Krzysztof PIASECKI
Katedra Badań Operacyjnych
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

AKSJOMATYKA ARYTMETYKI FINANSOWEJ

Problem badawczy

Pieniądz odpowiednio traktowany zwiększa swą wartość wraz z upływem czasu. Jest to przyrost wartości realnej, będącej naturalną konsekwencją ogólnego kierunku rozwoju społeczności ludzkiej, polegającej na zwiększeniu wartości tworzonych towarów i usług. Pieniądz, jako ekwiwalent tych produktów bezpośrednio na nie wymienialny, zwiększa zatem w czasie swą wartość. Jest to wyidealizowany ze względu na zastosowaną tutaj zasadę *ceteris paribus* model przyrostu wartości pieniądza. Ostatnio w polskiej literaturze problem pracy ludzkiej jako czynnika kształtującego przyrost wartości jednostki pieniężnej podnosi Dobija [3], cytując przy okazji cały szereg prac równie prominentnych autorów, wyrażających ten sam pogląd.

Przyrost ten jest dokładnie modelowany za pomocą całego systemu równań, nazywanego kiedyś matematyką finansową [4], a obecnie arytmetyką finansową [12] lub teorią procentu [10]. Przy analizie tych modeli w [4] lub w [12] lub w [13] uderzała mnie wysoka złożoność logiczna tych modeli, wyrażająca się dużą liczbą zapisanych tam pozornie niezależnych równań. Uproszczenia logicznego tego systemu można było szukać jedynie na drodze zbudowania matematycznej teorii aksjomatyczno-dedukcyjnej opartej na możliwie małej liczbie aksjomatów. Jako punkt wyjścia do dociekań przyjąłem modele opisane w [11] i [2]. Dla porządku rzeczy warto tutaj zaznaczyć, że z odmiennego punktu widzenia modele te już analizował Calzi [1]. Pierwszą wersję proponowanego przeze mnie układu aksjomatycznego przedstawiłem na „Konferencji Naukowej Praktyczne Problemy Mikroekonometrii – Świnoujście 95". Uważnym analitykom dat wyjaśniam, że znałem już wówczas powielaczową wersję [4]. Stawiałem sobie tutaj dodatkowy cel; zbudować układ aksjomatyczny – nazywany układem *a priori* – na tyle pojemny, aby jego potencjał pozwolił

nadać wspólną bazę formalną: procedurom oceny i porównania projektów inwestycyjnych [8], deterministycznym modelom różnicowym [6] i różniczkowym rynku finansowego, zróżnicowanym strukturom stóp procentowych [7] i dalej stochastycznym równaniom procesów finansowych [14] i podstawowym metodom modeli analizy portfelowej [5]. Taka wędrówka z aksjomatami z 1995 roku została odbyta i wymusiła konieczność modyfikacji wspomnianego początkowego układu *a priori* aksjomatów. W ten sposób powstał układ *a posteriori* aksjomatów arytmetyki finansowej. Przedstawienie teorii złożonej ze zmodyfikowanego układu aksjomatów i dowiedzionych elementarnych twierdzeń będzie głównym celem niniejszego artykułu. Ilustracją przydatności tych wyników są pokazane dalej możliwości ich zastosowania do usystematyzowania znanych już z praktyki procedur dynamicznej oceny wartości pieniądza. Zdecydowano się już tutaj na posługiwanie się terminologią stosowaną w zaawansowanych działach matematyki finansowej. Finalną postać wielu twierdzeń zredagowano w ten sposób, aby ich tezy pokazywały równania różnicowe, stosowane później w metodach matematycznych inżynierii finansowej.

1. Aksjomatyczny model akumulacji kapitału

Na wstępie zajmiemy się budową modelu, opisującego proces przyrostu (akumulacji) wartości pieniądza w czasie. Rozważania rozpoczniemy od jednoznacznego wyróżnienia przedziału czasowego $[0, T]$ naszej analizy kapitałowej. Przedmiotem naszych dociekań będzie instrument finansowy o wartości C w momencie $t=0$. Wartość C nazywać będziemy wartością bieżącą lub równoważnie wartością początkową. Przyjmujemy umowę, że nieujemne wartości finansowe odpowiadać będą przychodom, należnościom lub pozostałym aktywom, podczas gdy ujemne wartości finansowe opisywać będą wydatki, zobowiązania lub inne pasywa. Wartości bieżącej (wartości początkowej) i dowolnemu momentowi czasowemu $t \in [0, T]$ przypisujemy wartość przyszłą (wartość końcową) $FV(C, t)$. Podstawowe własności wartości przyszłej opisuje poniższa definicja.

Definicja 1. *Wartością przyszłą* nazywamy funkcję $FV: R \times [0, T] \to R$ spełniającą – dla dowolnych wartości początkowych $C_1, C_2 \in R$ i momentów czasowych $t_1, t_2 \in [0, T]$ – warunki:

$$FV(C_1 + C_2, t_1) = FV(C_1, t_1) + FV(C_2, t_1), \tag{1}$$

$$(t_2 > t_1 \wedge C_1 > 0) \Rightarrow FV(C_1, t_2) \geqslant FV(C_1, t_1), \tag{2}$$

$$FV(C_1, 0) = C_1. \tag{3}$$

Warunek (1) zakłada, że dowolnie wyznaczana wartość przyszła jest funkcją addytywną wartości bieżącej. Warunek (2) informuje, że wraz z upływem czasu wartość przyszła aktywów nie może zmaleć. Warunek (3) identyfikuje wartość przyszłą przypisaną chwili bieżącej z wartością bieżącą.

Twierdzenie 1. *Warunki* (1)-(3) *są warunkami dostatecznymi i koniecznymi na to, aby wartość przyszła FV spełniała tożsamość*

$$FV(C,t)=C\cdot\varphi(t), \tag{4}$$

gdzie czynnik akumulacji kapitału $\varphi:[0,T]\to[1,+\infty)$ *jest niemalejącą funkcją spełniającą warunek*

$$\varphi(0)=1. \tag{5}$$

Dowód. Z (2) i (3) dla dowolnej pary $(C,t)\in R^{+}\times[0,T]$ otrzymujemy

$$FV(C,t)\geqslant FV(C,0)=C>0.$$

Stąd jeśli $C_1>C_2$, to z (1) dla dowolnego ustalonego $t\in[0,T]$ mamy

$$FV(C_1,t)=FV(C_1-C_2,t)+FV(C_2,t)>FV(C_2,t).$$

Ostatnia nierówność wraz z (1) dowodzą, że funkcja $FV(\cdot,t):R\to R$ spełnia założenia lematu D, podanego na końcu artykułu. Zgodnie z tym dla dowolnej pary $(C,t)\in R\times[0,T]$ mamy

$$FV(C,t)=C\cdot FV(1,t)=C\cdot\varphi(t),$$

co kończy dowód tożsamości (4). Wymienione w dowodzonym twierdzeniu własności czynnika akumulacji kapitału φ wynikają bezpośrednio z (2) i (3). Dowód implikacji odwrotnej jest oczywisty. ■

Kolejnym przedmiotem naszych dociekań będzie instrument finansowy o wartości C, przypisanej mu w przyszłym momencie $t>0$. Odpowiedzią na pytanie, jaka jest wartość bieżącą (wartość początkowa) tego instrumentu finansowego, będzie przypisanie wartości przyszłej (wartości końcowej) C i dowolnemu momentowi czasowemu $t\in[0,T]$ wartości początkowej $PV(C,t)$. Dla dowolnego, ustalonego przyszłego momentu $t>0$ wartość początkową wartości C przypisanej temu momentowi definiujemy jako taką wartość, której wartość przyszła jest równa wartości ocenianej wartości C [1]. Ta definicja w równoważny sposób może być zapisana za pomocą tożsamości

$$FV(PV(C,t),t)=C. \tag{6}$$

Twierdzenie 2. *Tożsamość* (6) *jest równoważna tożsamości*

$$PV(FV(C,t),t)=C. \tag{7}$$

Dowód. W tożsamości (6) podstawiamy $C=FV(C_1,t)$ i mamy wtedy $FV\big(PV(FV(C_1,t),t)\,t\big)=FV(C_1,t)$, co razem z (4) i (5) daje $PV(FV(C_1,t),t)\cdot\varphi(t)=C_1\cdot\varphi(t)$. Czynnik akumulacji kapitału jest dodatni, co kończy dowód równoważności tożsamości (6) i (7). ■

Twierdzenie 3. *Warunki* (1), (2), (3) *i* (6) *są warunkami dostatecznymi i koniecznymi na to, aby wartość początkowa PV spełniała tożsamość*

$$PV(C,t)=C\cdot[\varphi(t)]^{-1}=C\cdot v(t), \tag{8}$$

gdzie czynnik dyskontujący $v:[0,T]\to[0,1]$ *jest nierosnącą funkcją spełniającą warunek*

$$v(0)=1. \tag{9}$$

Dowód. Tożsamość (8) otrzymujemy bezpośrednio z (4) i (6). Właściwości czynnika dyskontującego są bezpośrednią konsekwencją własności czynnika akumulacji kapitału. ■

Twierdzenie 4. *Warunki* (1), (2), (3) *i* (6) *są warunkami dostatecznymi i koniecznymi na to, aby dla dowolnych wartości* C_1, $C_2\in R$ *oraz* t_1, $t_2\in[0,T]$ *spełnione były warunki*:

$$PV(C_1+C_2,t_1)=PV(C_1,t_1)+PV(C_2,t_1), \tag{10}$$

$$(t_2>t_1\wedge C_1>0)\Rightarrow PV(C_1,t_2)\leqslant PV(C_1,t_1), \tag{11}$$

$$PV(C_1,0)=C_1. \tag{12}$$

Dowód. Warunki (10), (11) i (12) wynikają z twierdzenia 3. Dowodząc konieczności koniunkcji warunków (1), (2), (3) i (6) zakładam, że spełnione są warunki (10), (11) i (12). Dalej, stosując rozumowanie analogiczne do wnioskowania przedstawionego w dowodzie twierdzenia 1 dowodzę tożsamości (8), co razem z twierdzeniem 1.3 kończy dowód. ■

Definicja 2. Jeżeli para (*FV*, *PV*) wartości przyszłej i bieżącej spełnia warunek (6), to nazywamy je *wartościami sprzężonymi.*

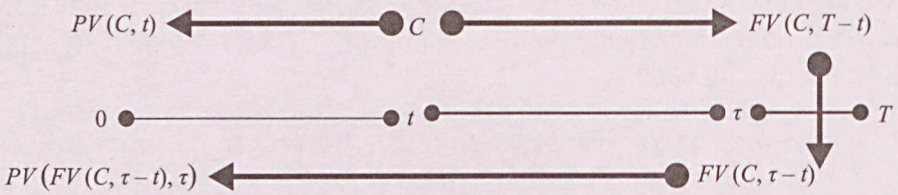
Każdy model wartościowania kapitału składa się ze sprzężonego układu przeciwstawnych procesów akumulacji wartości bieżącej i dyskontowania

wartości przyszłej. Przedstawione tutaj wyniki pozwalają na wysnucie następujących wniosków o dowolnym modelu wartościowania kapitału:

- wartości przyszłe można określić jedynie za pomocą tożsamości (4),
- wartości bieżące można określić jedynie za pomocą tożsamości (8),
- dla jednoznacznego zdefiniowania modelu wartości wystarczy jednoznacznie określić merytoryczne uzasadnioną wartość przyszłą lub merytorycznie uzasadnioną wartość bieżącą.

Ponadto tożsamości (4) i (8) pozwalają badanie własności wartości przyszłej i wartości bieżącej zastąpić równoważnym badaniem własności czynnika akumulacji kapitału i czynnika dyskontującego. Pozwoli to na ominięcie w dalszych rozważaniach kłopotliwego problemu znaku wartości instrumentu finansowego.

Kolejnym problemem, przed jakim stajemy, jest porównanie pewnych dwóch metod dyskontowania. Pierwsza z nich polega na bezpośrednim wyznaczeniu wartości bieżącej dyskontowanej wartości instrumentu finansowego. Druga metoda wymaga wyznaczenia dla dyskontowanej wartości jej wartości przyszłej, przypisanej pewnemu przyszłemu momentowi, a następnie przypisanie uzyskanej wartości przyszłej jej wartości bieżącej. Obie metody ujęto w sposób schematyczny na rysunku.



Schemat opisujący dwie metody dyskontowania

Naturalne wydaje się oczekiwanie, że dla dowolnego momentu z przedziału analizy kapitałowej obie metody dyskontowania dadzą ten sam wynik. Zmierzając do zweryfikowania tych oczekiwań, wyróżniamy następującą klasę par wartości bieżących i wartości przyszłych.

Definicja 3. Jeżeli dla każdej trójki $(C, t, \tau) \in R \times [0, T]^2$ takiej, że $t \leqslant \tau$, para (FV, PV) funkcji wartości przyszłej i bieżącej spełnia warunek

$$PV(C,t) = PV(FV(C, \tau - t), \tau), \tag{13}$$

to nazywamy *je zgodnymi.*

Twierdzenie 5. *Każda para wartości zgodnych jest parą wartości sprzężonych.*

Dowód. W (13) podstawiamy $t=0$ i w ten sposób dzięki (12) otrzymujemy (7), co razem z twierdzeniem 2 kończy dowód. ■

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, gdyż mamy

Kontrprzykład. Dla dowolnej wartości stopy nominalnej $p \in R^+$ funkcję wartości przyszłej określamy za pomocą tożsamości

$$FV(C,t)=C\cdot(1+t\cdot p).$$

Zauważmy na marginesie naszych rozważań, że jest to dobrze znana z praktyki metoda oprocentowania prostego. Sprzężona funkcja wartości bieżącej jest wtedy dana tożsamością

$$PV(C,t)=\frac{C}{1+p\cdot t}.$$

Podstawiając $C=100$, $t=0{,}5$, $\tau=1$, $p=0{,}2=20\%$, otrzymujemy

$$90{,}90=PV(100,\ 0{,}5)\neq PV(FV(100,\ 0{,}5),\ 1)=91{,}70.$$

Twierdzenie 6. *Wartość przyszła określona za pomocą tożsamości* (4) *i sprzężona z nią wartość bieżąca są zgodne wtedy i tylko wtedy, gdy czynnik akumulacji kapitału* $\varphi:[0,T]\to[1,+\infty)$ *dany jest tożsamością*

$$\varphi(t)=[\varphi(1)]^t. \tag{14}$$

Dowód. Załóżmy, że para sprzężonych wartości przyszłej i bieżącej jest zgodna. Zgodnie z (4), (8) i (13) dla każdej pary $(t,\tau)\in[0,T]^2$ takiej, że $t\leqslant\tau$ czynnik akumulacji kapitału $\varphi:[0,T]\to[1,+\infty)$ spełnia warunek

$$\varphi(t)\cdot\varphi(\tau-t)=\varphi(\tau). \tag{*}$$

Załóżmy teraz, że przy powyższych założeniach czynnik φ nie jest funkcją rosnącą. Istnieje wtedy przynajmniej jedna para $(t_1,t_2)\in[0,T]^2$ taka, że $t_1<t_2$ i $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Z (*) mamy wtedy

$$\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2-t_1)=\varphi(t_1), \tag{**}$$

co razem z tym, że czynnik redyskontujący zawsze jest niemalejącą funkcją czasu, dowodzi istnienia takiej wartości $\alpha>0$, że dla każdego $\beta\in(0,\alpha)$ mamy

$$\varphi(\beta)=1. \tag{***}$$

Dowolny moment czasowy $t \in [0, T]$ możemy przedstawić jako skończoną sumę liczb $\beta \in (0, \alpha)$, spełniających własność (***). Korzystając z (5) i (*) za pomocą indukcji matematycznej możemy wykazać, że

$$\varphi(t) = 1 = [\varphi(1)]^t. \qquad (****)$$

W sytuacji gdy czynnik redyskontujący φ jest funkcją rosnącą, logarytmujemy obustronnie (*) i ten sposób wykazujemy, że funkcja $\ln(\varphi(\cdot))$ spełnia założenia lematu D. Dowiedliśmy w ten sposób, że dla dowolnego $t \in [0, T]$ mamy

$$\ln(\varphi(t)) = t \cdot \ln(\varphi(1)),$$

co jest równoważne tożsamości (14). Podsumowując, konieczność warunku (14) została wykazana. Dowód dostateczności warunku (14) jest trywialny. ■

Pokazano powyżej, że własność zgodności wartości przyszłej i bieżącej wyróżnia pewną podklasę sprzężonych wartości przyszłej i bieżącej. Wyniki przedstawione w kontrprzykładzie i twierdzeniu 6 wyraźnie wskazują, że własność zgodności nie jest własnością powszechną. Z drugiej strony intuicja podpowiada, że zgodność stosowanych funkcji wartościowania kapitału może wychodzić naprzeciw oczekiwaniom analityków finansowych. Z tego powodu dalsze uszczegółowianie postaci funkcji wartości przyszłej i sprzężonej wartości bieżącej obarczone będzie postulatem wyznaczania wartości zgodnych. Pomocne przy tych poszukiwaniach będzie twierdzenie 6.

2. Oprocentowanie proste

W punkcie tym zajmiemy się wyznaczaniem odsetków rozumianych jako koszt użytkowania kapitału. Przyjmiemy tutaj dwie umowy, odnoszące się kolejno do sposobu pomiaru czasu i sposobu pomiaru ceny kapitału. Po pierwsze przyjmiemy, że pojedynczy okres obrachunkowy (rok) ma długość 1. Pozwoli to na ominięcie wszystkich kontrowersji, związanych ze zróżnicowanym podejściem do liczby dni w roku reprezentowanym poprzez różne ustawy. Cenę kapitału będziemy określać poprzez ten ułamek jego wartości, który jest równy kosztowi użytkowania przez jeden okres obrachunkowy (rok). Ułamek ten nazywamy stopą nominalną i wyrażamy jako ułamek dziesiętny. Dodatkową zaletą przyjęcia takiego układu jednostek pomiaru czasu i ceny kapitału jest względna prostota wyprowadzanych później formuł arytmetyki finansowej.

2.1. Oprocentowanie stałe

Przyjmujemy tutaj założenie, że w przedziale analizy kapitałowej $[0, T]$ cena kapitału jest stała i jest równa stopie nominalnej $p \in R^+$. Wartości bieżącej (wartości początkowej) kapitału C i dowolnemu czasowi użytkowania kapitału $t \in [0, T]$ przypisujemy wtedy odsetki $P(C, t|p)$ określone przez poniższą definicję.

Definicja 4. *Odsetkami* nazywamy funkcję $P(\cdot, \cdot|p) : R \times [0, T] \to R$ spełniającą – dla dowolnych wartości początkowych C_1, $C_2 \in R$ i dowolnych czasów użytkowania $t_1, t_2 \in [0, T]$ – warunki:

$$P(C_1 + C_2, t_1|p) = P(C_1, t_1|p) + P(C_2, t_1|p), \tag{15}$$

$$P(C_1, t_1 + t_2|p) = P(C_1, t_1|p) + P(C_1, t_2|p), \tag{16}$$

$$C_1 > 0 \wedge t_1 > 0 \Rightarrow P(C_1, t_1|0) > 0, \tag{17}$$

$$P(1, 1|p) = p. \tag{18}$$

Warunki (15) i (16) przedstawiają odsetki jako dwuaddytywną funkcję wartości początkowej kapitału i czasu użytkowania kapitału. Warunek (17) poucza nas, że nie jest możliwe bezkosztowe użytkowanie kapitału. Warunek (18) jest sformalizowaną definicją stopy nominalnej.

Twierdzenie 7. *Warunki* (15)-(18) *są warunkami dostatecznymi i koniecznymi na to, aby odsetki* $P(\cdot, \cdot|p)$ *spełniały tożsamość*

$$P(C, t|p) = C \cdot t \cdot p. \tag{19}$$

Dowód. Korzystając z (15) i (17), w identyczny sposób jak w dowodzie twierdzenia 1 dowodzimy, że odsetki są addytywną i ściśle rosnącą funkcją wartości początkowej kapitału. Dzięki temu i lematowi D możemy zapisać tożsamość

$$P(C, t|p) = C \cdot P(1, t|p). \tag{*}$$

Korzystając teraz z (16) i (17), możemy w identyczny – jak powyżej – sposób dowieść kolejną tożsamość

$$P(1, t|p) = t \cdot P(1, 1|p). \tag{**}$$

Zestawiając razem (*), (**) i (18), otrzymujemy tożsamość (19). Podsumowując, konieczność warunku (19) została wykazana. Dowód dostateczności warunku (19) jest trywialny. ■

Tożsamość (19) jest powszechnie znana już od dawna. Głównym celem rozumowania przeprowadzonego w tym punkcie jest próba zidentyfikowania przesłanek formalnych definicji odsetek (warunki definicji 4). Zaakceptowanie tej definicji prowadzi do stwierdzenia, że tożsamość (19) opisuje jedyny sposób obliczenia odsetków.

2.2. Oprocentowanie zmienne

Przedział analizy kapitałowej $]0,T]$ dzielimy na niepuste podprzedziały $]\tau_{i-1},\tau_i]$ $(i=1,2,...,n)$ takie, że w każdym przedziale $]\tau_{i-1},\tau_i]$ cena kapitału jest stała i jest równa stopie forward $\tilde{p}_i \in R^+$. Tę zmienność ceny kapitału w formalny sposób opisuje poniższa definicja.

Definicja 5. *Strukturą terminową jednookresowej stopy forward* nazywamy funkcję $\Psi :]0,T] \to R^+$ opisaną za pomocą tożsamości

$$\forall i=1,2,...,n \quad \Psi(t)=\tilde{p}_i \Leftrightarrow t \in]\tau_{i-1},\tau_i]. \tag{20}$$

Wartości bieżącej (wartości początkowej) kapitału C i dowolnemu czasowi użytkowania kapitału $t \in [0,T]$ przypisujemy wtedy – przy zmiennej stopie forward – odsetki $\tilde{P}(C,t|\Psi)$. O odsetkach tych zakładamy, że w poprawny sposób określone są przez poniższą definicję.

Definicja 6. *Odsetkami* przy zmiennej stopie forward nazywamy funkcję $\tilde{P}(\cdot,\cdot|\Psi) : R \times [0,T] \to R$ spełniającą – dla dowolnej wartości początkowej $C \in R$ – warunki:

$$\tilde{P}(C,0|\Psi)=0, \tag{21}$$

$$\forall_{i=1,2,...,n} \quad \forall_{\substack{t_1,t_2 \in [\tau_{i-1},\tau_i] \\ t_2 \geq t_1}} \quad \tilde{P}(C,t_2|\Psi)-\tilde{P}(C,t_1|\Psi)=P(C,t_2-t_1|\tilde{p}_i). \tag{22}$$

Łatwo wykazać, że odsetki przy zmiennej stopie forward są rosnącą funkcją czasu, spełniającą dla każdego $t \in [\tau_{i-1},\tau_i]$ $(i=1,2,...,n)$ tożsamość

$$\tilde{P}(C,t|\Psi)=C \cdot \int_0^t \Psi(u)\,du = C \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{p}_j \cdot (\tau_j-\tau_{j-1}) + \tilde{p}_i \cdot (t-\tau_{i-1}) \right]. \tag{23}$$

Jeśli struktura terminowa jednookresowej stopy forward jest stała, to pojęcie odsetków przy zmiennej stopie redukuje się do pojęcia odsetków określonego w definicji 4 dla stałej stopy. W analizie kapitałowej równolegle z pojęciem

struktury terminowej jednookresowej stopy forward posługujemy się pojęciem struktury terminowej jednookresowej stopy spot.

Definicja 7. *Strukturą terminową jednookresowej stopy spot* nazywamy funkcję $p:]0, T] \to R^+$ opisaną za pomocą tożsamości

$$P(1, t|p(t)) = P(1, t|\Psi(t)). \tag{24}$$

Z tożsamości (19) i (23) uzyskujemy zależność opisującą dla każdego $t \in]\tau_{i-1}, \tau_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ strukturę stopy spot

$$p(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Psi(u)du = \frac{1}{t}\left[\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{p}_j \cdot (\tau_j - \tau_{j-1}) + \tilde{p}_i \cdot (t - \tau_{i-1})\right]. \tag{25}$$

Zmienność struktury terminowej jednookresowej stopy spot opisuje zmienność wartości stopy nominalnej, uzależnionej od horyzontu czasowego analizy kapitałowej.

2.3. Wartość należna

Załóżmy, że dana jest struktura terminowa jednookresowej stopy forward Ψ. Oprocentowanie proste stosujemy wtedy, gdy nie korzystamy z kapitalizacji odsetków. Jednym ze sposobów oceny zmian wartości kapitału w czasie $t \in [0, T]$ jest wtedy określenie jego wartości należnej $FV^+(C, t|\Psi)$, rozumianej jako sumy wartości początkowej kapitału C i należnych odsetków.

Definicja 8. *Wartością należną* nazywamy funkcję $FV^+(\cdot, \cdot|\Psi): R \times [0, T] \to R$, spełniającą tożsamość

$$FV^+(C, t|\Psi) = C + \tilde{P}(C, t|\Psi). \tag{26}$$

Korzystając z opisanych powyżej własności odsetek łatwo można dowieść, że:

Twierdzenia 8. *Wartość należna $FV^+(\cdot, \cdot|\Psi): R \times [0, T] \to R$ jest wartością przyszłą, wyznaczoną za pomocą czynnika akumulacji kapitału $\varphi^+(\cdot|\Psi): [0, T] \to [1, +\infty]$ określonego dla każdego $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ za pomocą zależności*

$$\varphi^+(t|\Psi) = 1 + \int_0^t \Psi(u)du = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{p}_j \cdot (\tau_j - \tau_{j-1}) + \tilde{p}_i \cdot (t - \tau_{i-1}). \tag{27}$$

Pojęcie wartości należnej stosujemy w jednookresowych modelach analizy kapitałowej.

3. Oprocentowanie złożone

Kapitalizacja odsetków polega na powiększeniu wartości kapitału o odsetki należne z tytułu użytkowania tego kapitału. W punkcie tym zajmiemy się analizą kapitałową w sytuacji, gdy w przedziale czasowym $[0, T]$ tej analizy wyróżniamy jedynie ciąg $\{T_i\}_{i=0}^{n}$ momentów czasowych, w których są kapitalizowane odsetki. Bez utraty ogólności rozważań możemy założyć, że ciąg ten spełnia warunek

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n = T. \tag{28}$$

Do jednoznacznego określenia wartości odsetków należnych za użytkowanie kapitału w przedziale $[T_{i-1}, T_i]$ wystarczy znajomość wartości p_i stopy procentowej spot – wyznaczonej dla tego przedziału – oraz długości ΔT_{i-1} tego przedziału wyznaczonej za pomocą różnicy

$$\Delta T_{i-1} = T_i - T_{i-1}. \tag{29}$$

W przypadku uwzględniania kapitalizacji odsetek jednookresowe stopy spot zaczynają odgrywać rolę wielookresowej struktury terminowej stopy forward, nazywanej w skrócie strukturą terminową stopy forward.

Definicja 9. *Strukturą terminową* stopy forward nazywamy funkcję $\Phi :]0, T] \to R^+$, opisaną za pomocą tożsamości

$$\forall\, i = 1, 2, \ldots, n \quad \Phi(t) = p_i \Leftrightarrow t \in]T_{i-1}, T_i]. \tag{30}$$

Każdą strukturę terminową stopy forward możemy w równoważny sposób opisać za pomocą ciągu par $\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}$ czasów oczekiwań Δ_i na kapitalizację wyznaczonych za pomocą zależności (29) i wielookresowych stóp forward p_i. Stąd stosownie do potrzeb, równoważne symbole Φ i $\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}$ stosować będziemy zamiennie. Czas oczekiwań na kapitalizację nazywamy też w skrócie okresem kapitalizacji. Niech będzie dana struktura terminowa stopy forward Φ. Oprocentowaniu podlega jedynie kapitał. Wartością kapitalizowaną $\bar{FV}(C, t|\Phi)$ kapitału o wartości początkowej C, lokowanego na przeciąg czasu $t \in [0, T]$, nazywamy wartość początkową tego kapitału, powiększoną o wartość kapitalizowanych kolejno odsetek.

Definicja 10. *Wartością kapitalizowaną* nazywamy funkcję $\bar{FV}(\cdot, \cdot|\Phi) : R \times [0, T] \to R$, spełniającą dla dowolnych wartości $C \in R$ i $i = 1, 2, \ldots, n$, warunki:

$$\forall t \in]T_{i-1}, T_i[\ \exists C_i \in R\ \ \bar{F}\bar{V}(C, t|\Phi) = C_i, \tag{31}$$

$$\bar{F}\bar{V}(C, T_i|\Phi) - \bar{F}\bar{V}(C, T_{i-1}|\Phi) = P(C_i, \Delta T_{i-1}|\Phi), \tag{32}$$

$$\bar{F}\bar{V}(C, 0|\Phi) = C. \tag{33}$$

Odsetki należne za użytkowanie kapitału w przedziale $[T_{i-1}, T_i]$ możemy skapitalizować jedynie na początku tego przedziału (kapitalizacja z góry) lub na końcu tego przedziału (kapitalizacja z dołu).

Definicja 11. *Wartością kapitalizowaną z góry* nazywamy każdą wartość kapitalizowaną $FV^*(\cdot, \cdot|\Phi) : R \times [0, T] \to R$, spełniającą dodatkowo dla dowolnych wartości $C \in R$ i $i = 1, 2, ..., n$ warunek:

$$\forall t \in]T_{i-1}, T_i[\ \ FV^*(C, t|\Phi) = FV^*(C, T_i|\Phi). \tag{34}$$

Definicja 12. *Wartością kapitalizowaną z dołu* nazywamy każdą wartość kapitalizowaną $FV_*(\cdot, \cdot|\Phi) : R \times [0, T] \to R$ spełniającą dodatkowo dla dowolnych wartości $C \in R$ i $i = 1, 2, ..., n$ warunek:

$$\forall t \in]T_{i-1}, T_i[\ \ FV_*(C, t|\Phi) = FV_*(C, T_{i-1}|\Phi). \tag{35}$$

Szczegółową analizę każdej z wartości kapitalizowanych przeprowadzimy dla różnych przypadków struktury terminowej stopy forward.

3.1. Struktura terminowa stopy forward w pełni nieregularna

Zakładamy, że ciąg par $\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^n$ jest zbudowany ze zróżnicowanych co do długości ΔT_{i-1} *okresów kapitalizacji i z różnych wartości* p_i wielookresowej stopy forward. Możemy wykazać, że:

Twierdzenie 9. *Jeśli struktura terminowa stopy forward dla każdej liczby naturalnej* $i < n$ *spełnia warunek*

$$p_i \cdot \Delta T_{i-1} < 1, \tag{36}$$

to wartość kapitalizowana z góry $FV^*(\cdot, \cdot|\Phi)\, R \times [0, T] \to R$ *jest wartością przyszłą wyznaczoną za pomocą czynnika akumulacji kapitału* $\varphi^*(\cdot|\Phi) : [0, T] \to [1, +\infty]$ *określonego dla każdego* $i = 1, 2, ..., n$ *przez zależności*

$$\frac{\varphi^*(T_i|\Phi)-\varphi^*(T_{i-1}|\Phi)}{\varphi^*(T_i|\Phi)}=p_i\cdot\Delta T_{i-1}, \tag{37}$$

$$\forall t\in]T_{i-1},T_i]\quad \varphi^*(t|\Phi)=\varphi^*(T_i|\Phi). \tag{38}$$

Dowód. Z warunków (31), (32) i (19) otrzymujemy (1). Korzystając z (31), (32) i (34) wnioskujemy, że zachodzi (2). Warunek (3) wynika bezpośrednio z (33). Wartość kapitalizowana z góry jest zatem wartością przyszłą. Dla każdego $t\in]T_{i-1},T_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ za pomocą zależności (4), (19), (31), (33) i (34) otrzymujemy

$$\varphi^*(T_i|\Phi)=\varphi^*(T_{i-1}|\Phi)+\varphi^*(T_i|\Phi)\cdot p_i\cdot\Delta T_{i-1},$$

co dowodzi (37). Zależność (38) wynika bezpośrednio z (34). ■

Twierdzenie 10. *Wartość kapitalizowana z dołu* $FV_*(\cdot,\cdot|\Phi)\,R\times[0,T]\to R$ *jest wartością przyszłą, wyznaczoną za pomocą czynnika akumulacji kapitału* $\varphi_*(\cdot,\cdot|\Phi):[0,T]\to[1,+\infty]$ *określonego dla każdego* $i=1,2,\ldots,n$ *przez zależności*

$$\varphi_*(0|\Phi)=1\wedge\varphi_*(T_i|\Phi)-\varphi_*(T_{i-1}|\Phi)=\varphi_*(T_{i-1}|\Phi)\cdot p_i\cdot\Delta T_{i-1}, \tag{39}$$

$$\forall t\in[T_{i-1},T_i[\quad \varphi_*(t|\Phi)=\varphi_*(T_{i-1}|\Phi). \tag{40}$$

Dowód. Z warunków (31), (32) i (19) otrzymujemy (1). Korzystając z (31), (32) i (35) wnioskujemy, że zachodzi (2). Warunek (3) wynika bezpośrednio z (33). Wartość kapitalizowana z dołu jest zatem wartością przyszłą. Dla każdego $t\in[T_{i-1},T_i[$ $(i=1,2,\ldots,n)$ za pomocą zależności (4), (19), (31), (32) i (35) otrzymujemy (39). Zależność (40) wynika bezpośrednio z (35). ■

Rozwiązaniem równania różnicowego (37) jest ciąg $\{\varphi^*(T_i|\Phi)\}_{i=0}^n$, określony rekurencyjnie

$$\varphi^*(0|\Phi)=1\wedge\varphi^*(T_i|\Phi)=\frac{\varphi^*(T_{i-1}|\Phi)}{1-p_i\cdot\Delta T_{i-1})}, \tag{41}$$

a rozwiązaniem równania różnicowego (39) jest ciąg $\{\varphi_*(T_i|\Phi)\}_{i=0}^n$ określony rekurencyjnie

$$\varphi_*(0|\Phi)\wedge\varphi_*(T_i|\Phi)=\varphi_*(T_{i-1}|\Phi)(1+p_i\cdot\Delta T_{i-1}). \tag{42}$$

Stosując indukcję matematyczną, łatwo można dowieść, że ciągi (41) i (42) dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ spełniają nierówność

$$\varphi_*(T_i|\Phi)<\varphi^*(T_i|\Phi). \tag{43}$$

Fakt ten jest sprzeczny z intuicją, która podpowiada, że tempo wzrostu wartości kapitału zależy od stosunków panujących na rynku finansowym i jego realnym otoczeniu gospodarczym [3], a nie od przyjętej metody kapitalizacji odsetków. Rodzi to potrzebę wyznaczenia dla celów kapitalizacji z góry takiej struktury terminowej stopy forward Φ^{∇}, że zachowane zostanie tempo wzrostu wartości kapitału, wyznaczone przez czynnik akumulacji $\varphi_*(\cdot|\Phi)$ kapitalizacji z dołu.

Definicja 13. *Strukturą terminową stopy forward kapitalizacji z góry* nazywamy funkcję $\Phi^{\nabla}:]0, T] \to R^+$ opisaną za pomocą tożsamości

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \Phi^{\nabla}(t) = p_i^{\nabla} \Leftrightarrow t \in]T_{i-1}, T_i] \tag{44}$$

i dodatkowo spełniającą dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ warunek

$$\varphi^*(T_i|\Phi^{\nabla}) = \varphi_*(T_i|\Phi). \tag{45}$$

TWIERDZENIE **11.** *Dla danej struktury terminowej stopy forward* $\Phi = \{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^n$ *istnieje dokładnie jedna struktura terminowa stopy forward kapitalizacji z góry* $\Phi^{\nabla} = \{(\Delta T_{i-1}, p_i^{\nabla})\}_{i=1}^n$. *Spełnia ona warunek* (36) *i dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, n$ *jest określona za pomocą zależności*

$$p_i^{\nabla} = \frac{p_i}{1 + p_i \cdot \Delta T_{i-1}}. \tag{46}$$

Dowód. Zestawiając razem (41) i (42), otrzymujemy (46), który to warunek jednoznacznie określa strukturę terminową stopy forward kapitalizacji z góry i implikuje spełnianie warunku (36). ■

Zestawiając razem (38), (40), (42) i (43), otrzymujemy na koniec

$$\forall t \in]0, T] \quad \varphi_*(t|\Phi) \leqslant \varphi^*(t|\Phi^{\nabla}) < \varphi^*(t|\Phi). \tag{47}$$

Porównując z twierdzeniem 6 stwierdzamy, że żadna z przedstawionych tutaj funkcji wartości przyszłych nie generuje sprzężonej z nią bieżącej wartości zgodnej.

3.2. Regularna struktura terminowa stopy forward

Rozważmy teraz założenie o stałości okresu kapitalizacji wyrażone warunkiem

$$\exists d \in R^+ \; \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \Delta T_{i-1} = d, \tag{48}$$

oraz założenie o stałej stopie forward wyrażone warunkiem

$$\exists p \in R^+ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \ \ p_i = p. \tag{49}$$

Założenie o strukturze terminowej stopy forward, że spełnia jedynie jeden z powyższych zawężających warunków nie wnosi żadnych istotnych zmian w zależnościach arytmetyki finansowej. Prześledźmy zatem jedynie skutki przyjęcia obu założeń równocześnie. Wtedy struktura terminowa Φ jest reprezentowana równoważnie przez ciąg $\{(d, p)\}_{i=1}^{n}$ i dowolną wartość kapitalizowaną zapisujemy w uproszczonej postaci

$$\bar{F}\bar{V}(\cdot, \cdot | \{(d, p)\}_{i=1}^{n}) = \bar{F}\bar{V}(\cdot, \cdot | d, p). \tag{50}$$

Rozwiązaniem równania różnicowego (37) jest wtedy ciąg $\{\varphi^*(i \cdot d | d, p)\}_{i=0}^{n}$ określony za pomocą zależności

$$\varphi^*(i \cdot d | d, p) = (1 - p \cdot d)^{-i}. \tag{51}$$

Ciąg ten wraz z zależnością

$$\forall t \in](i-1) \cdot d, i \cdot d] \ \ \varphi^*(t | d, p) = \varphi^*(i \cdot d | d, p) \tag{52}$$

zastępującą zależność (38) opisuje czynnik akumulacji $\varphi^*(\cdot | d, p)$ kapitalizacji z góry.

Rozwiązaniem równania różnicowego (39) jest wtedy ciąg $\{\varphi_*(i \cdot d | d, p)\}_{i=0}^{n}$ określony za pomocą zależności

$$\varphi_*(i \cdot d | d, p) = (1 + p \cdot d)^i, \tag{53}$$

Ciąg ten wraz z zależnością

$$\forall t \in [(i-1) \cdot d, i \cdot d[\ \ \varphi_*(t | d, p) = \varphi_*((i-1) \cdot d | d, p) \tag{54}$$

zastępującą zależność (40) opisuje czynnik akumulacji $\varphi_*(\cdot | d, p)$ kapitalizacji z dołu. Ponadto stopa forward p^{∇} kapitalizacji z góry jest dana za pomocą zależności

$$p^{\nabla} = \frac{p}{1 + p \cdot d}. \tag{55}$$

Dodatkowo w przypadku regularnej struktury terminowej stóp forward możemy w prosty sposób opisać metodę kapitalizacji ciągłej, rozumianej jako wyidealizowany model, w którym okres kapitalizacji jest dowolnie krótki.

Używając języka sformalizowanego, zakładamy, że okres kapitalizacji dąży do zera. Liczba momentów kapitalizacji poprzedzających dowolny moment czasowy $t \in]0, T]$ dąży wtedy do nieskończoności.

Twierdzenie 12 (o kapitalizacji ciągłej).

$$\forall t \in [0, T] \lim_{d \to 0} \varphi_*(t|d, p) = \lim_{d \to 0} \varphi^*(t|d, p^{\nabla}) = \lim_{d \to 0} \varphi^*(t|d, p) = e^{p \cdot t}. \tag{56}$$

Dowód. Dowód powyższej tezy dla czynnika akumulacji kapitalizacji z dołu $\varphi_*(\cdot|d, p)$ i dla czynnika akumulacji kapitalizacji z góry $\varphi^*(\cdot|d, p)$ można znaleźć na przykład w [4]. Dla czynnika $\varphi^*(\cdot|d, p^{\nabla})$ zależność (56) wynika wprost z (47) i twierdzenia o trzech ciągach. ■

Twierdzenie 13. *Wartość kapitalizowana ciągle* $FV^{\diamond}(\cdot, \cdot|p) : R \times [0, T] \to R$ *określona za pomocą tożsamości*

$$FV^{\diamond}(C, t|p) = C \cdot \varphi^{\diamond}(t|p) = C \cdot e^{p \cdot t} \tag{57}$$

jest wartością przyszłą kapitału.

Dowód. Wprost z twierdzenia 1 i własności funkcji wykładniczej. ■

Twierdzenie 14. *Dowolna wartość kapitalizowana ciągle i sprzężona z nią wartość bieżąca są jedynymi zgodnymi parami wartości przyszłej i wartości bieżącej.* ■

Dowód. Zgodność wartości kapitalizowanej ciągłej i sprzężonej z nią wartości bieżącej wynika wprost z (57) i twierdzenia 6. Z drugiej strony, zgodnie z (14) czynnik akumulacji $\varphi(\cdot)$ dowolnej wartości przyszłej generującej zgodną z nią wartość bieżącą spełnia tożsamość

$$\varphi(t) = [\varphi(1)]^t = e^{\ln \varphi(1) \cdot t}. \quad ■$$

W ten sposób przyjęcie sztucznego – z punktu widzenia intuicji – założenia o dowolnie krótkim okresie kapitalizacji okazuje się niezbędną ceną, jaką płacimy za możność wyznaczenia zgodnej pary wartości przyszłej i wartości bieżącej. Późniejsze doświadczenia matematyki finansowej wykazują, że ten koszt idealizacji modelu warto ponieść.

Stosując rozwinięcie funkcji wykładniczej w szereg Maclaurina, łatwo dowieść, że dla każdego $t \in]0, T]$ czynniki akumulacji kapitalizacji z dołu i kapitalizacji ciągłej spełniają nierówność

$$\varphi_*(t|d, p) < \varphi^{\diamond}(t|p). \tag{58}$$

Te same przesłanki, co towarzyszące nierówności (43), implikują potrzebę wyznaczenia dla celów kapitalizacji ciągłej takiej stopy procentowej forward $p^{\diamond}(d)$, że zachowane zostanie tempo wzrostu wartości kapitału wyznaczone przez czynnik akumulacji $\varphi_*(\cdot|d,p)$ kapitalizacji z dołu.

Definicja 14. *Stopą forward kapitalizacji ciągłej* nazywamy funkcję $p^{\diamond}:]0,T] \to R^+$ opisaną za pomocą zależności

$$\forall i = 1,2,\ldots,n \quad \varphi^{\diamond}(i\cdot d|p^{\diamond}(d)) = \varphi_*(i\cdot d|d,p). \quad \blacksquare \tag{59}$$

Twierdzenie 15. *Dla dowolnej stałej stopy forward p kapitalizacji z dołu i dowolnego okresu kapitalizacji d stopa forward $p^{\diamond}(d)$ jest dana za pomocą zależności*

$$p^{\diamond}(d) = \frac{\ln(1+p\cdot d)}{d}. \tag{60}$$

Dowód. Wprost z (53), (57) i (59). $\blacksquare$

W zastosowaniach arytmetyki finansowej użyteczne może być stosowanie wynikającej stąd tożsamości

$$\varphi^{\diamond}(t|p^{\nabla}(d)) = \exp(p^{\diamond}(d)\cdot t) = [(1+p\cdot d)^{1/d})]^t. \tag{61}$$

Wzajemne relacje pomiędzy poszczególnymi czynnikami dyskontującymi i stopami forward pokazuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 16. *Dla dowolnego $t \in]0,T]$ mamy:*

$$\varphi_*(t|d,p) \leqslant \varphi^{\diamond}(t|p^{\diamond}) \leqslant \varphi^*(t|d,p^{\diamond}) < \varphi^*(t|d,p), \tag{62}$$

$$\varphi_*(t|d,p) \leqslant \varphi^{\diamond}(t|p^{\diamond}) < \varphi^{\diamond}(t|p^{\diamond}) < \varphi^*(t|d,p). \tag{63}$$

Dowód. Z definicji 13 i 14 wraz z wypukłością funkcji wykładniczej oraz z (47) otrzymujemy (62). Z definicji 14 i nierówności (58) otrzymujemy

$$\varphi_*(t|d,p) \leqslant \varphi^{\diamond}(t|p^{\diamond}) < \varphi^{\diamond}(t|p).$$

Ponadto dla każdego $i = 1,2,\ldots,n$ i $t \in](i-1)\cdot d,\ i\cdot d]$ mamy

$$\varphi^{\diamond}(t|p) \leqslant \varphi^{\diamond}(i\cdot d|p) = (e^{p\cdot d})^i < \left(\frac{1}{1-p\cdot d}\right)^i = \varphi^*(i\cdot d|d,p) = \varphi^*(t|d,p). \quad \blacksquare$$

3.4. Struktura terminowa stopy spot

Rozważmy ponownie dowolną strukturę terminową stopy forward $\Phi=\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}$. W analizie kapitałowej równolegle z pojęciem struktury terminowej stopy forward posługujemy się pojęciem struktury terminowej stopy spot.

Definicja 15. *Strukturą terminową stopy spot* nazywamy dowolną funkcję $y:]0, T] \to R^+$ spełniającą tożsamość

$$FV_*(1, t|\{(\Delta T_{i-1}, y(t))\}_{i=1}^{n}) = FV_*(1, t|\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}). \tag{64}$$

Twierdzenie 17. *Każda struktura terminowa stopy spot* $y:]0, T] \to R^+$ *jest w przedziale* $[T_1, T_n]$ *jednoznacznie określona za pomocą zależności*

$$y(t) = \begin{cases} y_i \Leftrightarrow t \in [T_i, T_{i+1}[, & i=1,2,\ldots,n-1, \\ y_n \Leftrightarrow t = T_n, \end{cases} \tag{65}$$

gdzie każda z liczb rzeczywistych y_j $(j=1,2,\ldots,n)$ *jest jedynym dodatnim pierwiastkiem równania*

$$\prod_{k=1}^{j} (1 + y \cdot \Delta T_k) = \varphi_*(T_j|\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}). \tag{66}$$

Dowód. Z (42) i (63) dla każdego $j=1,2,\ldots,n$ mamy

$$\prod_{k=1}^{j} (1 + y(T_j) \cdot \Delta T_k) = \varphi_*(T_j|\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}).$$

Oznacza to, że stopa spot $y(T_j)$ jest dodatnim pierwiastkiem równania (66). Jest to takie równanie wielomianowe stopnia j, że współczynniki przy naturalnych potęgach niewiadomej y są nieujemne, a wyraz wolny jest ujemny. Takie równanie ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni. Wartość $y(T_j)$ jest zatem określona jednoznacznie. Ponownie korzystając z (42) i (64) dla każdego $t \in \lfloor T_j, T_{j+1} \rfloor$ $(j=1,2,\ldots,n-1)$ mamy

$$\prod_{k=1}^{j} (1 + y(t) \cdot \Delta T_k) = \varphi_*(T_j|\{(\Delta T_{i-1}, p_i)\}_{i=1}^{n}).$$

Oznacza to, że i stopa spot $y(t)$ jest dodatnim pierwiastkiem równania (66). Z tego, że istnieje jedynie jeden taki pierwiastek, wnioskujemy, że $y(t)=y(T_j)$, co kończy dowód. ■

Kłopotliwy dla nas może być fakt niemożliwości wyznaczenia przebiegu struktury terminowej stopy spot w przedziale $[0, \Delta T_0[$. Możemy ograniczać zasięg tej nieokreśloności, korzystając z założenia $\Delta T_0 \to 0$. Z drugiej strony wspomniany brak znajomości wartości stopy spot nie utrudnia nam jednoznacznego określenia wartości czynnika akumulacji kapitału, gdyż jest on równy wtedy jedności.

Stosowanie struktury terminowej stopy spot wybitnie upraszcza formuły arytmetyki finansowej dla zmiennej stopy forward w przypadku równych okresów kapitalizacji. Załóżmy, że jest dana struktura terminowa stopy forward $\Phi = \{(d, p_i)\}_{i=1}^{n}$. Zgodnie z zależnością (65) wyznaczamy wtedy strukturę terminową stopy spot $y:]0, T] \to R^+$ i dowolny czynnik akumulacji kapitału zapisujemy wtedy w uproszczonej postaci

$$\varphi(t|\{(d, p_i)\}_{i=1}^{n}) = \varphi(t|d, y(t)). \tag{67}$$

Czynnik akumulacji kapitalizacji z góry jest wtedy opisany za pomocą zależności

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \; \forall t \in](i-1) \cdot d, \, i \cdot d] \quad \varphi^*(t|d, y(t)) = (1 - y(t) \cdot d)^{-i}. \tag{68}$$

Czynnik akumulacji kapitalizacji z dołu jest wtedy opisany za pomocą zależności

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \; \forall t \in [(i-1) \cdot d, \, i \cdot d[\quad \varphi_*(t|d, y(t)) = (1 - y(t) \cdot d)^{i-1}. \tag{69}$$

Nawiązując do pojęcia stopy forward kapitalizacji z góry, definiujemy za pomocą tożsamości

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \quad \varphi^*(i \cdot d|d, y^{\nabla}(t)) = \varphi_*(i \cdot d|d, y(t)|) \tag{70}$$

strukturę terminową stopy spot $y^{\nabla}(\cdot)$ kapitalizacji z góry. Jest ona dana tożsamością

$$y^{\nabla}(t) = \frac{y(t)}{1 + y(t) \cdot d}. \tag{71}$$

Dodatkowo pojawia się możliwość określenia wartości kapitalizowanej ciągle. Czynnik akumulacji kapitalizacji ciągłej jest opisany za pomocą zależności

$$\varphi^{\Diamond}(t|y(t)) = e^{y(t) \cdot t}. \tag{72}$$

Nawiązując do pojęcia stopy forward kapitalizacji ciągłej, definiujemy za pomocą tożsamości

$$\forall i=1,2,\ldots,n \quad \varphi^{\diamond}(i\cdot d|y^{\diamond}(d,t))=\varphi_{*}(i\cdot d|d,\ y(t)) \tag{73}$$

strukturę terminową stopy spot $y^{\diamond}(\cdot,\cdot)$ kapitalizacji ciągłej. Jest ona dana tożsamością

$$y^{\diamond}(d,t)=\frac{\ln(1+y(t)\cdot d)}{d}. \tag{74}$$

W zastosowaniach arytmetyki finansowej użyteczne może być stosowanie wynikającej stąd tożsamości

$$\varphi^{\diamond}(t|y^{\diamond}(d,t))=\exp(y^{\diamond}(d,t)\cdot t)[(1+y(t)\cdot d)^{1/d}]^{t}. \tag{75}$$

Dodatek

W pracy parokrotnie wykorzystywano następującą własność addytywnych funkcji monotonicznych.

Lemat D. *Niech będzie dana funkcja* $F:R\to R$. *Wtedy warunki*

$$\forall (x_1,x_2)\in R^2 \quad F(x_1+x_2)=F(x_1)+F(x_2), \tag{D1}$$

$$\forall (x_1,x_2)\in R^2 \quad x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1)<F(x_2), \tag{D2}$$

są warunkami dostatecznymi na to, aby

$$\forall (x,\alpha)\in R^2 \quad \alpha\cdot F(x)=F(\alpha\cdot x). \tag{D3}$$

Dowód. Bezpośrednio z (D1) mamy $F(0)=F(0)+F(0)$, co dowodzi

$$F(0)=0. \tag{*}$$

Stąd, podstawiając $x_2=-x_1$, otrzymujemy

$$F(-x_1)=-F(x_1). \tag{**}$$

Bezpośrednio z (D1) drogą indukcji matematycznej dla każdej liczby naturalnej $n\in N$ otrzymujemy

$$n\cdot F(x_1)=F(n\cdot x_1). \tag{***}$$

Stosując w (***) indukcję matematyczną dla każdej liczby naturalnej $m\in N$, uzyskujemy

$$n\cdot F(m\cdot x_1)=m\cdot F(n\cdot x_1). \tag{****}$$

Zestawiając razem (*), (**), (****) wnioskujemy, że warunek (D3) jest prawdziwy dla dowolnej liczby wymiernej $\alpha \in W$. Dowodząc prawdziwości warunku (D3) dla dowolnej ustalonej liczby niewymiernej $\alpha \in IW$, przypisujemy tej liczbie jej przekrój Dedekinda $\lfloor A_{inf}, A_{sup} \rfloor$ [9]. Przyjmijmy oznaczenia:

- $\alpha_{inf} \in A_{inf}$ – dowolne dolne wymierne oszacowanie liczby α,
- $\alpha_{sup} \in A_{sup}$ – dowolne górne wymierne oszacowanie liczby α.

Z warunku (D2) – dla dowolnego $x \in R^+$ – mamy wtedy

$$\alpha_{inf} \cdot F(x) = F(\alpha_{inf} \cdot x) < F(\alpha \cdot x) < F(\alpha_{sup} \cdot x) = \alpha_{sup} \cdot F(x),$$

co ostatecznie zgodnie z zasadą ciągłości Dedekinda [9] prowadzi do potwierdzenia warunku (D3) dla dowolnej pary $(x, \alpha) \in R^+ \times R$. Ten fakt wraz z warunkami (*) i (**) kończy dowód lematu. ■

Zakończenie

Niniejszy artykuł jest autorską propozycją formalnego uporządkowania metod arytmetyki finansowej. Przedstawione tu wyniki stanowią elementy przygotowywanej szerszej monografii pod tytułem „Od arytmetyki handlowej do inżynierii finansowej".

Literatura

[1] M.L. Calzi, *Towards a General Setting for Fuzzy Mathematics of Finance*, Fuzzy Sets & Systems 35 (1990), 265-280
[2] E. Castagnoli, *Appunti di Matematica Finanziara*, Unicopli, Milano 1986
[3] M. Dobija, *Źródła wartości jednostki pieniądza*, w: Tarczyński W. (red.) *Rynek kapitałowy – skuteczne inwestowanie*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2002
[4] M. Dobija, E. Smaga, *Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków 1995
[5] E.J. Elton, M.J. Gruber, *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa 1998
[6] F.J. Fabozzi, G. Fong, *Zarządzanie portfelem inwestycji przynoszących stały dochód*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000
[7] K. Jackowicz, *Zarządzanie ryzykiem stopy procentowej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999

[8] H. Johnson, *Ocena projektów inwestycyjnych – Maksymalizacja wartości projektów inwestycyjnych*, Wydawnictwo K.E.Liber, Warszawa 2000
[9] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, Biblioteka Matematyczna, PWN, Warszawa 1977
[10] D.G. Luenberger, *Teoria inwestycji finansowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003
[11] L. Peccati, *Su di una caratterizzazione del principio del criterio dell'attualizzazione*, Studium Parmense, Parma 1972
[12] E. Smaga, *Arytmetyka finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Kraków 1999
[13] M. Sobczyk, *Matematyka finansowa*, Placet, Warszawa 1997
[14] A. Weron, R. Weron, *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998

AXIOMS OF FINANCE ARITHMETIC

Summary

The main goal of this paper is a presentation of theoretical background for finance arithmetic. Axiomatic definitions of future value and present value are given. The consistency between these notions is considered. Interest methods are described.