Anna Domagała

POSTULAT HOMOGENICZNOŚCI JEDNOSTEK DECYZYJNYCH W METODZIE DEA. SUGESTIE TEORETYCZNE A WYNIKI SYMULACJI EMPIRYCZNYCH

Metoda Data Envelopment Analysis[1] (DEA) to oparta na programowaniu liniowym metoda badania względnej efektywności jednostek decyzyjnych, tzw. DMU (ang. *Decision Making Unit*). Została opracowana przez trzech naukowców amerykańskich A. Charnesa, W.W. Coopera i E. Rhodesa, jako rozwinięcie badań M.J. Farrella. Po raz pierwszy została zaprezentowana na łamach czasopisma „The European Journal of Operational Research" w 1978 roku [3]. W Polsce metoda DEA nadal jest mało popularna, ale powoli zaczyna zdobywać zwolenników (patrz, m.in. w [6], [7], [9], [10]).

W artykule przybliżono ideę metody DEA, przedstawiono jej podstawowy model oraz zaprezentowano dyskusję jednego z założeń metody DEA – o homogeniczności badanej grupy jednostek.

Pojęcie efektywności

Metodologia DEA opiera się na tzw. efektywności technicznej zdefiniowanej przez M.J. Farrella. Przez efektywność rozumie on stosunek wytwarzanego efektu do nakładu, który wykorzystuje analizowana jednostka w celu wytworzenia tego efektu (efekt/nakład) [5].

Przymiotnik „techniczna" pochodzi z literatury i używany jest w celu odróżnienia technologicznych aspektów produkcji od innych, zwanych ogólnie „ekonomicznymi" ([4], s. 11–12). Badanie efektywności technicznej odnosi się

[1] W Polsce autorzy publikacji na temat metody DEA proponują tłumaczenie: analiza obwiedni danych.

zatem jedynie do poszukiwania możliwości redukcji nadmiarowych nakładów (bądź zwiększenia zbyt niskich efektów) bez pogarszania pozostałych nakładów i/lub efektów[2].

Efektywność zdefiniowaną przez M.J. Farrella rozumie się dwojako: jako efektywność zorientowaną na efekty albo na nakłady. Farrell zaproponował koncepcję tzw. best practice frontier, czyli granicy efektywności. Jest to technologiczna granica, która obejmuje[3] tzw. zbiór możliwości produkcyjnych (ang. Production Possibility Set) badanych jednostek. Dzięki temu możliwe staje się określenie maksymalnego poziomu efektów, możliwego do osiągnięcia przy danych nakładach (w przypadku orientacji na efekty) albo minimalnego zapotrzebowania na nakłady, przy założeniu stałych efektów (orientacja na nakłady).

Z uwagi na powyższe, każda analiza efektywności powinna zaczynać się od zdefiniowania zbioru możliwości produkcyjnych danej grupy jednostek. Zbiór ten (zwany także technologią produkcji) to przestrzeń, która obejmuje wszystkie możliwe kombinacje nakładów i efektów. Niech będzie dany zbiór n jednostek decyzyjnych, które z m nakładów wytwarzają s efektów. Dla każdej j-tej jednostki wektor nakładów oznaczamy jako:

$$x_j = (x_{1j}, ..., x_{ij}, ..., x_{mj}), \text{ dla } (j = 1, ..., n),$$

a wektor efektów jako:

$$y_j = (y_{1j}, ..., y_{rj}, ..., x_{sj}), \text{ dla } (j = 1, ..., n).$$

Zakłada się, że wszystkie nakłady i efekty przyjmują wartości półdodatnie, a więc nieujemne, ale przynajmniej jeden element wektora nakładów i jeden wektora efektów musi być dodatni. Matematycznie oznacza się to następująco:

$$x_j \geq 0, x_j \neq 0 \text{ oraz } y_j \geq 0, y_j \neq 0 \text{ dla } (j = 1, ..., n).$$

Zatem przyjmuje się, że każda jednostka decyzyjna wykorzystuje przynajmniej jeden nakład i wytwarza przynajmniej jeden efekt.

Symbol X oznacza macierz zawierająca n wektorów nakładów X_j, a Y to macierz n wektorów efektów Y_j.

---

[2] „Pogarszanie" oznacza zwiększenie nakładów (bez równoczesnego zwiększenia efektów) lub redukcję efektów (bez zmniejszenia poziomu nakładów).

[3] Stąd pochodzi nazwa metody Data Envelopment Analysis, gdyż w jęz. angielskim czasownik „to envelop" oznacza właśnie obejmować, okrywać, ogarniać.

Technologię produkcji definiuje się jako ([4], s. 42):

$$P = \{(X,Y) \mid X \geq X\lambda, Y \leq Y\lambda, \lambda \geq 0\}. \quad (1)$$

Zbiór możliwości produkcyjnych P to taka para macierzy nakładów X wszystkich analizowanych jednostek i macierzy efektów Y tych jednostek, że X jest nie mniejsze niż ważona suma wektorów X_j nakładów poszczególnych n badanych jednostek (która oznacza minimalne nakłady niezbędne do wytworzenia efektów Y) oraz że Y jest nie większe niż ważona suma wektorów Y_j efektów poszczególnych n jednostek (która oznacza maksymalne efekty możliwe do wytworzenia przy wykorzystaniu nakładów X). Wagi λ_j są nieujemne, co oznacza, iż wektor nakładów (lub efektów) danej jednostki występuje ($\lambda_j > 0$) bądź nie występuje ($\lambda_j = 0$). Tak zdefiniowana technologia produkcji podlega, oczywiście, pewnym założeniom, jednak nie będą one tutaj omawiane[4].

Jednostki, które znajdują się na granicy efektywności to jednostki, dla których wagi λ_j są najkorzystniejsze. Przykładowo, gdy mamy do czynienia z efektywnością zorientowaną na nakłady, wagi te będą miały najmniejsze możliwe wartości. Tym samym wielkości nakładów takich jednostek zostaną proporcjonalnie zredukowane do minimum, ale poziom efektów pozostanie niezmieniony, a jednostki te nadal będą działać w ramach tej samej technologii produkcji.

Kolejnym kluczowym pojęciem, które wymaga zdefiniowania przed przejściem do rozważań o metodzie DEA, jest „efektywność względna". Oznacza ona stosunek efektywności technicznej analizowanej jednostki do efektywności technicznej jednostki najlepszej – tzw. wzorcowej – a więc takiej, która wśród wszystkich badanych jednostek reprezentuje najwyższą wartość ilorazu efekt/nakład. Sposób wyznaczania efektywności względnej prezentuje przykład 1.

Przykład 1.

Postanowiono zbadać względną efektywność (zorientowaną na nakłady) czterech banków podobnej wielkości, działających w tej samej branży[5]. Każda jednostka opisana jest przez dwie zmienne: liczbę transakcji detalicznych dokonanych w danym banku w pewnym roku (efekt – E) oraz liczbę pracowników danego banku w tym samym roku (nakład – N). Dane przedstawia tabela 1.

[4] Pojęcie technologii produkcji i postulaty, które musi ona spełniać omówione są w [1], [4] lub innych pozycjach literatury dotyczącej metody DEA.

[5] Przykład zaczerpnięty (a następnie rozszerzony) z witryny internetowej Johna E. Beasleya, poświęconej metodzie DEA – patrz: [13]

Tabela 1. Dane dotyczące nakładu i efektu czterech banków

Bank	Transakcje detaliczne (w tys.) (E)	Liczba pracowników (N)	Efekt/Nakład
A	125	18	**6,94**
B	44	16	2,75
C	80	17	4,71
D	23	11	2,09

Źródło: [13].

Łatwo zauważyć, że najbardziej efektywną jednostką jest bank A. W celu wyznaczenia efektywności względnej, należy zestawić obiekt A kolejno z każdym z pozostałych obiektów:

Tabela 2. Względna efektywność

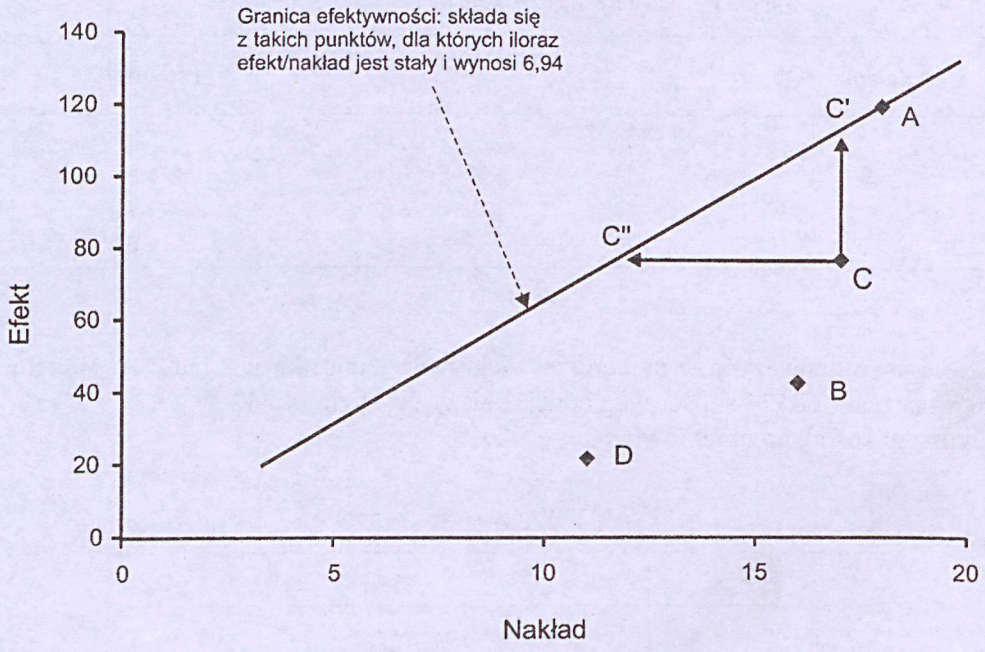
Bank	Względna efektywność
A	$\frac{6,94}{6,94} \times 100\% = 100\%$
B	$\frac{2,75}{6,94} \times 100\% = 40\%$
C	$\frac{4,71}{6,94} \times 100\% = 68\%$
D	$\frac{2,09}{6,94} \times 100\% = 30\%$

Źródło: [13].

Jednostka A jest obiektem efektywnym i wzorcem dla pozostałych jednostek. Na rysunku 1 strzałki wskazują redukcję nakładów lub zwiększenie poziomu efektów, jakich powinna dokonać nieefektywna jednostka C, aby stać się efektywną (przy rozpatrywaniu odpowiednio efektywności zorientowanej na nakłady lub na efekty).

Jeżeli jednostka C zmieni swoje nakłady (efekty) w sposób pokazany na rysunku, to obliczony dla niej iloraz efekt/nakład wyniesie 6,94, a więc uzyska ona efektywność równą 1 (lub 100%) i tym samym znajdzie się na granicy efektywności[6].

[6] Więcej o granicy efektywności w następnym paragrafie.



Rysunek. 1. Efektywność jednostek decyzyjnych, granica efektywności

Źródło: Opracowanie własne

Granica efektywności wyznacza więc zbiór możliwości produkcyjnych, który znajduje się na rysunku 1. Należą do niego wszystkie analizowane jednostki decyzyjne, a także inne, potencjalnie możliwe kombinacje nakładu i efektu[7].

W powyższy sposób można analizować obiekty jednonakładowe i jednoefektowe. Wraz ze zwiększaniem liczby zmiennych opisujących daną jednostkę decyzyjną, analiza efektywności komplikuje się, co obrazuje przykład 2.

Przykład 2.

Badane w przykładzie 1. banki opisują teraz trzy zmienne:

E_1 – liczba transakcji detalicznych (zawartych z klientami indywidualnymi),

E_2 – liczba transakcji biznesowych (zawartych z klientami, którymi są jednostki gospodarcze inne, niż osoby fizyczne),

N – liczba pracowników.

[7] Zbiór możliwości produkcyjnych został zdefiniowany w rozdziale pt. *Pojęcie efektywności.*

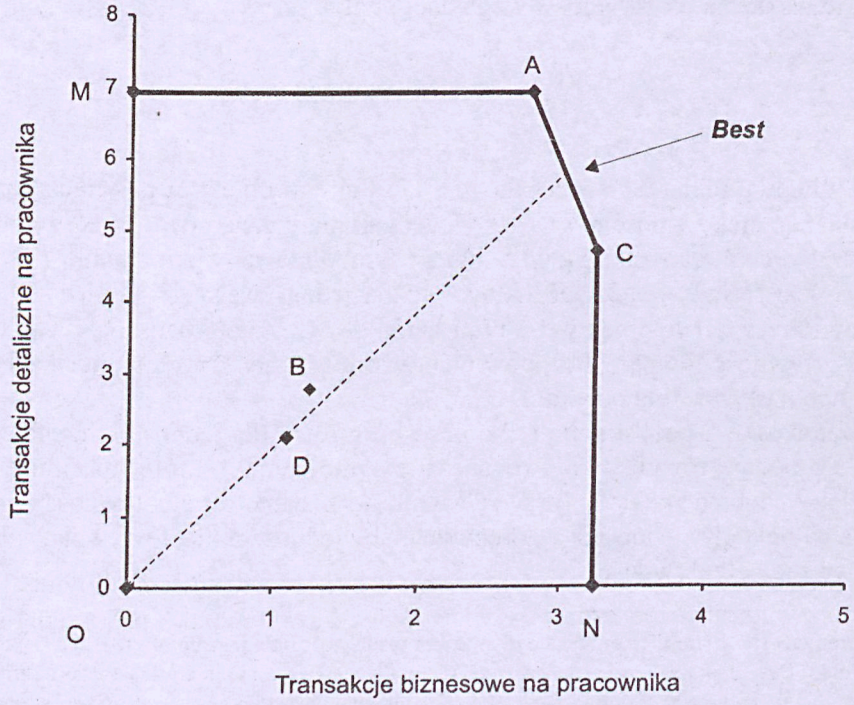
Tabela 3. Wskaźniki transakcji detalicznych i biznesowych

Bank	Transakcje detaliczne na jednego pracownika (E1/N)	Transakcje biznesowe na jednego pracownika (E2/N)
A	**6,94**	2,78
B	2,75	1,25
C	4,71	**3,24**
D	2,09	1,09

Źródło: [13].

Jak widać, bank A osiągnął najwyższy wskaźnik transakcji detalicznych na jednego pracownika, a bank C – najwyższy wskaźnik transakcji biznesowych na jednego pracownika. Można zatem stwierdzić, że banki B i D są relatywnie mniej efektywne w przekształcaniu nakładu w efekty, niż banki A i C.

Problem ustalania efektywności względnej można tu łatwo rozwiązać, przedstawiając analizowane jednostki na odpowiednim wykresie.



Rysunek 2. „Best" – wirtualny wzorzec dla banku D

Źródło: [13]

Banki A i C to jednostki wzorcowe, z uwagi na to, że jednostka A uzyskała najwyższą wartość ilorazu E_1/N, a jednostka C najwyższą wartość E_2/N.

Jeżeli połączyć punkty A i C, a także poziomym odcinkiem punkt A z osią rzędnych i pionowym odcinkiem punkt C z osią odciętych, to powstanie pewna łamana, którą w terminologii DEA (za Farrellem) nazywa się granicą efektywności[8]. Jednostki znajdujące się na tej granicy są efektywne w sensie DEA (uzyskują wartość wskaźnika efektywności względnej równą 100%).

W analizie DEA granica efektywności nazywa się w języku angielskim best practice frontier, gdyż jednostki na niej leżące stosują tzw. najlepszą praktykę, a więc w najlepszy sposób przekształcają nakłady w efekty.

Obiekty B i D są nieefektywne, ponieważ leżą poniżej granicy efektywności. W celu określenia rozmiaru ich nieefektywności, należy wyznaczyć ich odległość od granicy efektywności.

W przykładzie, aby wyznaczyć wartość wskaźnika względnej efektywności banku D, trzeba poprowadzić prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych oraz przez punkt *D*. Prosta ta przecina granicę efektywności w punkcie oznaczonym na wykresie jako *Best*[9]. Następnie należy wyznaczyć odległość punktu D oraz punktu *Best* od początku układu współrzędnych. Iloraz tych odległości, to wskaźnik efektywności względnej punktu *D*:

$$\frac{d(O,D)}{d(O,Best)} \times 100\% \approx 36\%.$$

Wzorcowy punkt *Best* jest punktem, do którego obiekt D powinien dążyć, aby osiągnąć efektywność równą 100%. Jednak nie można powiedzieć, że punkt ten jest wzorcem dla banku D, gdyż obiekt symbolizowany przez punkt *Best* nie istnieje. Jest to tzw. obiekt wirtualny. Można jednak wskazać najbliższe temu punktowi rzeczywiste obiekty. Są nimi banki A i C. Zatem bank D, chcąc uzyskać efektywność równą 100%, powinien wzorować się na tych jednostkach. Są one benchmarkami[10] dla obiektu D.

Metoda DEA pozwala nie tylko określić wzorce dla jednostek nieefektywnych, ale podaje również wagi (oznaczane symbolem λ), które informują, jak należałoby „dobrać" nakłady (przy założeniu, że badana jest efektywność zorientowana na nakłady) jednostek wzorcowych, aby jednostka nieefektywna znalazła się na granicy efektywności.

---

[8] Granica efektywności znajduje się również na rysunku 1 (linia pogrubiona).

[9] Punkt *Best* charakteryzuje się tym, że dla banku D poziom efektów jest taki sam (jak w punkcie D na wykresie), natomiast zredukowany jest poziom wykorzystywanego przez ten bank nakładu.

[10] Benchmarking to w skrócie poszukiwanie wzorcowych sposobów postępowania przez uczenie się od innych i wykorzystywanie ich doświadczenia – patrz: [12], s. 36.

Podstawowy model DEA – model CCR zorientowany na nakłady

W przypadku prostych analiz ustalenie wskaźnika efektywności nie stanowi większego problemu, co zaprezentowano w przykładach powyżej. Gdy jednak obiekty opisywane są przez więcej niż trzy zmienne, ustalenie wskaźnika efektywności (i wyznaczenie wag λ, umożliwiających benchmarking) nie jest już takie oczywiste.

Twórcy metody DEA, opierając się na badaniach Farrella, stworzyli model pozwalający na badanie efektywności teoretycznie dla dowolnie dużej liczby zmiennych opisujących obiekty.

Model CCR

Modeli DEA w literaturze jest obecnie bardzo dużo[11]. Wszystkie one powstały jako modyfikacje podstawowego modelu CCR (skrót od nazwisk autorów metody). Stąd też poniżej przedstawiony zostanie jedynie model podstawowy (zorientowany na nakłady). W modelu tym występuje wiele nakładów oraz wiele efektów. Model CCR jest zagadnieniem programowania nieliniowego (ułamkowego), sprowadzalnym do zadania liniowego.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

n – liczba jednostek decyzyjnych;
s – liczba efektów wytwarzanych przez każdą z badanych jednostek;
m – liczba nakładów wykorzystywanych przez jednostki;
$u_r \ (r = 1, 2, ..., s)$ – zmienna decyzyjna; waga związana z r-tym efektem;
$v_i \ (i = 1, 2, ..., m)$ – zmienna decyzyjna; waga związana z i-tym nakładem;
„o"– indeks oznaczający badaną w danym momencie jednostkę decyzyjną;
θ – wskaźnik efektywności.

Model CCR dla badanej jednostki oznaczonej indeksem „o" formułuje się następująco ([3], s. 431):

$$\max \theta = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}, \tag{2}$$

[11] Wykaz przykładowych modeli: patrz [14] – strona internetowa: http://www.deazone.com/models/index.htm.

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad (j = 1, ..., n), \\ &v_i \ge 0 \quad (i = 1, ..., m), \\ &u_r \ge 0 \quad (r = 1, ..., s). \end{aligned} \tag{3}$$

W powyższym modelu x_{ij} oznacza wielkość i-tego nakładu j-tej jednostki decyzyjnej, natomiast y_{rj} oznacza wielkość r-tego efektu j-tej jednostki.

Zmienne decyzyjne v_i oraz u_r to wagi związane odpowiednio z i-tym nakładem i r-tym efektem. Optymalne wartości tych zmiennych pokazują „ważność" danych nakładów i efektów, a więc informują o tym, jak silny wpływ ma dany nakład lub dany efekt na wielkość wskaźnika efektywności DEA danej jednostki, co w praktyce jest dla analityka bardzo istotną informacją.

Rozwiązanie powyższego zadania polega na znalezieniu takich wag v_i oraz u_r, dla których iloraz ważonych efektów przez ważone nakłady (a więc wskaźnik efektywności oznaczany symbolem θ) będzie największy. Nałożone warunki ograniczające uniemożliwiają wyznaczenie dla któregokolwiek obiektu wskaźnika efektywności względnej większego od 1 (lub inaczej 100%) oraz zapewniają, że wagi v_i oraz u_r są dodatnie[12].

W celu określenia poziomu efektywności wszystkich analizowanych jednostek, należy rozwiązać n zadań, a więc tyle, ile jest badanych obiektów. Zmieniać się będzie postać funkcji celu (za każdym razem będzie ona dotyczyć innego obiektu). Warunki ograniczające są dla wszystkich zadań takie same. Indeks „o" wskazuje badaną w danym momencie jednostkę. Indeks „j" natomiast obejmuje wszystkie n jednostek ($j = 1, \ldots, n$) – łącznie z jednostką badaną w tym momencie (oznaczaną w funkcji celu indeksem „o").

Jak już wspomniano, powyższe zadanie programowania nieliniowego jest rozszerzonym zagadnieniem programowania ułamkowego (ang. fractional programming) i można przekształcić je do postaci liniowej. Metodę takiej transformacji zaproponowali A. Charnes i W.W. Cooper[13].

---

[12] Powyższy model zakłada, że wagi v_i oraz u_r są nieujemne, ale aby pozostałe warunki mogły być spełnione, wartości wag muszą być dodatnie. Zostanie to uwzględnione w zlinearyzowanej postaci modelu CCR, który w praktyce rozwiązuje się zamiast zagadnienia nieliniowego.

[13] Transformacja Charnesa-Coopera została opisana, m.in. w [8].

Poniżej przedstawiona zostanie przekształcona, ostateczna postać podstawowego modelu liniowego (w formie pierwotnej i dualnej). Postać pierwotna liniowego modelu CCR zorientowanego na nakłady dla analizowanego obiektu „*o*" jest następująca[14]:

$$\max \theta = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} , \tag{4}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1, \\ &\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \quad (j = 1, ..., n), \\ &v_i, \mu_r \ge \varepsilon > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

x_{ij} – i-ty nakład j-tej jednostki (wielkość dana),
y_{rj} – r-ty efekt j-tej jednostki (wielkość dana),
μ_r – waga przy r-tym efekcie, jest przekształceniem wagi u_r, występującej w modelu nieliniowym,
v_i – waga przy i-tym nakładzie, jest przekształceniem wagi v_i, występującej w modelu nieliniowym[15].

Postać dualna modelu CCR zorientowanego na nakłady przedstawia się następująco[16]:

$$\min \left\{ \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \right) \right\}, \tag{6}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\theta x_{io} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j + s_i^- , \quad i = 1, ..., m, \\ &y_{ro} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ , \quad r = 1, ..., s, \\ &\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \ge 0 , \quad \forall j, i, r, \end{aligned} \tag{7}$$

[14] Patrz: [4], s. 73–74.
[15] Całość przekształceń związanych z transformacją Charnesa-Coopera – patrz: [4].
[16] Model dualny w metodologii DEA [4].

gdzie:

θ – wskaźnik efektywności,

λ_j – zmienna decyzyjna; waga związana z nakładami i efektami,

s_r^+ – zmienna decyzyjna (zwana „luzem") związana z r-tym efektem,

s_i^- – zmienna decyzyjna (zwana „luzem") związana z i-tym nakładem,

ε – stała; jest to pewna nieokreślona co do wartości liczba dodatnia i mniejsza niż jakakolwiek dodatnia liczba rzeczywista, taka że jeśli pomnożyć ją przez dowolnie dużą (określoną co do wartości) dodatnią liczbę k, to otrzymany iloczyn $k\varepsilon$ będzie nadal pewną nieokreśloną co do wartości liczbą dodatnią, mniejszą niż jakakolwiek dodatnia liczba rzeczywista.

Po rozwiązaniu zadania dla obiektu „o" uzyskuje się n wag λ_j ($j = 1, \ldots, n$), ponieważ każdy obiekt uzyska swoją wagę λ_j. Analizując rozwiązanie, zwraca się uwagę na wartości wag λ_j. Jeżeli są one różne od zera – obiekty z nimi związane są wzorcami dla badanego obiektu „o". Wagi (λ_j) dla tych wzorcowych obiektów informują, w jakich proporcjach należy „dobrać" ich nakłady, aby badany obiekt „o" uzyskał efektywność równą 1.

Oczywiście rozwiązanie następnych zadań (gdy inne obiekty kolejno stają się obiektem „o") prowadzi do wyznaczenia innych zestawów wag λ_j, które posłużą do analizy tych obiektów.

Jak widać, w modelu uwzględnione zostały luzy. W terminologii badań operacyjnych zmienne te nazywa się zmiennymi swobodnymi. Przyjmują one wartości nieujemne. Są to zmienne, których dodatnie wartości wskazują, że możliwa jest zmiana wartości nakładów i/lub efektów bez zmiany rozwiązania zadania. Uwzględnienie tych zmiennych w modelu jest więc niezwykle istotne, gdyż niezerowe wartości luzów są także źródłem nieefektywności technicznej jednostki. W literaturze dzieli się nieefektywność techniczną na tzw. czystą nieefektywność techniczną (ang. purely technical inefficiency) oraz tzw. mix-nieefektywność (nieefektywność mieszaną) (ang. mix inefficiency). Podział ten wyjaśniają różne sposoby usuwania tych nieefektywności.

W przypadku czystej nieefektywności technicznej usuwanie jej polega na proporcjonalnym zmniejszeniu wszystkich nakładów (lub zwiększeniu wszystkich efektów). Pozbywanie się nieefektywności mieszanej polega natomiast na doprowadzeniu do wyzerowania wszystkich luzów.

Warto również dodać, iż twórcy metody DEA zalecają, aby rozpoczynać rozwiązywanie modelu CCR od jego postaci dualnej ([4], s. 52). Jest to spowodowane tym, że w modelu dualnym jest mniej warunków ograniczających, co w praktyce istotnie skraca czas jego rozwiązania w porównaniu z modelem pierwotnym. Poza tym to właśnie w modelu dualnym znajdują się wagi λ_j, które umożliwiają jednostkom nieefektywnym wzorowanie się na obiektach wzorcowych, przez co mogą one poprawić swoją efektywność.

Efektywność w sensie DEA

Po rozwiązaniu modelu CCR uzyskuje się, m.in. optymalną wartość wskaźnika efektywności (θ^*) oraz wartości optymalne luzów ($s_r^+ *$ oraz $s_i^- *$). Dana jednostka jest efektywna w sensie DEA, gdy spełnione są równocześnie dwa warunki ([3], s. 433):

$$\text{(1. warunek) } \theta^* = 1 \tag{8}$$

$$\text{(2. warunek) } s_r^+ * = 0 \text{ oraz } s_i^- * = 0 \tag{9}$$

Spełnienie tylko warunku (1.) gwarantuje słabą efektywność (zwaną również efektywnością Farrella). Niezerowa wartość któregokolwiek z luzów – np. wartość i-tego luzu $s_i^- *$ – powoduje, że jednostka jest oceniana jako nieefektywna[17], gdyż możliwa jest dalsza redukcja (do poziomu $x_{io} - s_i^- *$) związanego z tym luzem nakładu, bez zmiany rozwiązania (a więc utrzymując wartość $\theta^* = 100\%$) i przy niezmienionym poziomie efektów. Oznacza to, iż istnieje inna jednostka, dla której $\theta^* = 100\%$, ale która zużywa mniej i-tego nakładu[18].

Warto w tym miejscu dodać, że efektywność w sensie DEA jest również efektywnością w sensie Pareto ([3], s. 433). Oznacza to, iż badana jednostka jest w pełni efektywna (w sensie DEA), wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest możliwe „polepszenie" (a więc redukcja w przypadku nakładów lub zwiększenie w przypadku efektów) żadnego z nakładów lub efektów bez pogorszenia innych – a więc bez zwiększenia któregoś z pozostałych nakładów albo zmniejszenia któregoś z efektów.

Założenia metody DEA

W literaturze stwierdza się, że poddawana analizie DEA grupa jednostek decyzyjnych powinna spełniać m.in. następujące warunki [2]:

(1.) Liczba n badanych jednostek powinna przynajmniej trzykrotnie przekraczać liczbę zmiennych, która wynosi $m + s$, aby zapewnić wystarczającą liczbę stopni swobody;

(2.) Wzrost nakładu prowadzi do wzrostu efektu, czyli występuje istotna dodatnia zależność między tymi zmiennymi;

(3.) Jednostki decyzyjne powinny być jednorodne.

[17] Jest to właśnie wspomniana wcześniej mix-nieefektywność.

[18] Słabą efektywność reprezentowałyby na rysunku 2 punkty leżące na odcinku MA lub CN.

Jeżeli chodzi o warunek (3.), w literaturze[19] poprzestaje się na zaznaczeniu, że badana grupa jednostek powinna być homogeniczna, aby wykluczyć pojawienie się w grupie obiektów niepodobnych do pozostałych (ang. outliers), które staną się „niedoścignionymi" wzorcami i będą miały wpływ na wyniki analizy DEA pozostałych jednostek.

Postulat homogeniczności jednostek – badanie empiryczne

Celem badania było empiryczne stwierdzenie, jakie znaczenie dla wyników DEA ma homogeniczność zbioru jednostek. Badanie polegało na analizie względnej efektywności polskich banków komercyjnych i zmian jej poziomu w zależności od obiektów znajdujących się w analizowanej grupie. Zastosowano model CCR zorientowany na nakłady.

W literaturze wyróżnia się różne modele działania banku – odzwierciedlające różne „spojrzenia" na bank, jako jednostkę gospodarczą. Podstawowe dwa modele to: model „producenta" i model „pośrednika finansowego" ([11], s. 4). W przeprowadzonym badaniu, jako model działania banku przyjęto model „producenta" – co znajduje odzwierciedlenie w podziale zmiennych (opisujących badane banki) na nakłady i efekty. Przyjęto następujący podział zmiennych:

Efekty:
- kredyty[20],
- depozyty[21].

Nakłady:
- zatrudnienie,
- majątek trwały[22].

Wykorzystano dane za rok 2004 dotyczące 33 polskich banków komercyjnych, publikowane przez miesięcznik „Bank"[23]. Z analizowanej grupy usunięto jednostki, dla których występował brak danych w pozycji dotyczącej któregokolwiek z nakładów lub efektów.

Analizę DEA przeprowadzono w czterech wariantach, które różniły się między sobą grupami jednostek poddawanych badaniu:

---

[19] Patrz np. [2], [4] lub w innych pozycjach literatury dotyczącej metody DEA.

[20] Kredyty równają się sumie wszystkich należności od podmiotów niefinansowych.

[21] Depozyty równe są sumie lokat podmiotów niefinansowych.

[22] Majątek trwały stanowi sumę rzeczowego majątku trwałego i wartości niematerialnych i prawnych.

[23] Numer kwietniowy miesięcznika „Bank" (2005), raport „50 największych banków w Polsce".

– Wariant (A) – grupa poddawana analizie DEA obejmowała wszystkie 33 banki;

– Wariant (B) – grupa poddawana analizie DEA powstała w wyniku zastosowania metody analizy skupień (wykorzystano metodę Warda);

– Wariant (C) – grupa poddawana analizie DEA powstała w wyniku zastosowania metody analizy skupień (wykorzystano metodę *k*-średnich);

– Wariant (D) – grupa poddawana analizie DEA to grupa z wariantu (A) pozbawiona jednej jednostki efektywnej w sensie DEA.

A. Grupa obejmująca wszystkie 33 banki

Wyniki analizy DEA dla wszystkich 33 banków przedstawiono w tabeli 4:

Tabela 4. Wariant (A) analizy DEA – grupa wszystkich 33 banków

L.p.	Bank	Wskaźnik efektywności DEA	Jednostki wzorcowe (tzw. benchmarki)
1	Kredyt Bank S.A.	12,84%	16, 17, 20
2	LUKAS Bank S.A.	13,51%	16, 17, 20
3	PTF Bank S.A.	16,96%	16
4	AIG Bank Polska S.A.	26,22%	16
5	Bank Pocztowy S.A.	9,66%	16, 17, 20
6	Invest-Bank S.A.	7,55%	17, 20
7	Deutsche Bank PBC S.A.	14,29%	17, 20
8	Dominet Bank S.A.	7,03%	16, 17, 20
9	Wschodni Bank Cukrownictwa S.A.	10,04%	16, 17
10	Bank Spółdzielczy w Kielcach	8,01%	16, 17
11	Wielkopolski Bank Spółdzielczy	3,86%	16, 17, 20
12	ING Bank Śląski S.A.	19,39%	20
13	Raiffeisen Bank Polska S.A.	19,95%	16, 17, 20
14	Bank Gospodarstwa Krajowego	20,32%	16, 20
15	NORDEA Bank Polska	17,39%	16, 20
16	Rabobank Polska S.A.	100,00%	24
17	ABN AMRO Bank (Polska) S.A.	100,00%	21
18	BISE S.A.	9,71%	17, 20
19	Caylon Bank Polska S.A.	84,50%	16, 17
20	Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A.	100,00%	19
21	Bank Spółdzielczy Rzemiosła w Krakowie	4,18%	16, 17
22	FCE Bank Polska S.A.	30,75%	16
23	Bank BPH SA	16,69%	20
24	Bank Gospodarki Żywnościowej S.A.	11,79%	17, 20
25	Bank Ochrony Środowiska S.A.	16,56%	16, 17, 20
26	BRE Bank Hipoteczny	49,14%	16

27	BPH Bank Hipoteczny	54,29%	16
28	Krakowski Bank Spółdzielczy w Krakowie	7,89%	16, 17, 20
29	Bank Spółdzielczy w Brodnicy	7,49%	16, 17, 20
30	Podkarpacki Bank Spółdzielczy	8,83%	16, 17
31	Bank Spółdzielczy w Gliwicach	8,20%	16, 17, 20
32	Bank Spółdzielczy w Piasecznie	8,86%	16, 17
33	Orzesko-Knurowski Bank Spółdzielczy	4,88%	16, 17, 20

Źródło: Opracowanie własne.

W tabeli tej kolumna „Wskaźnik efektywności DEA" zawiera wartości wskaźników efektywności uzyskane po rozwiązaniu modelu CCR zorientowanego na nakłady, kolejno dla każdego z 33 obiektów.

W kolumnie „Jednostki wzorcowe" podano – sugerowane przez to rozwiązanie – numery jednostek efektywnych w sensie DEA, na których odpowiednie jednostki nieefektywne powinny się wzorować. Natomiast wartość w tej kolumnie w wierszu odpowiadającym jednostce efektywnej informuje, dla ilu jednostek nieefektywnych dana jednostka jest wzorcem.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że w grupie 33 banków występują trzy obiekty efektywne w sensie DEA (uzyskały wskaźnik efektywności równy 100%). Są to: Rabobank Polska S.A., ABN AMRO Bank (Polska) S.A. oraz Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A. Pozostałe banki zostały ocenione jako nieefektywne.

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż wskaźniki efektywności dla jednostek nieefektywnych są w większości bardzo niskie (dużo poniżej 50%), co może sugerować, że grupa jednostek poddanych badaniu została niewłaściwie wyznaczona[24] (np. wynik 16,69% dla dużego i dobrze prosperującego banku BPH S.A. wydaje się być błędny – bank BPH S.A. w roku 2004 znalazł się na 3 pozycji w rankingu 50 najlepszych banków polskich, przeprowadzanym co roku przez czasopismo „Bank").

Drugą kwestią budzącą poważne wątpliwości co do poprawności badania, są wyodrębnione wzorce. Dla wspomnianego powyżej banku BPH S.A. wzorcem według analizy DEA jest Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A. Wystarczy przyjrzeć się danym, które pokazują kształtowanie się uwzględnianych w analizie czterech zmiennych[25], aby zobaczyć, że ten mały bank nie może być sensownym wzorcem dla wielkiego banku BPH S.A.

Z uwagi na powyższe, postanowiono zastosować metody analizy skupień (ang. cluster analysis) w celu dokonania podziału badanej grupy obiektów na jednorodne skupienia.

[24] Zostanie to uwzględnione w dalszej części artykułu.

[25] Patrz: numer kwietniowy miesięcznika „Bank" (2005).

B. Grupa wyodrębniona metodą Warda

Do wyodrębnienia tej grupy zastosowano jedną z metod aglomeracyjnych analizy skupień – metodę Warda (przy euklidesowym mierniku odległości). Grupowanie przeprowadzono na podstawie czterech zmiennych – dwa efekty (kredyty, depozyty) oraz dwa nakłady (majątek trwały, zatrudnienie).

Analiza dendrogramu wygenerowanego przez metodę Warda sugeruje podział badanej grupy na cztery skupienia. Do dalszej analizy wybrano najliczniejszą grupę, w której znalazły się 24 banki. Wyniki przeprowadzonej dla tej grupy obiektów analizy DEA zawiera tabela 5.

Tabela 5. Wariant (B) analizy DEA – grupa wyróżniona przez metodę Warda

L.p.	Bank	Wskaźnik efektywności DEA	Benchmarki
3	PTF Bank S.A.	16,96%	16
4	AIG Bank Polska S.A.	26,22%	16
5	Bank Pocztowy S.A.	9,66%	17, 20
6	Invest-Bank S.A.	7,55%	17, 20
7	Deutsche Bank PBC S.A.	14,29%	17, 20
8	Dominet Bank S.A.	7,03%	16, 17, 20
9	Wschodni Bank Cukrownictwa S.A.	10,04%	16, 17
10	Bank Spółdzielczy w Kielcach	8,01%	16, 17
11	Wielkopolski Bank Spółdzielczy	3,86%	16, 17, 20
16	**Rabobank Polska S.A.**	**100,00%**	**17**
17	**ABN AMRO Bank (Polska) S.A.**	**100,00%**	**16**
18	BISE S.A.	9,71%	17, 20
19	Caylon Bank Polska S.A.	84,50%	16, 17
20	**Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A.**	**100,00%**	**10**
21	Bank Spółdzielczy Rzemiosła w Krakowie	4,18%	16, 17
22	FCE Bank Polska S.A.	30,75%	16
26	BRE Bank Hipoteczny	49,14%	16
27	BPH Bank Hipoteczny	54,29%	16
28	Krakowski Bank Spółdzielczy w Krakowie	7,89%	16, 17, 20
29	Bank Spółdzielczy w Brodnicy	7,49%	16, 17, 20
30	Podkarpacki Bank Spółdzielczy	8,83%	16, 17
31	Bank Spółdzielczy w Gliwicach	8,20%	16, 17, 20
32	Bank Spółdzielczy w Piasecznie	8,86%	16, 17
33	Orzesko-Knurowski Bank Spółdzielczy	4,88%	16, 17, 20

Źródło: Opracowanie własne.

Warto zwrócić uwagę, iż analiza DEA ponownie wskazała na trzy jednostki wzorcowe. Są to te same banki, które zostały ocenione jako efektywne w wariancie (A) analizy, mimo że grupa (A) jest grupą niejednorodną w sensie metody Warda, a grupa w wariancie (B) charakteryzuje się homogenicznością (w sensie metody Warda).

Należy także zauważyć, że wskaźniki efektywności wyznaczone dla jednostek nieefektywnych również są takie same, jak w grupie (A).

Przyczyną takich wyników analizy DEA w wariantach (A) oraz (B) jest fakt występowania tych samych jednostek wzorcowych w obu grupach. Wskaźniki efektywności jednostek nieefektywnych są ustalane na podstawie obiektów wzorcowych, a ponieważ obie grupy zawierają te same wzorce – wyniki analizy DEA nie różnią się między sobą.

C. Grupa wyodrębniona metodą *k*-średnich

Do wyodrębnienia grupy do analizy DEA w wariancie (C) zastosowano inną metodę analizy skupień – metodę *k*-średnich.

Ustalono liczbę skupień $k = 4$, gdyż taką liczbę skupień wyodrębniono, stosując metodę Warda. Początkowe cztery jednoelementowe skupienia wybrano za pomocą kryterium maksymalizacji odległości między obiektami.

Wyodrębnioną najliczniejszą grupę (obejmującą 28 jednostek homogenicznych) poddano następnie analizie DEA. Wyniki zawiera tabela 6.

Tabela 6. Wariant (C) analizy DEA – grupa wyróżniona przez metodę *k*-średnich

L.p.	Bank	Wskaźnik efektywności DEA	Benchmarki
2	LUKAS Bank S.A.	13,51%	16, 17, 20
3	PTF Bank S.A.	16,96%	16
4	AIG Bank Polska S.A.	26,22%	16
5	Bank Pocztowy S.A.	9,66%	16, 17, 20
6	Invest-Bank S.A.	7,55%	17, 20
7	Deutsche Bank PBC S.A.	14,29%	17, 20
8	Dominet Bank S.A.	7,03%	16, 17, 20
9	Wschodni Bank Cukrownictwa S.A.	10,04%	16, 17
10	Bank Spółdzielczy w Kielcach	8,01%	16, 17
11	Wielkopolski Bank Spółdzielczy	3,86%	16, 17, 20
14	Bank Gospodarstwa Krajowego	20,32%	16, 20
15	NORDEA Bank Polska	17,39%	16, 20
16	**Rabobank Polska S.A.**	**100,00%**	**22**
17	**ABN AMRO Bank (Polska) S.A.**	**100,00%**	**18**

18	BISE S.A.	9,71%	17, 20
19	Caylon Bank Polska S.A.	84,50%	16, 17
20	**Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A.**	**100,00%**	**14**
21	Bank Spółdzielczy Rzemiosła w Krakowie	4,18%	16, 17
22	FCE Bank Polska S.A.	30,75%	16
25	Bank Ochrony Środowiska S.A.	16,56%	16, 17, 20
26	BRE Bank Hipoteczny	49,14%	16
27	BPH Bank Hipoteczny	54,29%	16
28	Krakowski Bank Spółdzielczy w Krakowie	7,89%	16, 17, 20
29	Bank Spółdzielczy w Brodnicy	7,49%	16, 17, 20
30	Podkarpacki Bank Spółdzielczy	8,83%	16, 17
31	Bank Spółdzielczy w Gliwicach	8,20%	16, 17, 20
32	Bank Spółdzielczy w Piasecznie	8,86%	16, 17
33	Orzesko-Knurowski Bank Spółdzielczy	4,88%	16, 17, 20

Źródło: Opracowanie własne.

W grupie wyodrębnionej za pomocą metody *k*-średnich analiza DEA wskazała również te same trzy wzorce. W związku z tym jednostki nieefektywne uzyskały takie same wskaźniki efektywności, jak w wariantach (A) i (B). Grupy z wariantów (A), (B) oraz (C) różnią się między sobą jedynie liczbą obiektów – wzorce w tych trzech wariantach są takie same.

Wyniki analizy DEA w wariantach (B) oraz (C) pokazują, że zastosowanie analizy skupień nie doprowadziło do wyodrębnienia właściwej grupy obiektów – wyniki nadal nie są satysfakcjonujące, gdyż wskaźniki efektywności większości banków są wciąż bardzo niskie.

D. Grupa 32 banków – grupa z wariantu (A) pozbawiona jednej jednostki wzorcowej

Grupa w wariancie (D) to grupa (A), z której usunięto jeden z obiektów wzorcowych – mianowicie Rabobank Polska S.A. (bank oznaczony numerem (16)).

Przeprowadzono takie badanie, aby pokazać, że wskaźniki efektywności reagują na zmiany wzorców. Usunięcie jednej z jednostek wzorcowych całkowicie zmienia wyniki analizy DEA.

W badaniu usunięto Rabobank Polska S.A., ale można by usunąć jakikolwiek inny bank wzorcowy, aby zaobserwować zmiany wyników analizy DEA (dla ilustracji przytoczono jedną wersję).

Po przeprowadzeniu analizy DEA w takiej grupie jednostek, otrzymano wyniki podane w tabeli 7.

Tabela 7. Wariant (D) analizy DEA – grupa (A) pozbawiona jednego wzorca

L.p.	Bank	Wskaźnik efektywności DEA	Benchmarki
1	Kredyt Bank S.A.	13,66%	17, 20, 27
2	LUKAS Bank S.A.	17,43%	17, 20, 27
3	PTF Bank S.A.	31,39%	17, 27
4	AIG Bank Polska S.A.	56,37%	17, 27
5	Bank Pocztowy S.A.	9,68%	17, 20, 27
6	**Invest-Bank S.A.**	**7,55%**	17, 20
7	**Deutsche Bank PBC S.A.**	**14,29%**	17, 20
8	Dominet Bank S.A.	7,90%	17, 20, 27
9	Wschodni Bank Cukrownictwa S.A.	11,02%	17, 27
10	Bank Spółdzielczy w Kielcach	10,91%	17, 27
11	Wielkopolski Bank Spółdzielczy	4,41%	17, 20, 27
12	ING Bank Śląski S.A.	19,39%	20
13	Raiffeisen Bank Polska S.A.	21,45%	17, 20, 27
14	Bank Gospodarstwa Krajowego	27,74%	20, 26
15	NORDEA Bank Polska	23,27%	20, 26
17	**ABN AMRO Bank (Polska) S.A.**	**100,00%**	**23**
18	BISE S.A.	9,71%	17, 20
19	Caylon Bank Polska S.A.	89,56%	17, 27
20	**Bank of Tokyo-Mitsubishi (Polska) S.A.**	**100,00%**	**20**
21	Bank Spółdzielczy Rzemiosła w Krakowie	6,02%	17, 20, 27
22	FCE Bank Polska S.A.	62,24%	26, 27
23	Bank BPH SA	16,69%	20
24	Bank Gospodarki Żywnościowej S.A.	11,79%	17, 20
25	Bank Ochrony Środowiska S.A.	20,35%	17, 20, 27
26	**BRE Bank Hipoteczny**	**100,00%**	**3**
27	**BPH Bank Hipoteczny**	**100,00%**	**20**
28	Krakowski Bank Spółdzielczy w Krakowie	9,98%	17, 20, 27
29	Bank Spółdzielczy w Brodnicy	9,90%	17, 20, 27
30	Podkarpacki Bank Spółdzielczy	12,76%	17, 27
31	Bank Spółdzielczy w Gliwicach	8,77%	17, 20, 27
32	Bank Spółdzielczy w Piasecznie	12,70%	17, 27
33	Orzesko-Knurowski Bank Spółdzielczy	6,77%	17, 20, 27

Źródło: Opracowanie własne.

Porównując wyniki analizy DEA w wariancie (D) z poprzednimi wariantami, widać, że nastąpiła wyraźna zmiana wartości wskaźników efektywności. Zmieniły się obiekty wzorcowe, a ponieważ efektywność pozostałych obiektów usta-

lana jest według obiektów wzorcowych, wystąpiła zmiana wartości wskaźników efektywności.

Warto jednak zauważyć, że efektywność nie zmieniła się dla tych jednostek, dla których w analizowanych grupach wzorce są takie same, np. Invest-Bank S.A. (7,55%), Deutsche Bank PBC S.A. (14,29%) – dla których Rabobank Polska S.A. nie był wcześniej wzorcem.

Wnioski końcowe

Analiza metodą Data Envelopment Analysis służy do badania względnej efektywności jednostek decyzyjnych, to znaczy, że efektywność każdej jednostki jest ukazywana w odniesieniu do efektywności jednostek wzorcowych.

Jak pokazały przeprowadzone badania empiryczne, na wartość wskaźników efektywności jednostek nieefektywnych wpływ mają jedynie obiekty uznane przez metodę DEA za wzorcowe.

W związku z tym – wzorcem dla jednostki nieefektywnej – powinien być obiekt, który jest dla niej „osiągalny" i stąd w literaturze postulat jednorodności badanej grupy obiektów.

Jednorodność jest jednak pojęciem mało precyzyjnym, o ile nie określi się kryteriów, wedle których uznaje się dane jednostki za homogeniczne lub niehomogeniczne. Pojawia się pytanie, czy intuicyjna (a tym samym subiektywna) ocena badacza jest wystarczająca, aby uznać daną grupę za jednorodną. Dlatego w przeprowadzonej analizie do wyodrębniania homogenicznych skupień obiektów wykorzystano analizę skupień (ang. cluster analysis).

Przeprowadzone badanie empiryczne ukazało, że mimo zastosowania dwóch różnych metod analizy skupień, analiza DEA wskazała takie same wzorce, jak te wyznaczone dla grupy wszystkich 33 banków (a więc grupy niepoddanej analizie skupień). W związku z tym wskaźniki efektywności dla jednostek nieefektywnych w każdym przypadku były takie same.

Okazało się więc, że zastosowanie analizy skupień nie poprawiło wyników przeprowadzonej następnie analizy DEA[26]. Można przypuszczać, że spowodowane jest to różnym sposobem pomiaru odległości w analizie skupień i w DEA. Analiza skupień grupuje jednostki, biorąc za kryterium podziału ich odległość (wyznaczoną na podstawie opisujących je zmiennych). Każda z metod analizy skupień w inny nieco sposób mierzy tę odległość, ale wszystkie grupują jednostki

[26] Wyniki analizy DEA przeprowadzonej dla grup wyodrębnionych metodami analizy skupień nie są właściwe, na co wskazują wartości wskaźników efektywności jednostek nieefektywnych.

w skupienia zawierające obiekty położone najbliżej siebie w wielowymiarowej przestrzeni opisujących je zmiennych.

Metody analizy skupień nie uwzględniają natomiast obszarów korzyści skali, w jakich znajdują się badane jednostki, co leży u podstaw metody DEA. Powoduje to nieprawidłową, z punktu widzenia DEA, klasyfikację jednostek do skupień, co w efekcie prowadzi do niewłaściwych wyników analizy DEA przeprowadzonej na tak wybranej grupie obiektów. Wskazują na to przeprowadzone badania empiryczne.

Pokazują one, że analiza skupień doskonale spełnia swoje zadanie, ale dopiero, gdy zastosuje się ją po podzieleniu analizowanej grupy obiektów ze względu na obszary korzyści skali, w jakich one działają (obszary stałych, rosnących lub malejących korzyści skali). Takie podejście umożliwia wykluczenie z danej grupy obiektów (jednorodnych względem korzyści skali) jednostek skrajnych, które mogłyby stać się nieosiągalnymi wzorcami dla jednostek nieefektywnych.

Wyniki tych wstępnych badań zachęcają do dalszych prac nad badaniem jednorodności grupy obiektów poddawanych analizie DEA.

Obok głównego badania empirycznego, przeprowadzono również poboczną symulację, która miała na celu przyjrzenie się wpływowi na wyniki analizy DEA ewentualnych fuzji banków[27]. Wyniki pokazują, że połączenie się banków może mieć różny wpływ na wyniki analizy. Zależy to od tego, czy połączą się:

a) dwa banki wzorcowe (zbadano, m.in. na przykładzie hipotetycznego połączenia się ABN AMRO Bank Polska S.A. i Bank of Tokyo Mitsubishi Polska S.A.) – następuje zmiana wyników analizy, gdyż z połączenia dwóch jednostek efektywnych powstaje nowa jednostka również efektywna, co prowadzi do tego, że jednostki nieefektywne będą miały inny zestaw wzorców wskazany przez metodę; wynika to z idei metody, w której wskaźniki efektywności jednostek nieefektywnych konstruowane są według wzorców;

b) jeden bank wzorcowy i jeden nieefektywny (zbadano np. hipotetyczną fuzję banku BRE Bank Hipoteczny S.A. z bankiem ABN AMRO Bank Polska S.A. oraz z Bank of Tokyo-Mitsubishi Polska S.A.) – taka fuzja powoduje, że powstaje jednostka nieefektywna, a więc zmieniają się wartości wskaźników nieefektywności tylko tych jednostek, dla których jeden z uczestników fuzji był wzorcem wcześniej; w tym przypadku może również dojść do wyłonienia zupełnie nowego wzorca – co również spowoduje zmianę wyników analizy;

c) dwa banki nieefektywne (zbadano, m.in. na przykładzie hipotetycznej fuzji ING Bank Śląski S.A. oraz Bank BPH S.A.) – nie ma to wpływu na wyniki analizy pozostałych jednostek, ponieważ powstaje bank nieefektywny, którego

[27] Symulacji dokonano, biorąc pod uwagę wszystkie 33 banki.

wskaźnik efektywności nie odbiega znacząco od wskaźników jednostek łączących się.

Podsumowując przeprowadzone w pracy rozważania, z całą pewnością można stwierdzić, że postulat jednorodności badanych obiektów jest w metodzie DEA uzasadniony. Jeżeli w analizowanej grupie znajdą się jednostki skrajne, to wyniki analizy DEA dla wszystkich jednostek nieefektywnych, dla których taki skrajny obiekt został uznany za wzorzec, będą nieprawidłowe. Procedury takie, jak analiza skupień, pozwalają wykluczyć podobne niebezpieczeństwo.

Metody analizy skupień należy jednak stosować bardzo ostrożnie. Wybór zmiennych, opisujących obiekty powinien być przemyślany, poprzedzony analizą badanych jednostek i ich otoczenia, a także merytorycznie powiązany z docelową analizą DEA.

Wstępne badania sugerują, że uwzględnienie w grupowaniu obszaru korzyści skali, w jakim znajdują się badane obiekty, może mieć istotne znaczenie dla poprawności analizy DEA.

Literatura

[1] Banker R. D., Charnes A., Cooper W. W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, „Management Science" 1984, nr 9

[2] Bowlin W. F., *Measuring Perfomance:An Introduction to Data Envelopment Analysis (DEA)*, artykuł dostępny na stronie internetowej: http://llanes.panam.edu/edul8305/papers/introtodea.pdf

[3] Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E., *Measuring the efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research" 1978, nr 2

[4] Cooper W. W., Seiford L. M., Tone K., *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, 2000

[5] Farrel M. J., *The Measurement of Productive Efficiency*, „The Journal of the Royal Statistical Society" 1957, nr 120

[6] Gospodarowicz A., *Analiza i ocena banków oraz ich oddziałów*, Wyd. AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2002

[7] Kopczewski T., *Efektywność technologiczna i kosztowa banków komercyjnych w Polsce w latach 1997–2000*. Cz. I., Materiały i Studia NBP nr 113, Warszawa 2000

[8] Nykowski I., *Programowanie liniowe*, PWE, Warszawa 1980

[9] Pawłowska M., *Analiza porównawcza efektywności technicznej polskiego sektora bankowego i sektorów bankowych krajów CEC5 i wybranych krajów UE w latach 1997 –2001*, „Bank i Kredyt" 2004, maj, s. 41–47

[10] Prędki A., *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Elipsa, „Przegląd Statystyczny" 2003, nr 50(1), s. 87–100

[11] Thanassoulis E., *Data Envelopment Analysis and Its Use in Banking*, „Interfaces" 29: 3, May–June 1999
[12] Zimniewicz K., *Współczesne koncepcje i metody zarządzania*, PWE, Warszawa 1999
[13] Witryna internetowa Johna E. Beasleya poświęcona metodzie DEA, dostępna pod adresem: http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/or/dea.html
[14] Witryna poświęcona metodzie DEA: *Ali Emrouznejad's DEA HomePage*, Warwick Business School, Coventry CV4 7AL, UK (http://www.deazone.com)

Anna Domagała

HOMOGENEITY POSTULATE OF DECISION–MAKING UNITS IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS. THEORY SUGGESTIONS AND EMPIRICAL SIMULATION RESULTS

Summary

The article considers one of the most important postulates concerning the group of units that are examined using the Data Envelopment Analysis. The author presents the basic DEA model (CCR model) and empirically examines the sensitivity of the DEA results with respect to different cluster analysis methods used to preselect the group of units.

Keywords: Data Envelopment Analysis, technical efficiency, linear programming, homogeneity, cluster analysis