Gerard GŁOWACKI

EFEKTYWNOŚĆ INWESTYCJI PORTFELA AKCJI ZBUDOWANEGO Z WYKORZYSTANIEM KLASYCZNEGO MODELU MARKOWITZA

Wprowadzenie

Rok 2000 przyniósł spadki cen akcji na GPW. Było to poprzedzone gwałtownymi wzrostami, wywołanymi głównie przez tzw. spółki nowej ekonomii, a więc zajmujące się, a często ogłaszające, iż zamiast podstawowej działalności, na przykład produkcji butów będą się zajmować Internetem. Bardzo dynamiczne wzrosty, występujące od ponad 3 lat na giełdzie amerykańskiej, zamieniły się w równie dynamiczne spadki. Inwestorzy po prostu zauważyli, że akcje spółek, które nie przynoszą zysków, nie mogą w nieskończoność rosnąć. Spadki notowań i ujemne korekty prognoz finansowych dotknęły na świecie także solidne spółki, zajmujące się rzeczywiście zaawansowaną technologią (np. Cisco, Intel, Oracle).

W Polsce liderami spadków były spółki informatyczne (Optimus, Prokom, ComArch), co pociągnęło za sobą również spadki spółek innych branż. Pewnym sygnałem zbliżającego się załamania rynku mogła być wyprzedaż kontrolnego pakietu akcji Optimus S.A., przez założyciela i głównego akcjonariusza, po cenie znacznie niższej od wyceny akcji, obowiązującej na giełdzie. Nie po raz pierwszy więc wycofanie się z inwestycji przez znacznego akcjonariusza, poprzedza dość znaczny spadek notowań cen akcji [1]. Spadki cen akcji pociągnęły za sobą słabe wyniki funduszy emerytalnych i inwestycyjnych.

W tej rzeczywistości rodzi się pytanie, jakie wyniki inwestycyjne osiągnąłby portfel zbudowany z wykorzystaniem klasycznej teorii Markowitza. Celem niniejszego artykułu jest odpowiedź na pytanie, w jakim stopniu portfel zbudowany na bazie teoretycznego modelu może być w okresie znacznych wahań kursów akcji na giełdzie konkurencyjny w stosunku do portfeli zbudowanych na bazie indeksów giełdowych. W artykule podano również propozycje modyfikacji klasycznego modelu Markowitza.

1. Model Markowitza

Wyznaczenie portfela akcji z wykorzystaniem klasycznego modelu Markowitza przedstawia się najczęściej jako dwa powiązane ze sobą problemy jednokryterialne, w których:

- przy akceptowalnym poziomie ryzyka maksymalizuje się stopę zwrotu albo
- przy akceptowalnym poziomie stopy zwrotu należy zminimalizować ryzyko.

Stopa zwrotu z portfela:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i, \tag{1}$$

gdzie:

r_p – stopa zwrotu portfela,
x_i – udział i-tej akcji w portfelu,
r_i – średnia stopa zwrotu i-tej akcji w portfelu.

Ryzyko portfela mierzone jest wariancją, określoną według następującego wzoru:

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{cov}(r_k, r_j) x_k x_j, \tag{2}$$

gdzie:

v_p – wariancja portfela,
v_i – wariancja stopy zwrotu i-tej akcji,
$\operatorname{cov}(r_k, r_j)$ – kowariancja pomiędzy stopami zwrotu poszczególnych akcji.

Jeżeli przez v^* i r^* oznaczymy akceptowalne poziomy ryzyka i stopy zwrotu z portfela, to powyższe problemy można zapisać następująco:

a) Maksymalizacja stopy zwrotu przy akceptowalnym poziomie ryzyka

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \to \max, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{cov}(r_k, r_j) x_k x_j \leqslant v^*, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{5}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

b) Minimalizacja ryzyka przy akceptowalnym poziomie stopy zwrotu

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{cov}(r_k, r_j) x_k x_j \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geqslant r^*, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

W niniejszym artykule proponuje się wprowadzenie dodatkowej grupy warunków określających maksymalny (ewentualnie minimalny) udział poszczególnych akcji w portfelu. Jeżeli przez A_i oznaczymy minimalny, a przez B_i oznaczymy maksymalny udział spółki w portfelu, to warunek można zapisać następująco:

$$A_i \leqslant x_i \leqslant B_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{11}$$

2. Opis rozważanych przypadków

Rozważano następujące przypadki:

- Minimalizacja wariancji przy ograniczeniu osiągnięcia określonej stopy zwrotu, bez jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń.

- Minimalizacja wariancji, przy ograniczeniu osiągnięcia określonej stopy zwrotu, z ograniczeniami na maksymalne udziały akcji w portfelu.
- Maksymalizacja stopy zwrotu, przy ograniczeniu na akceptowalny poziom ryzyka mierzony wariancją, bez jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń.
- Maksymalizacja stopy zwrotu, przy ograniczeniu na akceptowalny poziom ryzyka, mierzony wariancją oraz minimalne i maksymalne udziały akcji w portfelu.
- Minimalizacja wariancji przy ograniczeniu, że uzyskany portfel osiągnie w kolejnym okresie lepsze wyniki niż portfel zbudowany na bazie indeksów WIG, WIG20.

Analiza ta może stanowić wstęp do złożonego zagadnienia, polegającego na takim wyznaczeniu portfela o minimalnym ryzyku, o jakim wiemy, że w kolejnym okresie osiągnął lepsze wyniki niż WIG, WIG20 – na podstawie danych historycznych, a następnie próbie rekonstrukcji warunków (znalezieniu ukrytych zależności), w celu budowy modelu, który zapewni stopę zwrotu wyższą niż WIG, WIG20).

3. Materiał doświadczalny

Okresem, na podstawie którego określano parametry wejściowe (stopa zwrotu, wariancja, kowariancja), była druga połowa roku 1999. Stopy zwrotu liczono w okresach tygodniowych, wyznaczając je jako średni kurs w danym okresie, w stosunku do średniego kursu z poprzedniego okresu.

Założono, że utworzone portfele będą utrzymywane przez 12 miesięcy, a następnie dokonano porównania uzyskanych stóp zwrotu ze stopami zwrotu uzyskanymi w tym samym okresie, przez portfele rynkowe reprezentowane przez WIG oraz WIG20.

W przeprowadzanym eksperymencie wybrano spółki giełdowe, które dominowały w portfelach funduszy inwestycyjnych na koniec 1999 roku. Taki wybór zapewnia z dużym prawdopodobieństwem badanie spółek stabilnych fundamentalnie (poprzez pośrednie wykorzystanie pracy wykonanej przez analityków funduszy) i wyeliminowanie z eksperymentu spółek, które w okresie zbierania danych mogłyby mieć korzystne charakterystyki bez uzasadniających je podstaw fundamentalnych.

W doświadczeniu uczestniczyły następujące spółki: AGORA, AMICA, BIG, BRE, BSK, BUDIMEX, CERSANIT, COMPLAND, DĘBICA, ECHO, ELBUDOWA, ELEKTRIM, EXBUD, FARMACOL, HANDLO-

WY IMPEXMENT, JELFA, JUTRZENKA, KABLEHOLD, KETY, KGHM, KREDYT B, LENTEX, MOSTALGD, MOSTALWAR, MOSTALZAB, OKOCIM, OPTIMUS, ORBIS, ORFE, PBK, PEKAO, PGF, PKN, POLAR, POLFKUTNO, POLIFARBC, PROKOM, SOFTBANK, STOMIL, TPSA, WBK, ZYWIEC.

4. Wyniki obliczeń

- Minimalizacja wariancji przy ograniczeniu osiągnięcia określonej stopy procentowej, bez jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń.

Wariant A

Ze względu na to, że w drugiej połowie 1999 roku notowania większości spółek układały się w trendzie horyzontalnym, przyjęto, że stopa zwrotu musi być nieujemna.

Portfel minimalizujący ryzyko przy ograniczeniu na nieujemność stopy zwrotu zbudowany na tej podstawie dawał znacznie gorsze wyniki niż portfele zbudowane na bazie indeksów WIG, WIG20.

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	931 489,2	755 437,8
WIG20	1 755	2 030	1 817
Wartość	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
Wartość	1 000 000	1 086 214	986 009

Wyznaczony portfel składał się z:

- BIG 38%,
- HANDLOWY 44%,
- POLAR 18%.

Wariant B

W przypadku wprowadzenia ograniczenia na stopę zwrotu[1] z portfela na poziomie 0,02%, wyniki kształtowały się następująco:

[1] Stopę zwrotu portfela wyznaczono zgodnie ze wzorem (3). Stopę zwrotu poszczególnej akcji wyznaczono jako średnią arytmetyczną stóp zwrotu akcji w kolejnych okresach. Stopę zwrotu akcji w kolejnych okresach liczono jako średnią arytmetyczną wycenę akcji w okresie, w stosunku do średniej arytmetycznej wyceny akcji w okresie poprzednim. Za okres w niniejszym opracowaniu przyjęto jeden tydzień.

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	1 014 868	1 057 377
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

Portfel uzyskał grosze wyniki w pierwszym półroczu, lecz (co ciekawe!) lepsze wyniki od indeksów giełdowych w okresie całorocznym.
Skład portfela był następujący:

LENTEX 50%,
PKN 50%.

Duże udziały poszczególnych spółek w portfelach sugerują dużą przypadkowość otrzymywanych rozwiązań, a także małą realną dywersyfikację otrzymanego portfela.

Pomimo teoretycznie wyznaczonego (zgodnie z modelem Markowitza) minimalnego ryzyka sensowne wydaje się nałożenia dodatkowych ograniczeń na udział poszczególnych spółek w portfelu. Odzwierciedla to również ustawowe ograniczenia nakładane na fundusze inwestycyjne.

- Minimalizacja wariancji przy ograniczeniu osiągnięcia określonej stopy procentowej z ograniczeniami na maksymalne udziały akcji w portfelu.
Nałożono ograniczenie na nie większy niż 10% udział spółki w portfelu, przy nieujemnej stopie zwrotu całego portfela.
Wyznaczony portfel składał się ze spółek:
BIG, CERSANIT, HANDLOWY, IMPREXMENT, JUTRZENKA, ORBIS, PBK, PKN, POLAR, ŻYWIEC (każda ze spółek miała 10% udział w portfelu).

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	1 008 345	884 403,7
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

Tak skonstruowany portfel osiągnął gorsze wyniki niż portfele oparte na indeksach giełdowych.

- Maksymalizacja stopy zwrotu przy ograniczeniu na akceptowalny poziom ryzyka mierzony wariancją, bez jakichkolwiek dodatkowych ograniczeń.

Portfel maksymalizujący stopę zwrotu, przy ograniczeniu że wariancja portfela jest mniejsza od 0,001.

W przypadku maksymalizacji stopy zwrotu bez wprowadzenia żadnych dodatkowych ograniczeń model Markowitza sugeruje przeznaczenie 100% środków na zakup akcji PKN. Wynik ten ukazuje słabość modelu Markowitza, wykorzystywanego bez żadnych dodatkowych ograniczeń.

Jak można było przypuszczać, w ten sposób skonstruowany portfel osiąga znacznie gorsze wyniki niż portfel oparty na indeksach giełdowych.

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	833 333,3	892 857,1
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

- Maksymalizacja stopy zwrotu przy ograniczeniu na akceptowalny poziom ryzyka, mierzony wariancją oraz minimalne i maksymalne udziały poszczególnych akcji w portfelu.

Wariant A

Po wprowadzeniu ograniczenia na maksymalny udział akcji w portfelu (nie więcej niż 10%) portfel składa się ze spółek: AGORA, AMICA, BIG, BSK, CERSANIT, LENTEX, OPTIMUS, PKN, POLAR, POLFKUTNO. Każda spółka ma 10% udziałów.

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	1 271 369	1 024 521
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

Ten portfel osiągnął w pierwszej połowie roku dużo lepsze wyniki od WIG, WIG20, a w drugiej połowie roku nieznacznie lepsze wyniki od WIG i nieznacznie gorsze od WIG20.

Wariant B

W przypadku ograniczenia udziałów spółek do 7% wyniki były podobne:

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	1 225 777	1 015 889
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

Portfel zawierał spółki:

AGORA, AMICA, BIG, BSK, BUDIMEX, CERSANIT, IMPEXMENT, KETY, LENTEX, OPTIMUS, PEKAO, PKN, POLAR, POLIFARBC – 7%,

WBK – 2%.

5. Wnioski, dalsze możliwe obszary badawcze

Na podstawie powyższych wyników można zaryzykować[2] hipotezę, że efektywność portfela, zbudowanego za pomocą modelu Markowitza zależy w dużym stopniu od wprowadzenia dodatkowych warunków na wielkość udziałów poszczególnych akcji w portfelu[3]. W związku z tym można sformułować inny problem, polegający na wyznaczeniu portfela, który minimalizując ryzyko mierzone wariancją, w kolejnych okresach osiąga wyniki lepsze na przykład o 10%, niż wyniki indeksów giełdowego. Analizując skład takiego portfela można wówczas wykorzystując techniki eksploracji danych, spróbować zrekonstruować warunki, jakie taki portfel

[2] Powyższe obliczenia zostały wykonane za pomocą arkusza kalkulacyjnego Excel. Obliczenia te należałoby powtórzyć na innych, bardziej profesjonalnych narzędziach.

[3] Kolejnym krokiem może być wprowadzenie warunków ograniczających na sumaryczną wielkość udziału spółek, pochodzących z tej samej grupy kapitałowej.

spełnia. Jednak taka analiza znacznie przekracza ramy niniejszego opracowania. Poniżej zostanie przedstawiony prosty przykład, który może stanowić inspirację do dalszych badań w tym zakresie.

Formalnie rzecz ujmując, problem sprowadza się do zbudowania portfela, który, minimalizując ryzyko na podstawie parametrów wejściowych z okresu t, będzie osiągał wyniki lepsze od indeksów na przykład WIG, WIG20 w okresie $t+1$. Takie portfele należy wyznaczyć dla danych historycznych, dla których znana jest efektywność inwestycji w kolejnym okresie.

Następnie analizując prawidłowości, występujące w takich portfelach w różnych okresach, zrekonstruować warunki, których wprowadzenie – statystycznie rzecz ujmując – powinno zapewnić stopę zwrotu lepszą niż portfela zbudowanego na bazie indeksów giełdowych.

Przykład

Tworzymy portfel, który minimalizując ryzyko, osiągnął o 10% stopę zwrotu wyższą niż portfel giełdowy.
Nałożono ograniczenie na nie więcej niż 7% udziału spółki w portfelu.
Wyniki portfela:

	2000		
	1 stycznia	30 czerwca	31 grudnia
Portfel	1 000 000	1 311 754	1 138 860
WIG20	1 755	2 030	1 817
	1 000 000	1 156 695	1 035 328
WIG	18 083	19 642	17 830
	1 000 000	1 086 214	986 009

Otrzymano następujący skład portfela:

AGORA, BIG, CERSANIT, COMPLAND, ECHO, EXBUD, HANDLOWY, IMPEXMENT, KGHM, OPTIMUS, PBK, PEKAO, PKN, POLAR – 7%,

ORBIS – 2%.

Otwartym obszarem badawczym pozostaje więc problem analizy portfeli uzyskanych analogicznie do powyższego, wykrycie występujących pomiędzy spółkami zależności oraz próba zapisania tych zależności w postaci równań matematycznych.

Literatura

[1] Głowacki G., *Zastosowanie technologii Hurtowni Danych do badania powiązań kapitałowych, struktur akcjonariatu oraz zmian cen akcji na giełdzie papierów wartościowych*, Materiały z konferencji „Modelowanie preferencji a ryzyko".
[2] Haugen R. A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, Wig-Press, Warszawa 1996.
[3] Jurczyk P., *Próba konstrukcji efektywnego portfela akcji przedsiębiorstw notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie*, praca magisterska, Toruń 1999.
[4] Tarczyński, *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, Placet, Warszawa 1997.