Małgorzata DOMAN
Katedra Matematyki Stosowanej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ROZKŁADY STATYSTYKI BDS STANDARYZOWANYCH RESZT MODELI GARCH ZWROTÓW INDEKSÓW GPW W WARSZAWIE

Wstęp

Wprowadzona w 1987 roku przez Brocka, Decherta i Scheinkmana statystyka BDS jest jednym z najczęściej obecnie stosowanych testów, służących do testowania nieliniowości. Statystyka ta jest oparta na wywodzącym się z teorii chaosu pojęciu całki korelacyjnej. Testuje hipotezę zerową, że szereg czasowy obserwacji jest generowany przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach przeciw nieokreślonej alternatywie, przy użyciu technik nieparametrycznych. Rozkład asymptotyczny statystyki BDS jest normalny. Jednak przy testowaniu empirycznych szeregów czasowych powstaje problem tempa zbieżności do rozkładu normalnego. Z nie do końca wyjaśnionych przyczyn problem ten ujawnia się szczególnie mocno przy testowaniu reszt modeli GARCH. Dokładniejsze informacje na temat rzeczywistego rozkładu statystyki BDS można w takich przypadkach uzyskać za pomocą metody bootstrap.

Praca poświęcona jest uzyskaniu empirycznych rozkładów statystyki BDS dla szeregów reszt standaryzowanych modeli GARCH, dopasowanych do szeregów indeksów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Stosując rozkłady bootstrapowe, wyznaczamy wartości krytyczne statystyki BDS, a następnie wykorzystujemy je do częściowej oceny dopasowania modeli.

1. Modele GARCH

Uogólniony model autoregresyjny heteroskedastyczności warunkowej (Generalised Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity) GARCH(p, q) zdefiniowany został w 1986 roku przez Bollersleva [2] jako rozszerzenie modelu zaproponowanego przez Engle'a [7]. Opisuje się on zależnościami:

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

gdzie z_t jest szeregiem niezależnych standaryzowanych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Dla $p=0$ otrzymujemy model ARCH(q) zdefiniowany przez Engle'a. Zwykle przyjmuje się, że zmienne z_t mają rozkład normalny, co jest równoważne z tym, że zmienna ε_t ma warunkowy rozkład normalny ze średnią zero i wariancją σ_t^2. Rozkład bezwarunkowy zmiennej ε_t nie jest jednak normalny, a w szczególności kurtoza jest większa od 3 i rozkład ma grubsze ogony niż rozkład normalny. Parametry modelu GARCH(p, q) powinny spełniać założenia $\omega > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$. Jeśli ponadto $\sum_{i=1}^{\max(p, q)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$, to szereg ε_t jest kowariancyjnie stacjonarny z wariancją bezwarunkową

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^{\max(p, q)} (\alpha_i + \beta_i)}.$$

W najbardziej popularnym modelu, GARCH(1, 1), powyższe ograniczenia przyjmują postać: $\omega > 0$, $\alpha_1 > 0$ i $\beta_1 \geqslant 0$. Warunek: $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ jest wówczas równoważny ze stacjonarnością drugiego rzędu dla szeregu ε_t, a z warunku

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + 2\alpha_1^2 < 1$$

wynika istnienie skończonego bezwarunkowego momentu rzędu czwartego.

Modele GARCH są szeroko stosowane w modelowaniu zmienności cen instrumentów finansowych. Dają zwykle dobre dopasowanie w próbie, a przy odpowiedniej interpretacji również dobre prognozy zmienności ([1], [5]). Jedną z metod oceny dopasowania modelu może być zbadanie za

pomocą odpowiedniego testu czy szereg reszt standaryzowanych modelu $z_t=\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$ składa się z niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (i.i.d).

2. Statystyka BDS

Statystyka BDS jest jednym z najsilniejszych testów nieliniowości. Testuje hipotezę zerową o niezależności i jednakowym rozkładzie i ma wysoką moc przeciwko szerokiej grupie nieliniowych alternatyw. Intuicja związana z testem BDS jest następująca. Niech (x_t) będzie ciągiem obserwacji, generowanych przez zmienne losowe (X_t) niezależne i o jednakowym rozkładzie. Rozważmy $P_A=P(|X_t-X_s|<\varepsilon)$, tzn. prawdopodobieństwo, że zmienne X_t i X_s przyjmują wartości odległe o mniej niż ε.

Niech $P_{2,B}=P(|X_t-X_s|<\varepsilon, |X_{t-1}-X_{s-1}|<\varepsilon$. Przy podanych założeniach o zmiennych zachodzi równość $P_{2,B}=P_A^2$. Podobnie mamy $P_{m,B}=P_A^m$ dla

$$P_{m,B}=P(|X_t-X_s|<\varepsilon, |X_{t-1}-X_{s-1}|<\varepsilon, ..., |X_{t-m}-X_{s-m}|<\varepsilon).$$

Jeżeli teraz (X_t) jest ciągiem zmiennych losowych, dla których chcemy testować hipotezę zerową o niezależności i jednakowym rozkładzie, to możemy estymować różnice $P_{k,B}-P_A^k$ dla $k=2, 3, ...$, które przy hipotezie zerowej mają wartość 0. W praktyce robi się to w ten sposób, że dla danego szeregu n obserwacji skalarnych x_t tworzy się ciąg x_t^m m-historii obserwacji x_t, gdzie $x_t^m=(x_{t-m+1}, ..., x_t)$. Tak określona m-historia jest wektorem w przestrzeni m-wymiarowej, którą nazywamy przestrzenią zanurzenia. Liczbę m nazywamy w tym przypadku wymiarem zanurzenia. Dla ustalonej pary (ε, n), określamy całkę korelacyjną

$$C_{m,n}(\varepsilon)=\frac{2}{(n-m+1)(n-m)}\sum_{s=m}^{n}\sum_{t=s+1}^{m-1}\prod_{j=0}^{m-1}I_\varepsilon(x_{s-j}, x_{t-j}),$$

gdzie

$$I_\varepsilon(x_{s-j}, x_{t-j})=\begin{cases}1, & \text{gdy } |x_{s-j}-x_{t-j}|<\varepsilon,\\ 0 & \text{dla innych } x_{s-j}, x_{t-j}.\end{cases}$$

Przy hipotezie zerowej o niezależności i jednakowym rozkładzie, $E(C_{m,n}(\varepsilon))=(E(C_{1,n}(\varepsilon)))^m$. Brock i in. [4] wykazują, że przy danym wymiarze zanurzenia i ε statystyka BDS określona wzorem

$$W_{m,n}(\varepsilon)=\sqrt{n-m-1}\,\frac{C_{m,n}(\varepsilon)-C^m_{1,n-m+1}(\varepsilon)}{\sigma_{m,n}(\varepsilon)}$$

ma asymptotycznie rozkład $N(0, 1)$. Wartość $\sigma_{m,n}(\varepsilon)$ określona jest równością

$$\sigma^2_{m,n}(\varepsilon)=4\left[k^m+2\sum_{j=1}^{m-1}k^{m-j}c^{2j}+((m-1)^2c^{2m}-m^2kc^{2m-2})\right],$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$c=c_{1,n}(\varepsilon),$$

$$k=k_n(\varepsilon)=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=t+1}^{n}\sum_{r=s+1}^{n}h_\varepsilon(x_t, x_s, x_r),$$

$$h_\varepsilon(a, b, c)=\frac{1}{3}[I(a, b)I(b, c)+I(a, c)I(c, b)+I(b, a)I(a, c)].$$

Statystyka BDS jest testem dwustronnym.

3. Bootstrap

Bootstrap, jak pisze jego twórca Efron [6], jest opartą na symulacjach komputerowych metodą wnioskowania statystycznego, pozwalającą na pomiar dokładności estymacji bez używania zaawansowanego aparatu matematycznego. Metoda ta jest najczęściej wykorzystywana do szacowania błędów standardowych i odpowiadających im p-wartości dla estymowanych parametrów populacji w sytuacji, gdy informacje o faktycznym rozkładzie uzyskane z próby są niepewne lub niewystarczające. Ogólna idea bootstrapu jest następująca. Dysponujemy n-elementową próbą $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, na podstawie której dokonujemy oszacowania interesującego nas parametru. Następnie losujemy z powtórzeniami n elementów ze zbioru $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ i otrzymujemy w ten sposób tzw. próbę bootstrapową $\{x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n\}$, dla której również dokonujemy oszacowania badanego parametru. Wielokrotnie (z reguły 1000 razy) powtarzamy tę procedurę. Wnioskowanie oparte na

rozkładzie estymatora uzyskanym z prób bootstrapowych jest bardziej wiarygodne, szczególnie w przypadku mniejszych prób niż wnioskowanie oparte na konwencjonalnej teorii asymptotycznej. W niniejszej pracy stosujemy metodę bootstrap do wyznaczenia kwantyli rozkładu statystyki BDS.

4. Opis danych

W pracy przeprowadzamy analizę dopasowania modeli GARCH do zwrotów szeregów indeksów GPW w Warszawie. Rozważamy WIG, WIG20, MIDWIG, TECHWIG oraz WIRR. Badamy dzienne procentowe logarytmiczne zwroty indeksów, tzn. szeregi o wyrazach postaci $r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$, gdzie p_t oznacza kurs zamknięcia. Gdy rozważamy empiryczne szeregi czasowe, zawsze powstaje problem ustalenia okresu z przeszłości, którego będą dotyczyły prowadzone badania. Ma to znaczenie szczególnie w przypadku rynku młodego, którego dynamika podlega znacznym zmianom. Takim rynkiem jest polski rynek kapitałowy. Rozważane w pracy notowania indeksów WIG i WIG20 obejmują okres począwszy od 2 stycznia 1995 roku. Od 3 października 1994 roku na GPW w Warszawie odbywa się pięć sesji w tygodniu. Indeks WIRR jest notowany od początku 1995 roku. Te dwa fakty mogą być uznane za oznaki, że GPW osiągnęła poziom rozwoju, pozwalający na sensowne porównywanie zachodzących na niej procesów ze zjawiskami zachodzącymi na rynkach rozwiniętych. Z tych powodów jako datę początkową analizowanych szeregów przyjęto dzień 2 stycznia 1995 roku.

Tabela 1. Zestawienie analizowanych danych

Indeks	Okres, z którego pochodzą notowania	Liczba notowań
WIG	02.01.1995 – 31.10.2002	1958
WIG20	02.01.1995 – 31.10.2002	1958
MIDWIG	31.12.1997 – 31.10.2002	1211
TECHWIG	29.12.1999 – 31.10.2002	711
WIRR	02.01.1995 – 31.10.2002	1958

Tabela 2. Statystyki opisowe szeregów zwrotów analizowanych indeksów

Statystyka	WIG	WIG20	MIDWIG	TECHWIG	WIRR
Średnia	0,0311	0,0232	−0,008	−0,142	0,0128
Odchylenie standardowe	1,78	2,12	1,51	2,96	1,88
Skośność	−0,116	−0,084	−0,410	0,277	−0,065
Kurtoza	5,77	6,36	7,42	4,7	6,42
Maksimum	7,89	13,7	7,05	11,2	10,9
Minimum	−10,3	−14,2	−9,90	−11,6	−10,3

5. Analiza empiryczna

We wszystkich analizowanych tu szeregach zwrotów występuje znaczna autokorelacja. Test Engle'a [7] wykazał również istnienie efektu ARCH. W związku z tym dopasowywane przez nas modele były modelami AR-GARCH, tzn. jednocześnie estymowano współczynniki modelu autoregresji, opisującego zależności liniowe w zwrotach oraz parametry modelu GARCH i warunkowe wariancje standardowe σ_t^2. Podstawę wyboru modelu stanowiły wartości kryteriów informacyjnych Akaikego i Schwarza. We wszystkich przypadkach kryteria wskazały na proste modele, AR(1) bez stałej i GARCH(1, 1). Wyestymowane modele mają zatem postać.

$$r_t = a r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

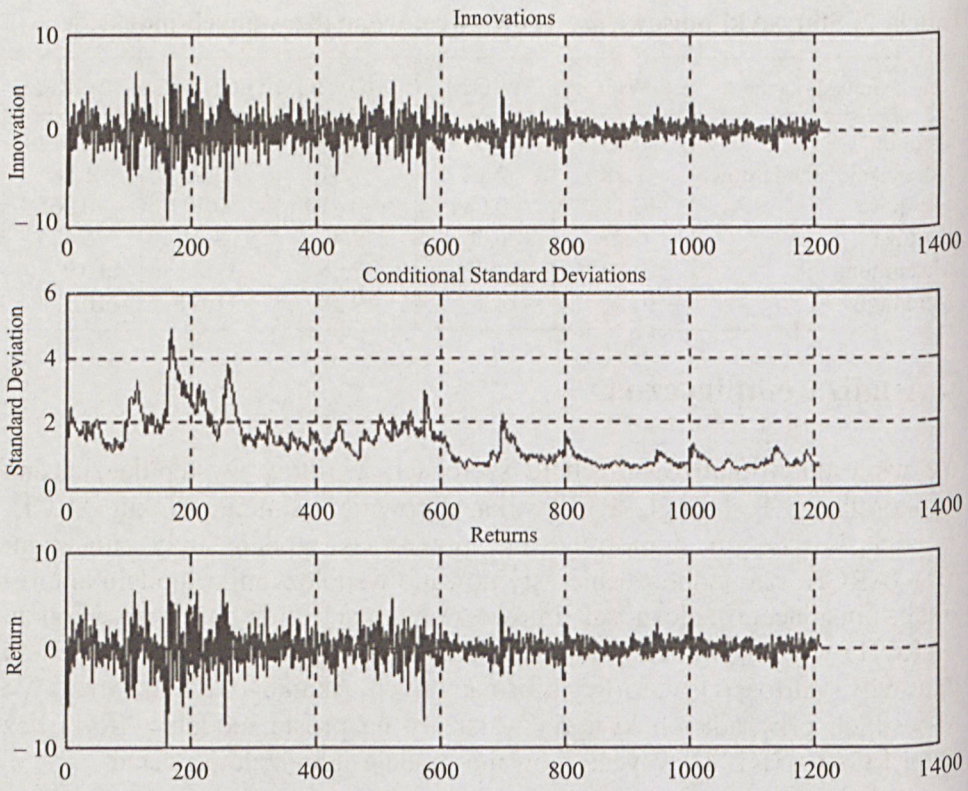
$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Parametry tak dobranych modeli przedstawia tabela 3. Wszystkie parametry są istotne na poziomie 1%.

Tabela 3. Parametry dopasowanych modeli, w nawiasach błędy standardowe

Statystyka	WIG	WIG20	MIDWIG	TECHWIG	WIRR
a	0,1690	0,0859	0,1076	0,0989	0,1281
	(0,0239)	(0,0240)	(0,0302)	(0,0389)	(0,0238)
ω	0,1763	0,2337	0,0133	0,2397	0,0263
	(0,0425)	(0,0537)	(0,0060)	(0,1198)	(0,0083)
α_1	0,1417	0,1378	0,1138	0,0881	0,1130
	(0,0211)	(0,0189)	(0,0201)	(0,0265)	(0,0174)
β_1	0,7999	0,8089	0,8840	0,8837	0,8828
	(0,0301)	(0,0262)	(0,0184)	(0,0338)	(0,0167)



Rys. 1. Reszty modelu GARCH(1, 1), warunkowe odchylenia standardowe oraz zwroty indeksu MIDWIG

Rysunek 1 przedstawia wykresy zwrotów indeksu MIDWIG oraz wyestymowanych za pomocą modelu GARCH(1, 1) warunkowych odchyleń standardowych i reszt modelu.

W celu oceny jakości dopasowania modelu zostały zbadane reszty standaryzowane $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$. Jeśli model dobrze wychwytuje nieliniowość zawartą w szeregu, to reszty te powinny mieć własność i.i.d. Przy takiej hipotezie zerowej zastosowano test BDS. Ze względu na to, że według powszechnej w literaturze opinii rozkład statystyki BDS w przypadku reszt modeli GARCH często znacznie odbiega od normalnego, zdecydowaliśmy się na wyznaczenie rozkładów empirycznych przy użyciu metody bootstrap. Dla każdego szeregu wylosowano 1000 prób bootstrapowych i na tej podstawie wyznaczono percentyle 2,5% ($q(2{,}5\%)$) i 97,5% ($q(97{,}5\%)$) oraz dystrybuanty empiryczne rozkładów. Umożliwiło to również ocenę, w jakim

stopniu w rozważanych przez nas przypadkach reszt modeli GARCH(1, 1) dopasowanych do zwrotów indeksów giełdowych empiryczne rozkłady statystyki BDS różnią się od rozkładu normalnego. Tabele 4-8 zawierają wartości statystyki BDS, wyliczone dla szeregów reszt standaryzowanych oraz granice 95% przedziałów ufności, wyznaczone za pomocą bootstrapu, dla wymiarów zanurzenia od 2 do 8. Rozważane wartości ε to 0,5, 1,0 oraz 1,5 odchylenia standardowego. Wybór taki został dokonany zgodnie z sugestiami zawartymi w literaturze ([3], [4], [8]), opartymi na analizie rezultatów symulacji komputerowych. Dodatkową informację na temat rozkładu reszt standaryzowanych dają ich statystyki opisowe zawarte w tabeli 9. Na poziomie istotności 5%, hipoteza zerowa zdecydowanie zostaje odrzucona w przypadku indeksu WIG20. Zatem w tym wypadku możemy stwierdzić, że model nie jest dobrze dobrany. Dla szeregów zwrotów indeksów WIG i TECHWIG hipoteza o rozkładzie i.i.d. reszt standaryzowanych nie zostaje odrzucona i, opierając się na wartościach statystyki BDS, można przypuszczać, że wyspecyfikowany model dobrze opisuje związki nieliniowe, występujące w zwrotach. W przypadku modelu dla indeksu MIDWIG tylko w jednym wypadku (wymiar 5, $\varepsilon = 0{,}5\sigma$) test odrzuca hipotezę zerową. Można również uznać model za dobry. Podobnie dla szeregu zwrotów indeksu WIRR, dla którego odrzucenie następuje w czterech przypadkach. Dwa ostatnie stwierdzenia nie są jednak kategoryczne. Być może w dynamice zwrotów indeksów MIDWIG i WIRR występują także składowe rzędu wyższego niż dwa, które nie są wychwytywane przez model GARCH.

Rysunki 1-3 pokazują wykresy dystrybuant empirycznych, histogramów oraz wykresów QQ dla wybranych rozkładów statystyki BDS w przypadku indeksów WIG i WIG20. Widać, że rozkłady empiryczne odbiegają od rozkładu normalnego. W zasadzie dla wszystkich rozważanych szeregów wykresy te wyglądają podobnie. Empiryczne rozkłady statystyki BDS z reguły wykazują niewielką asymetrię prawostronną, a ich kurtoza niewiele przekracza 3. Jeśli chodzi o podane przez nas wartości percentyli dla 2,5% i 97,5%, to odbiegają one dość znacznie od przedstawionych w tablicach Kanzlera [8]. Wskazuje to na istotność wyznaczania dla rozważanych modeli specyficznych rozkładów statystyki BDS.

W tabeli 9 przedstawione zostały statystyki opisowe reszt standaryzowanych dopasowanych modeli GARCH. Wykazują one przede wszystkim wyższą niż 3 kurtozę. W przypadku idealnie dopasowanych modeli reszty standaryzowane powinny mieć rozkład normalny. Wydaje się, że lepszym modelem mógłby być wobec tego GARCH z rozkładem błędu *t*-Studenta. Jednak przy dopasowywaniu tego typu modeli pojawiały się problemy, dotyczące istotności parametrów.

Tabela 4. Percentyle 2,5% ($q(2,5\%)$) oraz 97,5% ($q(97,5\%)$) rozkładu bootstrapowego statystyki BDS oraz wartość statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych

WIG		Wymiar zanurzenia						
ε/σ		2	3	4	5	6	7	8
0,5	$q(2,5\%)$	−1,8896	−1,8615	−1,8797	−1,8648	−1,8972	−1,8021	−1,7714
	$q(97,5\%)$	2,1482	2,0194	2,1468	1,1254	2,1068	2,1547	2,1033
	szereg	0,4940	0,3882	0,8707	0,8113	0,6622	0,8707	0,2226
1,0	$q(2,5\%)$	−1,9584	−1,9114	−1,8182	−1,8786	−1,9025	−1,7556	−1,8384
	$q(97,5\%)$	1,9173	2,0851	2,1193	1,9986	2,0908	2,1409	2,2748
	szereg	0,5454	0,2913	0,3922	0,9246	0,8342	0,5625	0,1994
1,5	$q(2,5\%)$	−1,9833	−2,0288	−2,0073	−1,8347	−1,9095	−1,9506	−1,8142
	$q(97,5\%)$	1,9797	1,8908	1,9854	2,1447	2,0983	1,9528	2,1272
	szereg	0,4963	0,1441	0,0838	0,4934	0,4222	0,2399	0,0003

Tabela 5. Percentyle 2,5% ($q(2,5\%)$) oraz 97,5% ($q(97,5\%)$) rozkładu bootstrapowego statystyki BDS oraz wartość statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych

WIG20		Wymiar zanurzenia						
ε/σ		2	3	4	5	6	7	8
0.5	$q(2,5\%)$	−1,8497	−1,9971	−1,8739	−1,8441	−1,7784	−1,8957	−1,7961
	$q(97,5\%)$	2,0577	2,0909	2,0623	2,2302	2,1450	2,1395	1,9948
	szereg	1,8949	2,1430	2,3258	2,8728	2,1377	2,8547	1,2064
1,0	$q(2,5\%)$	−1,9042	−1,9176	−1,9061	−1,9663	−1,9639	−1.7613	−1,9021
	$q(97,5\%)$	1,8992	2,0236	1,9539	2,0304	2,0166	2,1116	2,1470
	szereg	2,3797	2,5194	2,7116	3,1274	3,1771	2,5109	2,8131
1,5	$q(2,5\%)$	−1,9759	−1,9299	−1,9473	−1,9270	−1,8164	−1,8718	−1,8952
	$q(97,5\%)$	2,0615	2,0435	1,9176	2,0515	2,1462	1,8547	1,8596
	szereg	2,6713	2,7809	2,7491	3,2738	3,1789	2,9810	2,8049

Tabela 6. Percentyle 2,5% ($q(2,5\%)$) oraz 97,5% ($q(97,5\%)$) rozkładu bootstrapowego statystyki BDS oraz wartość statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych

MIDWIG		Wymiar zanurzenia						
ε/σ		2	3	4	5	6	7	8
0,5	$q(2,5\%)$	−1,8930	−2,0224	−1,8888	−1,9064	−1,8537	−1,7984	−1,7765
	$q(97,5\%)$	2,0171	2,0169	2,1286	1,9890	2,1282	2,1789	2,1992
	szereg	−1,0688	0,8421	1,8985	1,9921	1,5443	1,2939	0,6738
1,0	$q(2,5\%)$	−2,0362	−2,0500	−1.8622	−2,0012	−1,7844	−1,8734	−1,7481
	$q(97,5\%)$	1,9918	1,9800	1,9748	1,9281	2,1939	2,2364	2,2575
	szereg	−1,0688	0,2398	1,9008	1,7301	1,6891	1,4137	0,9936
1,5	$q(2,5\%)$	−2,0235	−2,0513	−1,9616	−2.0205	−1,8445	−1,8600	−1,9142
	$q(97,5\%)$	1,9475	1,9003	1,9484	2,0372	2,0955	2,0980	2,0455
	szereg	−0,8321	0,1589	0,9576	1,4843	1,3540	1,2767	1,0893

Tabela 7. Percentyle 2,5% ($q(2,5\%)$) oraz 97,5% ($q(97,5\%)$) rozkładu bootstrapowego statystyki BDS oraz wartość statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych

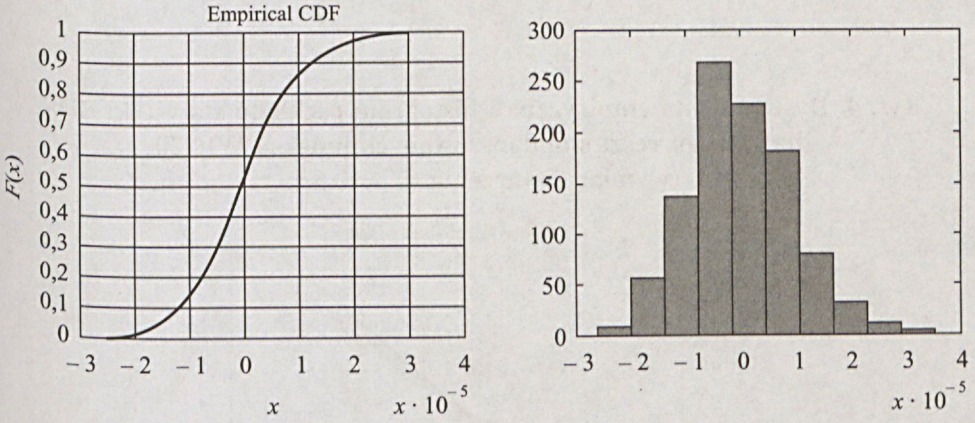
TECHWIG		Wymiar zanurzenia						
ε/σ		2	3	4	5	6	7	8
0,5	$q(2,5\%)$	−1,8712	−1,9121	−1,7909	−1,8374	−1,6237	−1.8531	−1,6896
	$q(97,5\%)$	2,0127	2,0946	2,0407	2,2857	2,2850	2,2798	2,1739
	szereg	0,4571	0,0911	1,0349	1,1991	1,1921	0,9464	1,5771
1,0	$q(2,5\%)$	−1,9334	−1,8665	−1,8066	−1,7385	−1,8850	−1,9300	−1,6843
	$q(97,5\%)$	2,1065	2,2557	2,1271	2,1417	2,0776	2,0131	2,3173
	szereg	0,6227	0,3475	0,4106	1,0749	1,2458	1,0208	0,5498
1,5	$q(2,5\%)$	−1,9772	−1,9379	−1,8826	−1,8870	−1,8756	−2,0105	−1,8104
	$q(97,5\%)$	1,9261	1,9891	2,1461	2,0533	2,0326	2,0348	2,1571
	szereg	0,8467	0,4265	0,5874	1,2252	1,2542	0,9716	0,6744

Tabela 8. Percentyle 2,5% (q(2,5%)) oraz 97,5% (q(97,5%)) rozkładu bootstrapowego statystyki BDS oraz wartość statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych

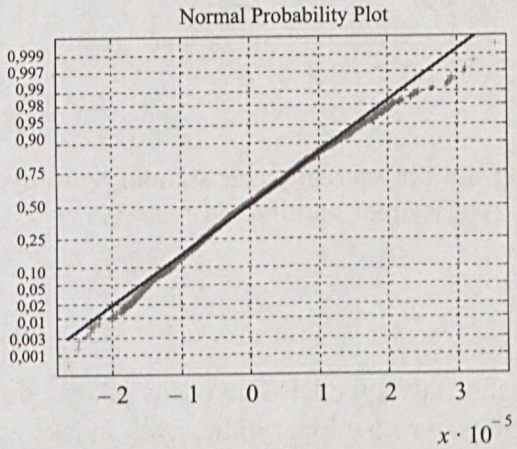
WIRR		Wymiar zanurzenia						
ε/σ		2	3	4	5	6	7	8
0,5	q(2,5%)	−1,9201	−1,8500	−1,8442	−1,8583	−1,8305	−1,9795	−1,8236
	q(97,5%)	2,0757	2,1092	2,1600	1,9523	2,0587	2,0390	2,1866
	szereg	1,0353	1,2321	1,6623	2,1724	2,4348	1,4814	1,5171
1,0	q(2,5%)	−2,1227	−1,9882	−1,9666	−1,9201	−1,9132	−1,8854	−1,8094
	q(97,5%)	1,9255	1,8707	2,0043	1,8808	2,0046	2,0281	2,1199
	szereg	1,0607	1,1536	1,1628	1,2314	1,2181	1,1050	1,0107
1,5	q(2,5%)	−1,9082	−1,8931	−1,9877	−1,9616	−1,9133	−1,8714	−1,9292
	q(97,5%)	1,9542	1,9498	1,9267	2,1265	2,0797	2,1451	1,9930
	szereg	0,9607	1,2836	1,3445	1,5446	1,4739	2,4204	1,4091

Tabela 9. Statystyki opisowe standaryzowanych reszt dopasowanych modeli AR-GARCH

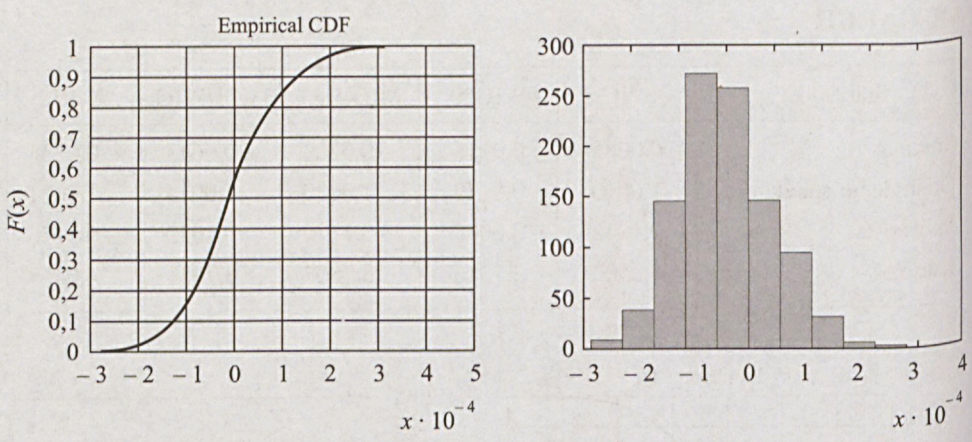
Statystyka	WIG	WIG20	MIDWIG	TECHWIG	WIRR
Średnia	0,0085	0,0118	−0,0209	−0,0643	−0,0225
Odchylenie standardowe	1,0010	0,8179	1,0030	1,0014	1,0021
Skośność	−0,1242	0,0005	−0,1170	0,1622	−0,3176
Kurtoza	4,2500	3,7316	3,7807	3,7638	4,0469



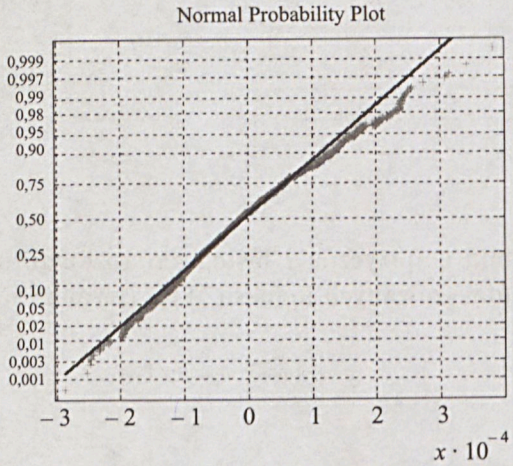
Rys. 2. Dystrybuanta empiryczna i histogram rozkładu statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych indeksu WIG (wymiar zanurzenia 8, $\varepsilon = \sigma$)



Rys. 3. Wykres QQ dla szeregu reszt standaryzowanych indeksu WIG (wymiar zanurzenia 8, $\varepsilon = \sigma$)



Rys. 4. Dystrybuanta empiryczna i histogram rozkładu statystyki BDS dla szeregu reszt standaryzowanych indeksu WIG20 (wymiar zanurzenia 5, $\varepsilon = 0{,}5\sigma$)



Rys. 5. Wykres QQ dla dla szeregu reszt standaryzowanych indeksu WIG20 (wymiar zanurzenia 5, $\varepsilon = 0{,}5\sigma$)

Podsumowanie

W pracy zastosowano statystykę BDS do oceny jakości dopasowania modeli GARCH do szeregów zwrotów logarytmicznych indeksów Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Ze względu na znaczne różnice między rozkładem statystyki BDS na próbach reszt standaryzowanych modeli GARCH w stosunku do asymptotycznego dla tej statystyki rozkładu

normalnego wyznaczono empiryczne rozkłady tej statystyki za pomocą metody bootstrap. Uzyskane w ten sposób rozkłady wykazują stosunkowo niewielkie zróżnicowanie. Od rozkładu normalnego różni je przede wszystkim asymetria. We wszystkich przypadkach modele AR-GARCH były dopasowywane przy użyciu kryteriów informacyjnych. Ocena dopasowania za pomocą testowania reszt standaryzowanych modelu przy hipotezie zerowej, że są one generowane przez ciąg zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie, dała zróżnicowane wyniki. W przypadku szeregu zwrotów indeksu WIG20 hipoteza zerowa została zdecydowanie odrzucona, co oznacza złe dopasowanie modelu. Dla szeregów zwrotów indeksów WIRR i MIDWIG wyniki nie są jednoznaczne. Modele GARCH opisują dobrze znaczną część dynamiki, lecz być może występują w niej także składowe rzędów wyższych niż 2. Najlepiej model GARCH(1, 1) wydaje się pasować do głównego indeksu GPW – WIG. Dobre dopasowanie pojawia się także w przypadku zwrotów indeksu TECHWIG. Wyniki pracy są na ogół zgodne z opisywanymi w literaturze przedmiotu. Jednak należy podkreślić, że rozkłady empiryczne statystyki BDS nie odbiegają w naszym wypadku tak dramatycznie od rozkładu normalnego jak można by się spodziewać na podstawie innych analiz. W szczególności przedstawione przez nas granice 95% przedziału ufności często bardzo niewiele różnią się od wyznaczonych dla rozkładu normalnego.

Literatura

[1] Andersen T.G., Bollerslev T.V., *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts*, International Economic Review 1998, 39.

[2] Bollerslev T.V., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 1986, 31.

[3] Brock W.A., Hsieh D.A., LeBaron B., *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, MIT Press, Cambridge MA 1991.

[4] Brock W.A., Hsieh D.A., Scheinkman J.A., LeBaron B., *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, Econometric Reviews 1996, 15.

[5] Doman M., Doman R., *Prognozowanie dziennej zmienności indeksu WIG określonej za pomocą danych o wyższej częstotliwości*, Acta Universitatis Lodziensis Folia Oeconomica (w druku).

[6] Efron B.R., Tibshirani J., *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, New York 1991.

[7] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica 1982, 50.
[8] Kanzler L., *Very Fast and Correctly Sized Estimation of the BDS Statistic*, Social Science Research Network 1999.

DISTRIBUTION OF THE BDS STATISTIC FOR THE STANDARDIZED RESIDUALS OF GARCH MODELS OF THE RETURNS OF THE WARSAW STOCK EXCHANGE INDICES

Summary

The BDS test was introduced by Brock, Dechert and Scheinkman in 1987. The test originates from chaos theory and is one of the most frequently used tools for testing nonlinearity. It tests the null hypothesis that the time series of observations is generated by a sequence of independent and identically distributed random variables against an unspecified alternative using non-parametric techniques. The asymptotic distribution of the BDS statistic is standard normal. When investigating empirical time series, however, a convergence rate problem arises that appears especially strongly in the case of the GARCH model residuals testing. In such cases, more accurate information on the true distribution of the BDS statistic can be obtained by means of the bootstrap method. In this paper we determine the bootstrap distributions of the standardized residuals of GARCH models of the returns of the Warsaw Stock Exchange indices. The obtained distributions are used for the partial evaluation of the goodness of fit of the models.