (prócz wyrazów wolnych i współczynnika przy MA(1) w modelu piątym). Każdy model ukazywał nieco inną tendencję w kształtowaniu się zmienności. Hipoteza o różnym kształtowaniu się zmienności w różnych okresach, która stanowiła podstawę do podziału szeregu, wydaje się być uzasadniona. Porównanie wyników dla poszczególnych szeregów, choćby samych tylko współczynników zmienności, stanowi dowód na to, że zaproponowany podział jest słuszny. Zmienność zmieniała się bowiem od względnie dużej (okres pierwszy), po średnią (drugi), bardzo dużą (okres trzeci), po znów

umiarkowaną (okres czwarty i piąty), aż do bardzo małej (okres szósty). W pewnym sensie uzyskane wyniki ilustrują sytuację, jaka w badanych latach miała miejsce na giełdzie. Przykładowo, w okresie od marca 1994 do wiosny 1995 (w przybliżeniu: okres pierwszy) można mówić o krachu na polskiej giełdzie; o ile w latach 1992–1994 giełda była w rozkwicie, to od wiosny 1994 ludzie zaczęli raptownie wycofywać swoje inwestycje. Z kolei lata 1995–1997 (okres drugi) cechują się stagnacją i dopiero od 1997 rozpoczęło się ożywienie. Koniunktura w latach 1997–1998 była zmienna, a na notowaniach polskich akcji odbijały się echa kryzysu azjatyckiego i rosyjskiego. Od lutego 1997 do października 1998 wartość indeksu obniżyła się o ponad 40%, po czym na giełdzie rozpoczął się wzrost. Według rozważanego podziału, wydarzenia te przypadły na okres trzeci, który charakteryzuje się największym współczynnikiem zmienności i jest jedynym, w którym znak odchylenia wpływa na wartość przyszłego szoku. W latach 1999–2000 znów nastąpiło ożywienie, związane z szybkim rozwojem technologii informacyjnych (tzw. „hossa internetowa"), które załamało się wiosną roku 2000. Okres hossy przypada na wyróżniony okres czwarty, do którego opisu najlepiej pasuje model GARCH-in-mean, uwzględniający istnienie premii za ryzyko i istnienie efektu dźwigni finansowej. Do roku 2002 na giełdzie trwała bessa. W latach 2002–2003 zaczęły na giełdę wkraczać nowe fundusze inwestycyjne i emerytalne. Natomiast w roku 2004 na giełdę zaczęły wchodzić nowe spółki (ogółem w 2004 roku pojawiło się 36 nowych spółek na giełdzie). Lata 2000–2004 obejmuje szereg piąty. Natomiast lata ponownego rozkwitu, tj. 2004–2005 obejmuje szereg szósty.

Uzyskane wyniki zachęcają do przeprowadzenia dalszych badań, np. przy innym podziale szeregu oraz zbadania zmienności instrumentów pochodnych na indeks WIG, dla analogicznych przedziałów czasowych.

Literatura

[1] Barnes M. L., de Lima P. J. F., *Modeling Financial Volatility: Extreme Observations, Nonliearities and Nonstationarities*, School of Economics Working Paper 00-5, University of Adelaide, Adelaide 1999

[2] Bollerslev T., *Generalised Autoregressive Conditional Heterosskedasticity*, „Journal of Econometrics" 1986, nr 31, s. 307–327

[3] Diebold F. X., Lopez J. A., *Modeling Volatility Dynamics*, w: *Macroeconometrics: Developments, Tensions and Prospects*, Kluwer Academic Publishig, Boston, 1995

[4] Doman M., Doman R., *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2004

[5] Engle R. F., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, „Econometrica" 1982, nr 50, s. 987–1007

[6] Frances P. H., van Dijk D., *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge 2000
[7] Kwiatkowski D., Phillips P. C. B., Schmidt P., Shin Y., *Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root. How Sure Are We that Economic Time Series Have a Unit Root?* „Journal of Econometrics" 1992, nr 54, s. 159–178
[8] Osińska M., *Ekonometria Finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2006
[9] Osiewalski J., Pipień M., *GARCH-in-Mean through Skewed t Conditional Distributions: Bayesian Interference for Exchange Rates*, Macromodels'1999, Łódź 1999, s. 355–369
[10] Phillips P. C. B., Perron P., *Testing for a Unit Root in Time Series Regression*, „Biometrika" 1988, nr 75, s. 335–364
[11] Tsay R. S., *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., 2002

Agata Kliber

STUDY ON THE VOLATILITY OF THE WARSAW STOCK INDEX (WIG)

Summary

The goal of the article is to verify the behaviour of the volatility on the Polish stock market, as well as to prove the usefulness of the GARCH models to describe the situation of the Warsaw Stock Exchange during the analysed period, i.e. from 3.10. 1994 to 16.09.2005. The volatility of the returns is analysed based upon the observations of the main stock index – WIG (Warsaw Stock Index). The study is performed using various GARCH models. First, one of the GARCH models is estimated using the whole sample, while in the next step – to allow for more precise estimation – the time series is divided into six sub-samples and separate models are estimated for each of the sub-periods.