Zbigniew ŚWITALSKI
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

O PEWNYCH UOGÓLNIENIACH METODY BORDY

Wstęp

Metoda Bordy jest jedną z najbardziej znanych metod porządkowania zbioru kandydatów (ogólnie: wariantów decyzyjnych) w sytuacji, gdy dane są preferencje poszczególnych głosujących (sędziów, jurorów, ekspertów itp.). Metoda ta, mimo swoich wad (nie spełnia na przykład znanego warunku „niezależności od wariantów niezwiązanych"), jest uznawana za jedną z lepszych metod „agregowania" preferencji indywidualnych w jedną preferencję „społeczną" (zob. [1], [4]).

Metoda Bordy, w swojej najprostszej wersji, polega na przyporządkowaniu kandydatom punktów (rang) w ten sposób, że kandydat najlepszy dla danego głosującego otrzymuje $n - 1$ punktów, drugi w kolejności $n - 2$ punktów, a każdy następny o jeden punkt mniej od poprzedniego (ostatni otrzymuje 0 punktów, n jest liczbą kandydatów). Ostateczny porządek otrzymujemy, sumując – dla każdego kandydata – wszystkie punkty otrzymane przez niego od poszczególnych głosujących i ustawiając kandydatów w kolejności zgodnej z liczbą otrzymanych punktów. W swojej oryginalnej wersji, podanej przez Bordę w 1781 roku, metoda ta nie dopuszcza żadnych równoważności między kandydatami. Gdybyśmy więc chcieli uwzględnić przypadki, w których pewni kandydaci są dla głosującego tak samo dobrzy (z punktu widzenia jego preferencji), wtedy niezbędna byłaby modyfikacja klasycznej wersji metody.

Modyfikacji tego rodzaju można dokonać różnymi sposobami. W artykule porównujemy dwie metody takiego uogólnienia – sposób podany przez Marchanta w pracach [2], [3] oraz sposób, który nazywamy „uśred-

nianiem". Pokazujemy, że oba te sposoby określają identyczne końcowe uporządkowanie kandydatów, ale jednocześnie mają pewną wadę. Mogą one mianowicie wyznaczać różne „odległości" między „sąsiednimi" kandydatami, nawet w sytuacji, gdy nie mamy żadnej informacji o preferencjach głosujących, która upoważniałaby do takiego zróżnicowania (w oryginalnej metodzie „odległości" między sąsiednimi kandydatami, tzn. różnice ich rang Bordy są jednakowe).

W dalszej części pracy proponujemy metodę, która nie ma wspomnianej wyżej wady. Metodę tę uogólniamy na przypadek, gdy dysponujemy informacją o względnych „odległościach" pomiędzy sąsiednimi kandydatami w uporządkowaniach preferencyjnych poszczególnych głosujących. W punkcie 4 formułujemy twierdzenie, które mówi o tym, przy jakich założeniach dotyczących tych „odległości" możliwe jest wyznaczenie odpowiednich rang, spełniających warunek „stałych sum" (tzn. warunek, zgodnie z którym suma rang przyporządkowanych wszystkim kandydatom w uporządkowaniu danego głosującego jest stała).

1. Metoda Bordy

Niech X będzie skończonym zbiorem kandydatów, a Y skończonym zbiorem głosujących. Zakładamy, że każdy głosujący może uporządkować kandydatów w kolejności od najlepszego do najgorszego, przy czym niektórzy kandydaci mogą być, dla danego głosującego, równoważni (tak samo dobrzy). Oznacza to, że dla każdego głosującego $G \in Y$ określona jest w zbiorze X jego relacja preferencji, oznaczana symbolem $\geqslant_G$, która jest zwrotna, przechodnia i zupełna, tzn. jest tzw. słabym porządkiem. Relacja ta wyznacza w zbiorze X relację ścisłej preferencji $>_G$ oraz relację równoważności $\approx_G$ następująco (K, L są dowolnymi kandydatami ze zbioru X):

$$K >_G L \Leftrightarrow K \geqslant_G L \wedge \sim L \geqslant_G K,$$

$$K \approx_G L \Leftrightarrow K \geqslant_G L \wedge L \geqslant_G K.$$

W szczególnym wypadku, gdy spełniony jest warunek

$$K \approx_G L \Leftrightarrow K = L,$$

wtedy relacja $\geqslant_G$ jest liniowym porządkiem, tzn. dwaj różni kandydaci nie mogą być równoważni (dalej, jeśli nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy używali symboli $\geqslant$, $>$, $\approx$ bez indeksu G).

Będziemy mówili, że (K, L) jest parą *kandydatów sąsiednich* w uporządkowaniu $\succcurlyeq$ głosującego G, jeśli spełniony jest warunek

$$K \succ L \wedge \sim(\exists M \in X : K \succ M \succ L).$$

Kandydata K będziemy nazywali *kandydatem ostatnim* w uporządkowaniu $\succcurlyeq$ głosującego G, jeśli

$$\forall L \in X : L \succcurlyeq K.$$

Będziemy używali następujących zapisów. Zapis G: *ACBDE* będzie oznaczał, że dla głosującego G kandydat A jest najlepszy, C jest drugi w kolejności itd. (tzn. $A \succ C \succ B \succ D \succ E$). Zapis G: *A-CBE-D* będzie oznaczał, że na pierwszym miejscu listy preferencji głosującego G znajdują się kandydaci A i C (są równie dobrzy dla G), na drugim miejscu B, a na trzecim jednocześnie E i D (tzn. $A \approx C \succ B \succ E \approx D$).

Dla głosującego G i kandydata K symbole

$$G^+(K) = \{L \in X : L \succ K\}, \qquad G^-(K) = \{L \in X : K \succ L\}$$

będą oznaczały odpowiednio zbiór kandydatów lepszych i zbiór kandydatów gorszych od kandydata K w uporządkowaniu głosującego G.

Klasyczna metoda Bordy, stosowana tylko gdy preferencje $\succcurlyeq$ są liniowymi porządkami, polega na wyznaczeniu dla każdego głosującego G i każdego kandydata K, wskaźnika (rangi) Bordy postaci

$$B(G, K) = |G^-(K)|, \tag{1}$$

gdzie $|G^-(K)|$ oznacza liczbę elementów zbioru $G^-(K)$.

Ranga Bordy $B(G, K)$ jest więc liczbą kandydatów gorszych od kandydata K w uporządkowaniu $\succcurlyeq$ głosującego G. Na przykład dla uporządkowania G: *CABDE* otrzymujemy $B(G, C) = 4$, $B(G, A) = 3$, $B(G, B) = 2$, $B(G, D) = 1$, $B(G, E) = 0$.

Ostateczne uporządkowanie kandydatów otrzymujemy za pomocą wskaźników

$$B(K) = \sum_{G \in Y} B(G, K).$$

Przykład 1. Niech $Y = \{G_1, G_2\}$ oraz G_1: *CABDE*, G_2: *AECBD*. Wówczas $B(A) = 4 + 3 = 7$, $B(B) = 3$, $B(C) = 6$, $B(D) = 1$, $B(E) = 3$. Ostateczne uporządkowanie dla całej grupy Y ma więc postać Y: *ACB-ED*.

Zwróćmy uwagę, że wskaźniki $B(G, K)$ mają następujące, oczywiste własności:

(i) *Własność stałych sum*: Liczba

$$S(G)=\sum_{K\in X} B(G, K)=\frac{n(n-1)}{2} \tag{2}$$

jest stała i nie zależy od głosującego G (n jest liczbą kandydatów).

(ii) *Własność stałych różnic*: Dla dowolnego głosującego G i dowolnej pary (K, L) kandydatów sąsiednich w uporządkowaniu $\geqslant_G$ różnica

$$B(G, K)-B(G, L)=1$$

jest stała i nie zależy od G i od pary (K, L).

(iii) Jeśli K jest ostatnim kandydatem w uporządkowaniu $\geqslant$, to $B(G, K)=0$.

2. Metoda „uśredniania"

Jeśli możliwe są równoważności kandydatów (tzn. niektóre relacje $\geqslant$ nie są liniowymi porządkami), to wzór (1) okazuje się mało przydatny. Możemy bowiem liczbę $S(G)$ we wzorze (2) interpretować jako łączną pulę głosów, którą ma głosujący G i którą rozdziela pomiędzy wszystkich kandydatów. W wypadku liniowych porządków własność (i) gwarantuje, że pula ta jest jednakowa dla wszystkich głosujących. W przypadku preferencji w postaci dowolnych słabych porządków również naturalne jest założenie, że każdy głosujący dysponuje tą samą pulą głosów (jeśliby tak nie było, to oznaczałoby to „dyskryminację" niektórych głosujących). Tymczasem wzór (1) nie gwarantuje spełnienia własności stałych sum (i), gdyż na przykład jeśli wszyscy kandydaci byliby równoważni dla głosującego G, to otrzymalibyśmy $B(G, K)=0$ dla każdego kandydata K, a więc również $S(G)=0$.

Uogólnienie wzoru (1) gwarantujące spełnienie warunku (i) może być następujące. Załóżmy, że $\geqslant$ jest słabym porządkiem, określającym preferencje głosującego G. Rozważamy wszystkie liniowe porządki $Q \subset \geqslant$, tzn. liniowe porządki spełniające dla dowolnych kandydatów K i L warunek:

$$KQL \Rightarrow K \geqslant L.$$

Analogicznie jak poprzednio definiujemy

$$Q^{-}(K)=\{L\in X\colon KQL\wedge K\neq L\}$$

oraz

$$B(Q, K)=|Q^{-}(K)|.$$

Uogólnione wskaźniki Bordy $U(G, K)$ możemy teraz zdefiniować jako średnią wszystkich wskaźników $B(Q, K)$, tzn.

$$U(G, K)=\sum_{Q\in L(G)}\frac{1}{l(G)}B(Q, K),$$

gdzie $L(G)$ jest zbiorem wszystkich liniowych porządków zawartych w $\geqslant$, a $l(G)$ jest liczbą elementów zbioru $L(G)$, tzn. $l(\mathrm{G})=|L(G)|$.

Metodę porządkowania zbioru X za pomocą wskaźników $U(G, K)$ będziemy nazywali metodą „uśredniania".

Przykład 2. Dla uporządkowania G: AB-CD mamy dwa liniowe porządki: Q_1: $ABCD$ i Q_2: $ACBD$ zawarte w $\geqslant$. Stąd $U(G, A)=B(Q_1, A)=B(Q_2, A)=3$, $U(G, B)=3/2$, $U(G, C)=3/2$, $U(G, D)=0$.

Następujący lemat pokazuje, że wskaźniki $U(G, K)$ mają własność stałych sum.

Lemat 1. *Dla dowolnego głosującego G spełniony jest warunek*

$$\sum_{K\in X}U(G, K)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Dowód. Mamy

$$\sum_{K\in X}U(G, K)=\sum_{K\in X}\sum_{Q\in L(G)}\frac{1}{l(G)}B(Q, K)=\frac{1}{l(G)}\sum_{Q\in L(G)}\sum_{K\in X}B(Q, K)=$$

$$=\frac{1}{l(G)}\sum_{Q\in L(G)}\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{l(G)}l(G)\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.\quad\blacksquare$$

Udowodnimy teraz prosty związek między wskaźnikami $U(G, K)$ a wskaźnikami $B(G, K)$ zdefiniowanymi za pomocą wzoru (1).

Lemat 2. *Dla dowolnego głosującego G i dowolnego kandydata K spełniona jest równość*

$$U(G, K)=|G^{-}(K)|+\frac{k-1}{2}, \tag{3}$$

gdzie k jest liczbą kandydatów równoważnych z kandydatem K w uporządkowaniu $\geqslant_G$.

Dowód. Niech S oznacza zbiór kandydatów równoważnych z kandydatem K. Załóżmy, że liczba liniowych porządków Q, ustawiających K na pierwszej pozycji w zbiorze S, jest równa m. Wówczas liczba liniowych porządków, dla których K jest na ustalonej, innej pozycji w zbiorze S, jest też równa m. Jeśli K jest na i-tej pozycji dla pewnego liniowego porządku Q, to

$$B(Q, K)=|G^{-}(K)|+k-i.$$

Ponieważ wszystkich liniowych porządków jest km, więc

$$U(G, K)=\frac{1}{km}\sum_{i=1}^{k} m(|G^{-}(K)|+k-i)=$$

$$=|G^{-}(K)|+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(k-i)=|G^{-}(K)|+\frac{k-1}{2}. \quad \blacksquare$$

3. Metoda Marchanta

Innym uogólnieniem metody Bordy jest metoda przedstawiona przez Marchanta w pracach [2], [3] (zdefiniowana tam dla tzw. relacji stopniowalnych). Wskaźniki Bordy zostały przez autora tych prac zdefiniowane następująco:

$$M(G, K)=|G^{-}(K)|-|G^{+}(K)|.$$

Wykażemy teraz związek metody Marchanta z metodą uśredniania.

Lemat 3. *Dla dowolnego G i dowolnego K zachodzi równość*

$$M(G, K)=2U(G, K)-n+1. \tag{4}$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli k jest liczbą elementów w klasie równoważności kandydata K, to

$$|(G^{+}(K)|+|G^{-}(K)|+k=n. \tag{5}$$

Oznaczmy $|G^+(K)|=a$, $|G^-(K)|=b$. Korzystając z (3) oraz (5), otrzymujemy

$$2U(G, K)=2b+k-1=2b+n-a-b-1=b-a+n-1,$$

co dowodzi (4). ■

Z lematów 1 oraz 3 wynika, że metoda Marchanta ma własność stałych sum, gdyż

$$\sum_{K\in X} M(G, K)=2\sum_{K\in X} U(G, K)+\sum_{K\in X}(1-n)=2\frac{n(n-1)}{2}+n(1-n)=0,$$

oraz że końcowe uporządkowania wyznaczone w zbiorze X przez metody M i U są identyczne.

Podamy teraz przykład pokazujący, że zarówno metoda U, jak i metoda M nie spełniają warunku stałych różnic, tzn. że różnice rang dla dwóch par sąsiednich kandydatów mogą być różne.

Przykład 3. Załóżmy, że preferencje głosującego G są następujące: G: *A-BC-DE*. Wówczas $U(G, A)=U(G, B)=3{,}5$; $U(G, C)=U(G, D)=1{,}5$; $U(G, E)=0$. Stąd

$$2=U(G, A)-U(G, C)\neq U(G, C)-U(G, E)=1{,}5.$$

„Odległość" między sąsiednimi kandydatami A i C jest więc większa niż „odległość" między sąsiednimi kandydatami C i E. Lemat 3 pokazuje, że różnice te będą różne także dla metody M. Zauważmy jednak, że nie ma żadnego powodu, dla którego przewaga A nad C w uporządkowaniu $\geqslant$ miałaby być większa od przewagi C nad E (głosujący w żaden sposób nie określa intensywności tych przewag). Można więc powiedzieć, że zarówno metoda M, jak i metoda U nie są najlepszymi metodami wyznaczania rang Bordy dla dowolnych słabych porządków.

W następnym punkcie zdefiniujemy metodę, która będzie miała zarówno własność stałych sum, jak i własność stałych różnic, a także jej uogólnienie, umożliwiające uwzględnienie intensywności preferencji decydenta dla par sąsiednich kandydatów.

4. Uogólniona metoda Bordy

Aby znaleźć właściwą metodę rangowania uogólniającą metodę Bordy, sformułujemy warunki, które taka metoda powinna spełniać. Założymy po pierwsze, że dla każdego głosującego suma wszystkich rang jest stała

i równa pewnej liczbie $S>0$. Załóżmy też, że ustalona jest ranga ostatniego kandydata w uporządkowaniu podanym przez głosującego G – niech ta ranga będzie równa $\alpha(G)\geqslant 0$. Zauważmy, że ponieważ wszystkie rangi powinny być $\geqslant \alpha(G)$, a kandydatów jest n, więc $n\,\alpha(G)\leqslant S$. Oznacza to, że możemy określić funkcję

$$\alpha: Y \to [0, S/n]. \tag{6}$$

Załóżmy po trzecie, że różnice rang dla par sąsiednich kandydatów są równe. Formalnie, powyższe założenia dadzą się ująć w następującą definicję:

Definicja 1. Załóżmy, że dla każdego głosującego $G \in Y$ określony jest słaby porządek $\geqslant_G$ w zbiorze X. Załóżmy też, że dana jest liczba $S>0$ i funkcja $\alpha: Y \to [0, S/n]$. Metodą Bordy typu (S, α) nazywamy funkcję $B: Y \times X \to [0, S]$ taką, że

(i) $K \geqslant_G L \Leftrightarrow B(G, K) \geqslant B(G, L)$,

(ii) $\sum_{K \in X} B(G, K) = S$,

(iii) $B(G, K) - B(G, L) = B(G, M) - B(G, N)$,
jeśli (K, L) i (M, N) są parami sąsiednich kandydatów w uporządkowaniu $\geqslant_G$,

(iv) $B(G, K) = \alpha(G)$,
jeśli K jest ostatnim kandydatem w uporządkowaniu $\geqslant_G$.

Jeśli chcemy uwzględnić zróżnicowane „odległości" między kandydatami w uporządkowaniu $\geqslant_G$, to możemy założyć, że głosujący jest w stanie określić, że na przykład różnica $B(G, K) - B(G, L)$ jest k razy większa niż różnica $B(G, M) - B(G, N)$ ((K, L) i (M, N) są parami sąsiednich kandydatów). Załóżmy więc, że dla każdego ciągu (G, K, L, M, N) takiego, że (K, L) i (M, N) są parami sąsiednich kandydatów w uporządkowaniu $\geqslant_G$, określona jest liczba $\varphi(G, K, L, M, N) > 0$, przy czym spełnione są warunki:

$$\varphi(G, K, L, M, N) \cdot \varphi(G, M, N, R, Q) = \varphi(G, K, L, R, Q). \tag{7}$$

((R, Q) jest trzecią parą sąsiednich kandydatów). W takiej sytuacji definicję 1 możemy zastąpić definicją 2.

Definicja 2. Załóżmy, że dla każdego głosującego $G \in Y$ określony jest słaby porządek $\geqslant_G$ w zbiorze X. Załóżmy też, że dana jest liczba $S>0$,

funkcja $\alpha: Y \to [0, S/n]$ i liczby $\varphi(G, K, L, M, N)$, spełniające warunki (7). Metodą Bordy typu (S, α, φ) nazywamy funkcję $B: Y \times X \to [0, S]$ taką, że spełnione są warunki (i), (ii), (iv) z definicji 1 oraz

$$\text{(iii')} \qquad \frac{B(G, K)-B(G, L)}{B(G, M)-B(G, N)}=\varphi(G, K, L, M, N),$$

gdzie (K, L) i (M, N) są parami sąsiednich kandydatów w uporządkowaniu $\geqslant_G$.

Zauważmy, że każda metoda typu (S, α) jest jednocześnie metodą typu (S, α, φ), gdzie $\varphi(G, K, L, M, N)=1$ dla dowolnej piątki (G, K, L, M, N).

Twierdzenie. *Dla dowolnej trójki* (S, α, φ), *takiej jak w definicji* 2, *istnieje dokładnie jedna metoda Bordy typu* (S, α, φ).

Dowód. Ustalmy głosującego G i oznaczmy $\alpha=\alpha(G)$. Załóżmy, że kandydaci są ustawieni w klasach równoważności $U_1, U_2, \ldots, U_t$ o licznościach $r_1, r_2, \ldots, r_t$. Z (i) wynika, że jeśli K i L należą do tej samej klasy, to $B(G, K)=B(G, L)$. Niech s_i oznacza liczbę $B(G, K)$ dla dowolnego kandydata $K \in U_i$. Zauważmy, że $s_1>s_2>\ldots>s_t$ oraz że jeśli $t>1$, to $\alpha<S/n$ (gdyby $\alpha=S/n$, wtedy $r_1s_1+r_2s_2+\ldots+r_ts_t>(r_1+r_2+\ldots+r_t)S/n=S$). Oznaczmy $(i=1, 2, \ldots, t-2, t\geqslant 3)$:

$$k_i=\frac{s_i-s_{i+1}}{s_{i+1}-s_{i+2}}.$$

Zatem $k_i=\varphi(G, K, L, M, N)$, jeśli $K \in U_i$, $L \in U_{i+1}$, $M \in U_{i+1}$, $N \in U_{i+2}$. Z warunków (i), (ii), (iii'), (iv) wynika, że rangi s_i spełniają warunki:

(a) $s_1>s_2>\ldots>s_t$,

(b) $r_1s_1+r_2s_2+\ldots+r_ts_t=S$,

(c) $s_t=\alpha$,

(d) $s_1-s_2=k_1(s_2-s_3)$,

$s_2-s_3=k_2(s_3-s_4)$,

.....

$s_{t-2}-s_{t-1}=k_{t-2}(s_{t-1}-s_t)$ $(t\geqslant 3)$.

Wystarczy więc udowodnić, że istnieje dokładnie jeden ciąg $(s_1, s_2, \ldots, s_t)$, spełniający warunki (a)-(d). Rozpatrujemy trzy przypadki:

I. Jeśli $t=1$, to wystarczy przyjąć $s_1=S/n$.

II. Jeśli $t=2$, to z równości $r_1s_1+r_2s_2=S$ i $s_2=\alpha$ otrzymujemy $s_1=(S-r_2\alpha)/r_1$.

Stąd oraz z zależności $r_1+r_2=n$ i nierówności $\alpha<S/n$ otrzymujemy $s_1>s_2=\alpha$.

III. Jeśli $t\geqslant 3$, to na podstawie równań (d) otrzymujemy

$$s_i=k_i(s_{i+1}-s_{i+2})+s_{i+1} \qquad (i=1, 2, ..., t-2). \tag{8}$$

Ze wzoru (8) wynika (korzystamy z indukcji), że każde s_i jest funkcją s_{t-1} (przyjmujemy, że $s_t=\alpha$), a więc możemy określić funkcję:

$$f(s_{t-1})=r_1s_1+r_2s_2+ ... +r_ts_t,$$

gdzie $s_1, s_2, ..., s_{t-2}$ są wyrażone za pomocą s_{t-1}, a $s_t=\alpha$. Prawdziwe są następujące fakty:

(F1) $f(\alpha)=n\alpha<S$,

(F2) $f(S)=r_1s_1+ ... +r_{t-1}S+r_t\alpha>S$,

(F3) $f(s_{t-1})$ jest liniową funkcją argumentu s_{t-1},

(F4) $f(s_{t-1})$ jest rosnącą funkcją argumentu s_{t-1}.

Fakt (F1) wynika stąd, że jeśli $s_{t-1}=\alpha$, to na podstawie (d) również $s_{t-2}=\alpha$, $s_{t-3}=\alpha$ itd.; (F2) wynika stąd, że $r_1s_1+ ... +r_{t-2}s_{t-2}>0$ oraz $r_{t-1}\geqslant 1$. Liniowość funkcji f wynika stąd, że na podstawie (8), s_{t-2} jest liniową funkcją s_{t-1}, a indukcja pokazuje, że również każde s_i jest liniową funkcją s_{t-1}. (F4) wynika indukcyjnie z (d) i (8). Jeśli bowiem zwiększymy s_{t-1}, to zwiększy się zarówno s_{t-2}, jak i różnica $s_{t-2}-s_{t-1}$ (na podstawie (d)). Podobnie jest w przypadku s_{i+1} oraz różnicy s_i-s_{i+1} (na podstawie (8)).

Z (F1)-(F4) wynika, że istnieje dokładnie jedna liczba $s_{t-1}>\alpha$ taka, że $f(s_{t-1})=S$, a więc istnieje dokładnie jeden ciąg $(s_1, s_2, ..., s_{t-1}, s_t=\alpha)$ spełniający warunki (a)-(d) (liczby s_i otrzymujemy rekurencyjnie za pomocą wzorów (8), nierówności (a) wynikają ze wzorów (d) przez indukcję), co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 4. Podamy teraz przykład wyznaczania uogólnionych rang Bordy $B(G, K)$ w sensie definicji 1 i 2. Załóżmy, że tak jak w przykładzie 3 głosujący G ma w zbiorze $\{A, B, C, D, E\}$ preferencje G: A-BC-DE. Klasy równoważności dla relacji $\geqslant$ są następujące: $U_1=\{A, B\}$, $U_2=\{C, D\}$, $U_3=\{E\}$. Stąd $r_1=2$, $r_2=2$, $r_3=1$. Załóżmy, że odległości między klasami są jednakowe ($k_i=1$) oraz $S=10$, $\alpha=0$. Wówczas rangi Bordy s_1, s_2, s_3 spełniają warunki

$$s_1 - s_2 = s_2 - s_3,$$
$$2s_1 + 2s_2 + s_3 = 10,$$
$$s_3 = 0.$$

Jako rozwiązanie otrzymujemy $s_1 = 10/3$, $s_2 = 5/3$. Stąd $B(G, A) = B(G, B) = 10/3$, $B(G, C) = B(G, D) = 5/3$, $B(G, E) = 0$.

Gdyby przy poprzednich preferencjach głosujący uważał, że na przykład przewaga kandydatów A i B nad kandydatami C i D jest dwa razy większa niż przewaga C i D nad kandydatem E, oraz że kandydat E powinien otrzymać przynajmniej jeden głos, wtedy rangi Bordy powinny spełniać warunki (mamy tutaj $S = 10$, $\alpha = 1$, $k_1 = 2$):

$$s_1 - s_2 = 2(s_2 - s_3),$$
$$2s_1 + 2s_2 + s_3 = 10,$$
$$s_3 = 1.$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby $s_1 = 23/8$, $s_2 = 13/8$, $s_3 = 1$. Stąd $B(G, A) = B(G, B) = 23/8$, $B(G, C) = B(G, D) = 13/8$, $B(G, E) = 1$.

Podsumowanie

W artykule pokazaliśmy, że dwa proste sposoby uogólnienia metody Bordy (metoda uśredniania i metoda Marchanta [2], [3]) nie gwarantują spełnienia warunku „stałych różnic", tzn. warunku, zgodnie z którym różnice rang Bordy dla par sąsiednich kandydatów są jednakowe. Pokazaliśmy też, że istnieje dokładnie jeden sposób uogólnienia klasycznej metody Bordy, który gwarantuje spełnienie warunku „stałych różnic" (przy założeniu, że ustalone są rangi dla najgorszych kandydatów w uporządkowaniach preferencyjnych głosujących). Twierdzenie udowodnione w punkcie 4 pokazuje, że istnieje również dokładnie jeden sposób uogólnienia, który uwzględnia proporcje między różnicami rang dla par sąsiednich kandydatów.

Proponowana metoda może być stosowana do wyznaczania grupowego uporządkowania wariantów decyzyjnych (kandydatów), wymaga jednak od głosujących określania współczynników proporcji k_i oraz współczynników $\alpha(G)$ (liczba $\alpha(G)$ może być interpretowana jako wskaźnik „skupienia" kandydatów na osi preferencji głosującego G). Trudno byłoby więc wyobrazić sobie jej stosowanie na przykład w powszechnych wyborach parlamen-

tarnych. Mogłaby być jednak zastosowana w niewielkich grupach dobrze przygotowanych ekspertów, którzy oceniają kandydatów na stanowiska kierownicze, projekty badawcze, projekty inwestycyjne itp.

Literatura

[1] Emerson P. J., *Beyond the Tyranny of the Majority*, The De Borda Institute, Belfast 1998.
[2] Marchant T., *Valued Relations Aggregation with the Borda Method*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 1996, no. 5.
[3] Marchant T., *Does the Borda Rule Provide More Than a Ranking*, Social Choice and Welfare 2000, no. 17.
[4] Nurmi H., *Voting procedures: A Summary Analysis*, British Journal of Political Science 1983, no. 13, tłum. w: *Elementy teorii wyboru społecznego*, red. G. Lissowski, Wyd. Naukowe SCHOLAR, Warszawa 2001.

ON SOME GENERALIZATIONS OF THE BORDA METHOD

Summary

The Borda method is one of the most famous voting technique. According to this technique, we assign points (scores) to candidates in such a way that $n-1$ scores is assigned to the best candidate, $n-2$ is assigned to the second candidate and so on (0 scores is assigned to the last candidate, n is the number of candidates). In our paper we compare two generalizations of the Borda method in the case when indifferences between candidates are allowed. We show that with the two methods we may obtained different ''distances'' between ''neighbouring'' candidates, even if voters' preferences do not include such differentiation. At the end of paper we propose a method, which generalizes the Borda method and which uses the information about ''distances'' between candidates included in the voters' preferences.

BIBLIOTEKA AE W POZNANIU