Edmund Ignasiak

MODEL DYNAMIKI UKŁADU GOSPODARCZEGO

1. Wstęp

Celem artykułu jest zaprezentowanie modelu zawierającego związki pomiędzy wolumenem dochodu narodowego a wydatkami i inwestycjami indywidualnymi. Użyte pojęcie układu gospodarczego rozumiemy jako gospodarkę narodową lub wyodrębniony układ regionalny, w którym dochód narodowy (a dokładniej PKB) ma uzasadniony sens obliczeniowy. Najpierw przedstawiono prosty model wzrostu, który sprowadza się do układu równań różnicowych. Przedstawia się też dyskusję rozwiązań, tj. pierwiastków charakterystycznych określających wzrost, spadek lub wahania wzrostu gospodarczego.

W drugiej części przedmiotem rozważań jest ten sam model w ujęciu dyskretnego programowania dynamicznego. Prowadzi to do sformułowania modelu stabilizacji przy kryterium max(min), gdzie sterami są wydatki państwa.

2. Dyskretny model wzrostu układu gospodarczego

Rozważać będziemy układ gospodarczy opisany prostym modelem

$$Y_t = C_t + J_t + W_t. \tag{1}$$

Poszczególne zmienne modelu oznaczają:
Y_t – wolumen dochodu narodowego w roku t,
C_t – wydatki indywidualnych konsumentów w roku t,
W_t – wydatki państwa,
J_t – stymulowane inwestycje prywatne (pobudzone).

Jak wiadomo, wydatki indywidualnych konsumentów w roku t zależą od dochodu narodowego w roku $t-1$.

Zatem mamy:

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \tag{2}$$

gdzie współczynnik α nazywamy krańcową skłonnością do konsumpcji.
Dalej można zauważyć, że inwestycje prywatne w roku t są uzależnione od różnic pomiędzy wydatkami w roku t a wydatkami w roku poprzednim. Podstawiając do (2) otrzymamy:

$$J_t = \beta (C_t - C_{t-1}) = \alpha \beta (Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{3}$$

Parametr strukturalny β posiada interpretację ekonomiczną. Jest on współczynnikiem dynamicznego przyrostu konsumpcji indywidualnej.
Wobec tego model dochodu narodowego w roku t przyjmie postać:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \alpha \beta (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + W_t. \tag{4}$$

Jak widać, (4) to równanie różnicowe drugiego stopnia względem Y_t i należy je rozwiązać.
Można to uczynić w następujący sposób [5].
Rozpatrujemy jednorodne równanie przy $W_t = 0$.
Wówczas równanie (4) zapiszemy w postaci:

$$Y_t - \alpha (1-\beta) Y_{t-1} + \alpha \beta Y_{t-2} = 0. \tag{5}$$

Przypuśćmy, że rozwiązaniem (5) jest funkcja

$$Y = m^t.$$

Konstruujemy równanie charakterystyczne [5]

$$m^2 - \alpha (1+\beta) m + \alpha \beta = 0,$$
$$\Delta = \alpha^2 (1+\beta)^2 - 4\alpha \beta.$$

wówczas otrzymamy (6)

Można sprawdzić, że pierwiastki m_1 i m_2 wynoszą:

$$m_1 = \frac{\alpha(1+\beta) - \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2},$$
$$m_2 = \frac{\alpha(1+\beta) + \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

Przy okazji warto zauważyć, że równanie (6) nie posiada równych pierwiastków, tj. $m_1 \neq m_2$.
Zatem rozwiązaniem równania różnicowego jest:

$$Y_t = A_1 m_1^t + A_2 m_2^t, \tag{7}$$

gdzie A_1, A_2 to dowolne stałe.

Dalej rozważmy przypadek, gdy $W_t \neq 0$, np. $W_t = 1$, co oznacza, że mamy do czynienia z równaniem niejednorodnym [5].

$$Y_t - \alpha(1+\beta)Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} - 1 = 0. \tag{8}$$

Przy tych założeniach cząstkowym rozwiązaniem będzie $Y_t = \frac{1}{(1-\alpha)}$, zaś całkowite rozwiązanie przy stałych wydatkach państwa ma postać:

$$Y_t = A_1 m_1^t + A_2 m_2^t + \frac{1}{(1-\alpha)}. \tag{9}$$

Wielkości A_1 i A_2 można tak wybrać, aby rozwiązanie odpowiadało wielkości Y_t dla pierwszych dwóch lat.

Równocześnie dalej zakładać będziemy, że $m_1 \neq m_2$.

Nasuwa się pytanie, jak można interpretować zachowanie się pierwiastków charakterystycznych m_1 i m_2.

Można powiedzieć tak:
Jeżeli $|m_1| < 1$ oraz $|m_2| < 1$, to przy rosnącym t wartości m_1^t i m_2^t będą dążyły do zera i dochód będzie zbliżał się do $\frac{1}{(1-\alpha)}$ wielkości wydatków państwa.

W przypadku gdy $|m_1| < 1$ lub $|m_2| < 1$, to dochód będzie się szybko zmieniał.

Jeżeli natomiast m_1 i m_2 będą liczbami zespolonymi, to moduł ich będzie równy jeden i dochód narodowy będzie wahał się wokół swojej średniej wartości.

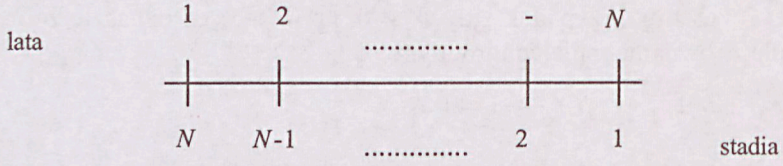
W zależności od przyjętych założeń pierwiastki będą różnie opisywały wzrost lub spadek dochodu narodowego. Sytuacja taka nie daje odpowiedzi, w jaki sposób można sterować wydatkami państwa, aby realizować odpowiednią strategię gospodarczą. Do tego pytania wrócimy w dalszej części artykułu.

3. Zagadnienie stabilizacji układu

W nieco uproszczony sposób problem sprowadza się do odpowiedzi na pytanie, jak w kolejnych okresach wybrać wielkość wydatków państwa W_t tak, ażeby w danym punkcie czasowym dochód był możliwie maksymalny (w sensie optymalizacji warunkowej) lub osiągnął zadaną wielkość.

Rozważmy pewien wariant stabilizacji określony jako maksymalizację minimalnego dochodu w ciągu kolejnych N-lat. Zadanie to podpada pod schemat modelu programowania dynamicznego, który pragniemy przedstawić.

W tym celu przyjmiemy końcowy rok N-ty wyborów za pierwsze stadium decyzji, a pierwszy rok za N-te stadium. Zabieg ten ilustruje rysunek.



Oznaczając przez Y_n dochód w roku n-tym, a przez W_n wydatki państwa w tymże roku, równanie dochodu zapisujemy:

$$Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha \beta (Y_{n+1} - Y_{n-2}) + W_n . \tag{10}$$

Stan układu winien być określony przez wielkość dochodu dla dwóch sąsiadujących lat, a w ten sposób przez wzrost lub spadek za rok poprzedzający.
Niech

$$Z_n = Y_n - Y_{n+1} .$$

Wówczas

$$Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + W_n , \tag{11}$$

wobec tego

$$Z_n = (\alpha - 1) Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + W_n .$$

Na sumę wydatków państwa $\sum_{n=1}^{N} W_n$ nałożymy ograniczenie. Zatem wartości zmiennej W_n należy ograniczyć. Są to wielkości środków, które pozostały na przyszłe wydatki.

Zatem:

$$H_n = \sum_{r=1}^{n-1} W_r = W - \sum_{r=n}^{N} W_r , \tag{12}$$

przy czym W jest stałą (ściśle określoną).

W ten sposób zmienną H_n można przedstawić w formie przekształconej:

$$H_n = H_{n+1} - W_n . \tag{13}$$

To zaś pozwala na sformułowanie modelu w formie standardowej o postaci:

- związki rekurencyjne układu:

$$\begin{aligned} Y_n &= \beta Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + W_n, \\ Z_n &= (\alpha - 1) Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + W_n, \\ H_n &= H_{n+1} - W_n; \end{aligned} \tag{14}$$

- ograniczenia:

$$0 \le W_n \le H_{n+1} \le W;$$

- parametry:

$$\alpha, \beta;$$

- zmienne fazowe:

$$Y_n, Z_n, H_n;$$

- funkcje kryterium:

maksymalizować min $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Zgodnie z postępowaniem, które stosuje się w programowaniu dynamicznym, mamy równanie funkcyjne:

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}, H_{N+1}) = \max[\min(Y_1, \ldots, Y_n)],$$

gdzie maksymalizacja sprowadza się do wyboru $W_1, \ldots, W_n$ (wydatków państwa).

Stosując zasadę optymalności Bellmana [2] można wybrać tak, ażeby maksymalizować mniejszą z dwóch wielkości Y_n oraz

$$\min \{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}.$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie funkcyjne:

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}, H_{N+1}) = \max[\min\{Y_N, f_{N+1}(Y_N, Z_N, H_N)\}], \tag{15}$$

gdzie maksymalizacja realizuje się drogą wyboru wielkości wydatków państwa, tj $W_1, W_2, \ldots, W_n$, a wielkości z prawej strony równania wynikają z równań (10), (11), (12), tj. określających związki pomiędzy Y_n, Z_n oraz H_n.

Postępowanie takie pozwala na uzyskanie takiego rozkładu w czasie wydatków państwa, które umożliwiają zadany wzrost gospodarczy, a także uniknięcie katastrofy poprzez maksymalizację minimalnego dochodu.

Zakończenie

W rezultacie zabiegu, jakim było przekształcenie modelu różnicowego w model optymalizacji wielostadialnej, udało się potraktować wydatki państwa jako wyraźne zmienne sterowania włączone do warunków ograniczających. W ten sposób model reprezentuje pewną grę pomiędzy ograniczeniami odpowiadającymi możliwościom układu w czasie a przyszłymi wydatkami, które są funkcją dochodu. Podejście takie umożliwia badanie wrażliwości wartości wydatków na poszczególne zmienne fazowe dla każdego etapu. Słabszą stroną takiego rozwiązania są zapewne duże rozmiary w sensie obliczeniowym. Algorytmy programowania dynamicznego umożliwiają pewne uproszczenia, a co za tym idzie, redukcję wymiarów zadań etapowych.

Literatura

[1] Allen R. D., *Teoria makroekonomiczna*, PWN, Warszawa 1974.
[2] Aris R., *Discrete Dynamic Programming*, DB, New York 1969.
[3] Gomułka S., *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, C A S-E, Fundacja Naukowa, Warszawa 2000.
[4] Siedlecki J., *Równowaga a wzrost gospodarczy*, PWN, Warszawa – Wrocław 2000.
[5] Koźniewska J., *Równania rekurencyjne*, PWN, Warszawa 1972.
[6] Tinbergen J., *Development Planning*, Mc Graw-Hill Book Company 1977.