Andrzej CAŁCZYŃSKI
Zbigniew ŚLESZYŃSKI

WSPÓŁZALEŻNE MODELE LOKALIZACYJNO-ROZWÓZKOWE

Uwagi wstępne

Zagadnienia lokalizacyjne i rozwózkowe to jedne z trudniejszych do rozwiązania zagadnień należących do badań operacyjnych. Wspólną cechą tych dwóch zagadnień jest ich kombinatoryczny charakter oraz złożona struktura (zawierająca często zależności nieliniowe), co sprawia, że przy ich rozwiązywaniu w praktyce korzysta się głównie z metod przybliżonych.

Pierwsze sformułowania modeli lokalizacyjnych pochodzą jeszcze z XIX i pierwszej połowy XX wieku, a związane są z nazwiskami J.H. van Thünena (1826 r.), W. Launhardta (1882 r.), A. Webera (1909 r.), A. Predöhla (1925 r.), T. Palandera (1935 r.) i A. Löscha (1944 r.). Sformułowania te dotyczą tzw. zagadnień lokalizacyjnych w przypadku ciągłym, co oznacza, że miejscem lokalizacji danego obiektu pośród obsługiwanych przezeń osiedli może być dowolny punkt płaszczyzny.

W niniejszym artykule zajmujemy się problemem lokalizacji w przypadku dyskretnym, który w nowoczesnym ujęciu programowania matematycznego został sformułowany po raz pierwszy przez T.C. Koopmansa i M. Beckmanna w 1957 roku.

Rozwiązanie zagadnienia lokalizacji w przypadku dyskretnym polega na wyznaczeniu optymalnego położenia m ośrodków dystrybucji $B_1, \ldots, B_m$ wśród danych n punktów $A_1, \ldots, A_n$ ($m < n$), przy czym miejscem lokalizacji obiektów B_j tworzących m-elementowy podzbiór właściwy Γ_j n-elementowego zbioru Γ, mogą być wyłącznie punkty A_i.

Jeśli chodzi o zagadnienia rozwózkowe, to ich genezą jest problem, który po raz pierwszy został postawiony przez W. R. Hamiltona w 1859 roku w następującej postaci: zbudować trasę podróży dookoła kuli ziemskiej przebiegającą przez 20 punktów postoju tak, aby każdy z nich przebyć tylko raz.

Chociaż rozwiązanie tego zagadnienia łatwo uzyskać, to do dnia dzisiejszego nikt nie znalazł warunku koniecznego i wystarczającego na istnienie takiej drogi (zwanej cyklem Hamiltona) w dowolnym grafie. Problem ten z kolei jako kombinatoryczne zagadnienie komiwojażera sprowadzający się do znalezienia spośród istniejących cykli Hamiltona takiego, który charakteryzuje się najkrótszą odległością, został sformułowany po raz pierwszy przez H. Whitneya w 1934 roku. Problem komiwojażera, a szczególnie jego uogólniona wersja znana w literaturze jako zadanie wielu komiwojażerów o ograniczeniach zasobowych, stał się podstawą do sformułowań wielobazowego zagadnienia rozwózkowego (WZR).

Najbardziej istotnymi procesami decyzyjnymi w zagadnieniu rozwózki towarów są:

- optymalna rejonizacja zasięgu działania poszczególnych baz,
- optymalny podział wszystkich punktów obsługiwanych przez jedną bazę na grupy, z których każda może być obsługiwana przez pojazd określonego typu przy wykorzystaniu pełnej jego ładowności w założonym z góry czasie,
- optymalna kolejność zaopatrywania poszczególnych punktów odbioru wchodzących w skład danej grupy obsługiwanej przez jeden pojazd – w ramach ustalonych rejonów obsługi dla każdej bazy.

Pośród modeli opisujących różnorodne zagadnienia rozwózkowe za najbardziej użyteczne dla praktyki gospodarczej można uznać model:

- ustalania tras dostaw (UTD),
- ustalania kursów dostaw (UKD),
- ustalania regularnych kursów dostaw (URKD),
- harmonogramowania pracy transportu (HPT).

1. Współzależny model lokalizacyjny

Konstrukcja każdego modelu lokalizacyjnego zależy od rodzaju lokalizowanego obiektu oraz od specyfiki branżowej.

Stosunkowo łatwo można rozwiązać zadanie lokalizacyjne dwuszczeblowe bądź nawet trójszczeblowe dla jednorodnego towaru, ale przy zadaniach trójszczeblowych, w których występuje wiele asortymentów, natrafiamy na spore trudności natury numerycznej.

W uogólnionej postaci kompleksowy model lokalizacji ośrodków dystrybucji (które dalej będziemy nazywali bazami) – przy założeniu trójszczeblowego układu powiązań przestrzennych:

$$\text{Dostawcy} \rightarrow \text{Bazy} \rightarrow \text{Odbiorcy}$$

i przy uwzględnieniu wieloasortymentowości masy towarowej – można sformułować następująco[1]:

Na pewnym obszarze występuje n odbiorców $O_1, \ldots, O_n$ zgłaszających zapotrzebowanie na różne towary. Zakładamy, że zapotrzebowania te dotyczą określonego horyzontu czasowego T, a ich suma znacznie przewyższa aktualne możliwości realizacji dostaw przez istniejące bazy magazynowe. Magazyny te nie będą również w stanie przejąć całej masy towarowej oferowanej w okresie T przez k dostawców $D_1, \ldots, D_k$.

Istnieje zatem konieczność powiększenia zdolności magazynowej baz albo przez rozbudowę istniejących obiektów, albo przez całkiem nowe inwestycje. W związku z tym – biorąc pod uwagę układ szlaków komunikacyjnych, infrastrukturę terenu oraz inne czynniki lokalizacyjne – wytypowano p miejscowości jako potencjalne miejsca budowy nowych baz. Oznaczmy zatem przez m liczbę istniejących i potencjalnych baz magazynowych oraz umówmy się, że $MN_1, \ldots, MN_p$ to potencjalne miejsca lokalizacji nowych magazynów, a $MI_{p+1}, \ldots, MI_m$ to magazyny istniejące, przy czym $1 \leq p \leq m$.

Przyjmijmy ponadto następujące oznaczenia:

$q \geq 2$ – liczba uwzględnionych w modelu rodzajów towaru,

$b_j^r \geq 0 \; (j = 1, \ldots, n; \; r = 1, \ldots, q)$ – zapotrzebowanie odbiorcy j na asortyment r,

$g_l^r \geq 0 \; (l = 1, \ldots, k; \; r = 1, \ldots, q)$ – wielkość podaży asortymentu r u dostawcy l,

$d_i > 0 \; (i = 1, \ldots, p)$ – maksymalna przepustowość i-tego potencjalnego magazynu,

$a_i > 0 \; (i = p+1, \ldots, m)$ – zdolność składowa istniejącego magazynu i, która musi być w całości wykorzystana,

$e_i \geq 0 \; (i = p+1, \ldots, m)$ – wielkość zdolności magazynowej, o którą można maksymalnie powiększyć magazyny istniejące,

$c_{li}^r \geq 0 \; (l = 1, \ldots, k; \; i = 1, \ldots, m; \; r = 1, \ldots, q)$ – jednostkowe koszty dostaw asortymentu r od dostawcy l do magazynu i,

$\hat{c}_{ij}^r \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n; \; r = 1, \ldots, q)$ – jednostkowe koszty dostaw asortymentu r z magazynu i do odbiorcy j,

$x_{li}^r \geq 0$; – zmienne oznaczające ilość asortymentu r przemieszczanego od dostawcy l do magazynu i,

$\hat{x}_{ij}^r \geq 0$; – zmienne oznaczające ilość asortymentu r przemieszczanego z magazynu i do odbiorcy j,

$y_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, p)$ – zmienne oznaczające pojemność nowych magazynów,

$y_i \geq 0 \; (i = p+1, \ldots, m)$ – zmienne oznaczające wielkość zdolności magazynowej, o którą zostaną powiększone magazyny istniejące.

[1] Tego rodzaju model może być wykorzystany na przykład przy lokalizacji magazynów hurtowych artykułów spożywczych.

Aby zadanie nie było sprzeczne, niezbędne są następujące założenia:

$$\sum_{l=1}^{k} g_l^r \geq \sum_{j=1}^{n} b_j^r; \qquad r = 1, \ldots, q, \tag{1}$$

co oznacza, że łączna podaż asortymentu r musi być co najmniej równa łącznemu popytowi na ten asortyment.

$$\sum_{r=1}^{q} \sum_{l=1}^{k} g_l^r \geq \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} b_j^r > \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{2}$$

co oznacza, że łączna podaż wszystkich asortymentów musi być co najmniej równa łącznemu popytowi na wszystkie asortymenty, który z kolei musi być większy od istniejącej zdolności magazynowej.

Wynika stąd, że w okresie docelowym T należy powiększyć zdolności magazynowe istniejących obiektów lub wybudować nowe obiekty o łącznej wielkości:

$$\sum_{r=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} b_j^r - \sum_{i=1}^{n} a_i = d > 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{p} d_i + \sum_{i=p+1}^{m} (a_i + e_i) \geq \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} b_j^r, \tag{4}$$

co oznacza, że łączna powierzchnia magazynowa obiektów nowych i istniejących musi być co najmniej równa łącznemu zapotrzebowaniu na wszystkie asortymenty.

Ponadto zakładamy, że:

$$0 \leq y_i \leq d_i, \qquad i = 1, \ldots, p \tag{5}$$

oraz

$$0 \leq y_i \leq e_i, \qquad i = p+1, \ldots, m. \tag{6}$$

Problem, jaki należy rozwiązać, polega na wyznaczeniu liczb x_{li}^r, $\hat{x}_{ij}^r$ oraz y_i, które spełniają następujące warunki:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{li}^r \leq g_l^r, \quad l = 1, \ldots, k; \; r = 1, \ldots, q, \tag{7}$$

$$\sum_{r=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^r \leq d_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}^{r}=a_i,\quad i=p+1,\ldots,m, \tag{9}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}^{r}\le a_i+e_i,\quad i=p+1,\ldots,m, \tag{10}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}\le d_i,\quad i=1,\ldots,p, \tag{11}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}=a_i,\quad i=p+1,\ldots,m, \tag{12}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}\le a_i+e_i,\quad i=p+1,\ldots,m, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\hat{x}_{ij}^{r}=b_j^{r},\quad j=1,\ldots,n;\ r=1,\ldots,q, \tag{14}$$

$$\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}=\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}^{r},\quad i=1,\ldots,n;\ r=1,\ldots,q, \tag{15}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}^{r}=\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}=y_i,\quad i=1,\ldots,p, \tag{16}$$

$$\sum_{r=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ij}^{r}-a_i=\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}x_{li}^{r}-a_i=y_i,\quad i=p+1,\ldots,m, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_i=d \tag{18}$$

i które minimalizują funkcję:

$$Z=\sum_{r=1}^{q}\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{m}c_{li}^{r}x_{li}^{r}+\sum_{r=1}^{q}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\hat{c}_{ij}^{r}\hat{x}_{ij}^{r}. \tag{19}$$

Omawiany model jest modelem współzależnym, w którym przepływy towarów w relacji dostawcy → bazy mają wpływ na przepływy towarów w relacji bazy → odbiorcy i odwrotnie, od przestrzennego układu powiązań typu: bazy → odbiorcy zależą powiązania typu dostawcy → bazy.

Przy założeniu jednorodności masy towarowej, w celu wyznaczenia rozwiązania optymalnego trójszczeblowego zadania lokalizacyjnego można się posłużyć liniowym schematem transportowo-lokalizacyjnym (LSTL) zaproponowanym w pracy [2]. Dla wielu asortymentów nie udało się skonstruować odpowiedniego

LSTL. W tej sytuacji możemy zaproponować jedynie pewne podejścia heurystyczne, umożliwiające – jak sądzimy – uzyskanie rozwiązania przybliżonego.

W pracy [2] przedstawiono dwa takie podejścia. Pierwsze z podejść polega na rozpatrzeniu najpierw relacji dostawcy → magazyny. Dla relacji tych skonstruowano odpowiedni LSTL, którego rozwiązanie optymalne wskazuje, jakie ilości i jakiego asortymentu zostaną przemieszczone do magazynów istniejących i potencjalnych. Informacje te stają się z kolei podstawą do rozpatrzenia relacji: magazyny → odbiorcy. W tym przypadku jednak mamy już sztywno ustalone wartości brzegowe dotyczące podaży poszczególnych asortymentów w magazynach. Należy zatem teraz rozwiązać q klasycznych zbilansowanych zadań transportowych oddzielnie dla każdego asortymentu.

Drugie podejście zaprezentowane w pracy [2] polega na rozpatrzeniu najpierw relacji: magazyny → odbiorcy. Po rozwiązaniu odpowiedniego LSTL otrzymaliśmy informacje, jakie ilości i jakiego asortymentu zostaną przemieszczone z magazynów do odbiorców, a tym samym ustaliliśmy wartości brzegowe określające zapotrzebowania magazynów istniejących i potencjalnych na poszczególne asortymenty. Informacje te stanowią podstawę do rozpatrzenia relacji dostawcy → magazyny. Ponieważ mamy tutaj sztywno ustalone wartości brzegowe, należy teraz rozwiązać q otwartych zadań transportowych oddzielnie dla każdego asortymentu.

Poza powyżej scharakteryzowanymi podejściami dwuszczeblowymi możliwe są również i inne procedury przybliżone. Przedstawimy teraz podejście zaproponowane przez Z. Śleszyńskiego.

Podejście to polega na rozpatrywaniu trójszczeblowych LSTL konstruowanych oddzielnie dla poszczególnych asortymentów. I tak, po rozwiązaniu odpowiedniego LSTL obejmującego cały układ przestrzenny: dostawcy → magazyny → odbiorcy najpierw dla I asortymentu, a następnie modyfikując pojemność magazynów dla każdego, aż do wyczerpania wszystkich asortymentów, otrzymamy $q!$ rozwiązań przybliżonych zagadnienia – w zależności od przyjętej kolejności asortymentów. Warto zauważyć, że na podstawie [2] możemy też wyznaczyć dolne oszacowanie funkcji celu (19), a zatem mamy wyrobiony pogląd na temat jakości otrzymanych rozwiązań.

2. Współzależny model rozwózkowy

Ze względu na ograniczone ramy pracy, nie będziemy tutaj formułować modelu wielobazowego zagadnienia rozwózkowego, który jest powszechnie znany. Zauważmy jedynie, że na podstawie tego co powiedziano w uwagach wstępnych, przy występowaniu wielu baz w WZR, mamy do czynienia z trzema etapami

procesu optymalizacyjnego, przy czym z punktu widzenia teoretycznego najwłaściwsza byłaby jednoczesna ich optymalizacja, ponieważ są one wzajemnie uwarunkowane. Polegałoby to na wyodrębnieniu grup punktów obsługiwanych przez każdą bazę, a następnie podgrup punktów obsługiwanych przez każdy pojazd w taki sposób, aby przy zapewnieniu optymalnej kolejności odwiedzania każdego punktu w podgrupie przez dany pojazd, suma kosztów transportu i magazynowania była najmniejsza.

W dostępnej literaturze, podobnie jak w przypadku trójszczeblowych zagadnień lokalizacyjnych dla wielu asortymentów, nie jest znana dokładna metoda rozwiązania WZR i zazwyczaj stosuje się metody przybliżone (por. [1], [3], [4], [5]).

3. Współzależne modele lokalizacyjno-rozwózkowe

Zasygnalizujemy teraz pewne nowe problemy, które w dostępnej nam literaturze nie były dotychczas rozpatrywane, a które – jak sądzimy – zasługują na uwagę. Jednym z najprostszych takich zagadnień jest zagadnienie lokalizacji przedstawicielstw i ustalenie dla nich rejonów obsługi. Rozpatrzmy następujące zadanie.

Firma mająca pewne obiekty w n miejscowościach $A_1, \ldots, A_n$ pragnie zlokalizować swoje przedstawicielstwa w m miejscowościach $B_1, \ldots, B_m$ ($m < n$), przy czym zakładamy, że miejscem lokalizacji przedstawicielstw B_j tworzących m-elementowy podzbiór właściwy Γ_j n-elementowego zbioru Γ, mogą być wyłącznie punkty A_i. Firma ta może mieć już k przedstawicielstw ($0 < k < m$) i zastanawia się, czy nie opłaciłoby się powiększyć ich liczby bądź też musi dopiero uruchomić swoje przedstawicielstwa ($k = 0$). Każdemu istniejącemu bądź nowo utworzonemu przedstawicielstwu ma być przyporządkowany pewien rejon obsługi. Znane są koszty uruchomienia nowego przedstawicielstwa i koszty jego bieżącej działalności. Znane są też koszty bieżącej działalności przedstawicielstw istniejących, jeżeli takie występują. Znane są wreszcie koszty podróży przedstawiciela firmy pomiędzy dowolną parą punktów zbioru Γ.

Zadanie, jakie należy rozwiązać, polega na odpowiedzi na następujące pytania:

- czy należy ograniczyć się do przedstawicielstw, które już istnieją (jeśli istnieją),
- czy i gdzie należy uruchomić nowe przedstawicielstwa i ile,
- jakie rejony obsługi przypisać poszczególnym przedstawicielstwom,
- jaka ma być kolejność odwiedzania obiektów A_i należących do danego rejonu przez przedstawiciela firmy obsługującego ten rejon.

Decyzje tego rodzaju należy podjąć tak, aby koszty firmy związane z działalnością przedstawicielstw były minimalne.

Powyższe zadanie jest zadaniem łączącym w sobie problem lokalizacyjny w przypadku dyskretnym z problemem wielu komiwojażerów. W świetle poprzednich rozważań nie ulega przy tym wątpliwości, że model takiego zadania jest modelem współzależnym.

Rozpatrzmy teraz podobne zadanie przy założeniu, że firma mająca sieć wyspecjalizowanych sklepów w n miejscowościach pragnie zlokalizować swoje hurtownie w m miejscowościach ($m < n$). Oprócz parametrów dotyczących kosztów uruchomienia nowych hurtowni i ich bieżącej działalności, kosztów działalności hurtowni już istniejących (jeśli one występują), a także kosztów przemieszczania towarów pomiędzy dowolną parą punktów zbioru Γ, w którym pewne punkty są lub będą bazami, dysponujemy danymi określającymi zapotrzebowanie sklepów i zdolności składowe hurtowni.

Zadanie, jakie należy rozwiązać, polega na odpowiedzi na podobne pytania, jak w poprzednim zadaniu, przy czym decyzje w tej mierze powinny zapewniać minimalizację kosztów bądź maksymalizację zysku omawianej firmy.

Powyższe zadanie jest zadaniem dwuszczeblowym typu: bazy → odbiorcy, w którym tzw. problem lokalizacyjny w przypadku dyskretnym z wagami [2] (gdzie wagami są ilości przewożonych towarów z baz do odbiorców) łączy się z problemem wielu komiwojażerów o ograniczeniach zasobowych. Jest oczywiste, że model powyżej sformułowanego zadania jest również współzależnym modelem, w tym przypadku lokalizacyjno-rozwózkowym.

Również dwuszczeblowym modelem lokalizacyjno-rozwózkowym (typu: dostawcy → bazy) jest model opisujący problem ustalenia odpowiedniej liczby baz dla firmy produkującej określone towary, która pragnie zorganizować sieć własnych hurtowni.

Na zakończenie naszych rozważań wyobraźmy sobie, że w układzie trójszczeblowym (dostawcy → bazy → odbiorcy) i przy wieloasortymentowości masy towarowej, w jednym zadaniu mamy odpowiedzieć na następujące pytania:

– czy należy ograniczyć się do magazynów istniejących i przez ich rozbudowę zapewnić powiększenie łącznej zdolności składowej, która w okresie docelowym T musi zapewniać pełną realizację przebiegów masy towarowej od dostawców przez bazy magazynowe do odbiorców, czy też i gdzie należy zbudować nowe obiekty, ile i o jakiej pojemności?

– jakie rejony obsługi przypisać poszczególnym magazynom?

– ile i jakich środków transportowych przyporządkować bazom tak, aby mogły one wykonać określone dla nich zadania przewozowe?

– jakie punkty odbioru należy przypisać poszczególnym pojazdom oraz w jakiej kolejności punkty te będą obsługiwane?

W przypadku minimalizacji kosztów działalności firmy podejmującej tego rodzaju decyzje, powyższe zadanie można opisać za pomocą pewnego modelu WPLR stanowiącego odpowiednie połączenie współzależnego modelu lokalizacyjnego (1) – (19) ze współzależnym modelem rozwózkowym (WZR).

Wielobazowy problem lokalizacyjno-rozwózkowy (WPLR) jest – rzecz jasna – jeszcze bardziej skomplikowany i znacznie trudniejszy do rozwiązania niż WZR.

Możliwe są tu różne podejścia: konstrukcyjne, dekompozycyjne, aproksymacyjne, heurystyczne oraz mieszane. Nad jedną z takich procedur obliczeniowych obecnie pracujemy.

Literatura

[1] **Bodin L., Golden B.**, Classificatin in Vehicle Routing and Scheduling, Networks 1981, nr 1.

[2] **Całczyński A.**, Modele i metody lokalizacji ośrodków dystrybucyjnych, IHWiU, Monografie i Syntezy 1981, nr 14.

[3] **Całczyński A.**, Metody optymalizacyjne w obsłudze transportowej rynku, PWE, Warszawa 1992.

[4] **Ogryczak B., Ogryczak W.**, Optymalizacja tras dostaw z wykorzystaniem mikrokomputera IBM-PC, Przegląd Statystyczny 1988, nr 1.

[5] **Szymanowski W., Ogryczak W.**, The Application of the Experiments with Neitzel's Method to Design the Foodstuff Distribution, EURO V, Lozanna 1982.