Elżbieta RYCHŁOWSKA-MUSIAŁ

EFEKT MAGISTRALI W STRATEGIACH FINANSOWYCH PRZEDSIĘBIORSTWA

Kondycja finansowa przedsiębiorstwa zależy od środowiska ekonomicznego, w jakim ono działa, ale także, w znacznym stopniu, od wewnętrznych determinant rozwoju. Z punktu widzenia analizy czynników wewnętrznych, istotną rolę odgrywa kapitał, jakim dysponuje przedsiębiorstwo, jego wielkość i struktura, zmieniające się głównie pod wpływem inwestowania w aktywa finansowe i rzeczowe przedsiębiorstwa[1].

A zatem wybór optymalnej (z punktu widzenia prowadzonej działalności gospodarczej) strategii finansowej przedsiębiorstwa, czyli ustalenie optymalnej wielkości i struktury kapitału, jest jednym z podstawowych warunków właściwego funkcjonowania firmy.

Pomocnym narzędziem mogą być dynamiczne modele matematyczne i teoria sterowania optymalnego. Oczywiście żaden model matematyczny nie może być wykorzystany do zautomatyzowania procesu podejmowania decyzji, ale może uczynić ten proces bardziej efektywnym.

W artykule przedstawiam model typu Lesourne'a i generowane przez niego strategie finansowe przedsiębiorstwa (spółki akcyjnej). Pozwala on na ustalenie optymalnej struktury kapitału spółki, gdy kryterium oceny działalności jest suma zdyskontowanego strumienia dywidendy i zdyskontowanej wartości kapitału własnego firmy na koniec okresu planowania.

Model ten uwzględnia wpływ podatku dochodowego od osób fizycznych, płaconego przez akcjonariuszy, a powodującego istotne różnice pomiędzy dywidendą a zyskiem z kapitału.

Analiza rozwiązań długookresowych pokazuje, iż przebiegają one czasowo wzdłuż pewnych trajektorii zrównoważonego wzrostu, zwanych **magistralami**

---

[1] L. Bednarski, R. Borowiecki, J. Duraj, E. Kurtys, T. Waśniewski, B. Wersty, *Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa*, Akademia Ekonomiczna, Wrocław 1998, s. 355.

(firma osiąga wówczas stan równowagi stacjonarnej). Magistralę cechuje stały zbiór pewnych atrybutów, stanów inwariantnych firmy – w modelu jest to stała wartość kapitału własnego i stały poziom zadłużenia, niezmieniające się zatrudnienie i produkcja, stała wielkość dywidendy i poziom inwestycji. Długości faz poprzedzających – dochodzenia do magistrali – i faz zejścia z magistrali, są stałe w każdym rozwiązaniu. Jeżeli długość horyzontu analizy rośnie, to rośnie także długość fazy rozwoju firmy na magistrali. Tego typu zachowanie rozwiązań optymalnych nosi w ekonomii matematycznej nazwę **efektu magistrali**[2].

Okazuje się również, że przy stałych warunkach kredytowania przedsiębiorstwa przez bank i przy niezmieniających się oczekiwaniach akcjonariuszy, instrumentem decydującym o opłacalności każdego z obu możliwych źródeł finansowania, jest ustalana przez państwo stawka podatku dochodowego płaconego przez przedsiębiorstwa.

1. Sformułowanie modelu

Strukturę finansową przedsiębiorstwa oraz powiązania pomiędzy występującymi w niej elementami opisują następujące równania i ograniczenia[3]:

- Równanie bilansowe – wyrażające równość pomiędzy aktywami i pasywami firmy:

$$K(t)=X(t)+Y(t), \tag{1}$$

gdzie:

$K(t)$ – wielkość majątku firmy w momencie t (zasób),
$X(t)$ – wartość kapitału własnego w momencie t (zasób),
$Y(t)$ – wielkość długu w momencie t (zasób).

- Ograniczenia poziomu zadłużenia – firma nie może sama udzielać kredytu, nie może także przekroczyć pewnego progu udziału kapitału obcego w kapitale własnym firmy:

---

[2] E. Panek, *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa – Poznań 1989, s. 107-108; zob. też: E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.

[3] Prezentowany problem jest kontynuacją i rozszerzeniem zagadnienia przedstawionego w pracy: E. Rychłowska-Musiał, *Optymalne strategie rozwoju firmy w modelu typu Lesourne'a*, w: *Prace z ekonometrii finansowej*, red. W. Jurek, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000.

$$0 \leqslant Y(t) \leqslant hX(t), \tag{2}$$

gdzie:

h – wskaźnik maksymalnego udziału zadłużenia w kapitale własnym.

- Równanie określające źródła finansowania przedsięwzięć inwestycyjnych – środki własne, kredyt oraz amortyzacja:

$$I(t) = \dot{X}(t) + \dot{Y}(t) + aK(t), \tag{3}$$

gdzie:

$I(t)$ – wielkość inwestycji w momencie t (gęstość strumienia),
a – stopa deprecjacji.

- Równanie opisujące wypracowanie i podział zysku netto:

$$R(K, L) = pQ(K, L) - wL(t) - rY(t) - aK(t) -$$
$$-f(pQ(K, L) - wL(t) - rY(t) - aK(t)) = D(t) + \dot{X}(t), \tag{4}$$

gdzie:

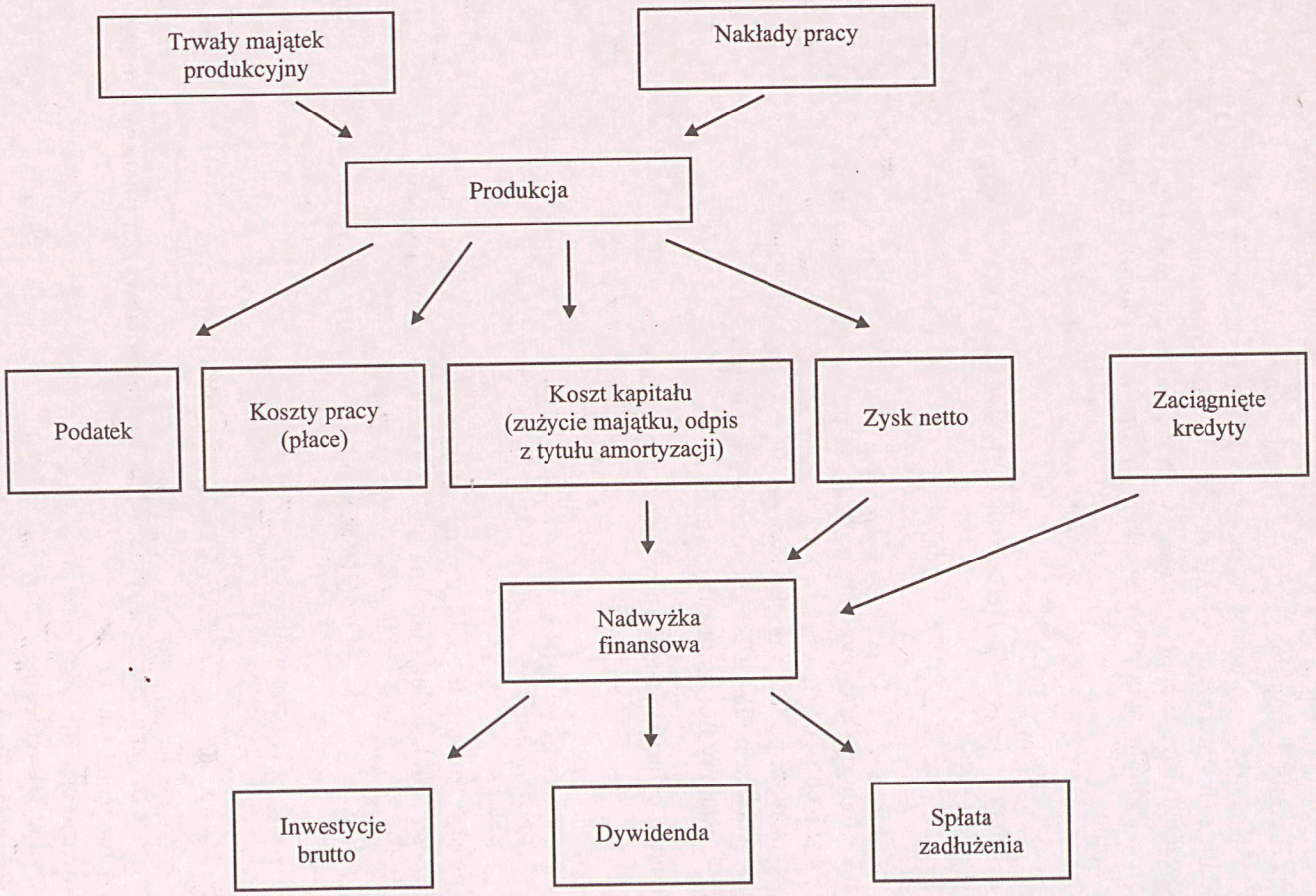
$R(K, L)$ – wartość zysku netto,
Q – dwuargumentowa, rosnąca (ze względu na każdą zmienną), wklęsła funkcja produkcji taka, że:

$$Q(K, 0) = Q(0, L) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0,$$

$L(t)$ – poziom zatrudnienia w momencie t (zasób),
$D(t)$ – wielkość dywidendy w momencie t (gęstość strumienia),
f – stawka podatku,
w – stawka płac,
p – cena jednostkowa,
r – stopa oprocentowania kredytu.

W formułowanym modelu będziemy rozpatrywać tylko wypadek, w którym firma musi najpierw pozyskać fundusze na rozwój, zanim będzie mogła z wypracowanego zysku wypłacać dywidendę. Będziemy zatem zakładać, że wyrażona wartościowo krańcowa produktywność majątku w momencie początkowym jest nie niższa niż koszt krańcowy kapitału w momencie początkowym, tzn. że spełniony jest warunek:

$$p \frac{\partial Q}{\partial K}\bigg|_{K=K(0)} \geqslant a + \max\left\{r, \frac{i}{1-f}\right\}. \tag{5}$$



Rys. 1. Uproszczony schemat funkcjonowania przedsiębiorstwa

Nie jest zatem konieczne dolne ograniczenie na wielkość inwestycji, gdyż polityka redukcji majątku nigdy nie będzie optymalna[4].

Postać funkcji celu jest wynikiem przyjęcia za kryterium optymalności postulatu maksymalizacji zysku akcjonariusza, rozumianego jako suma zdyskontowanego strumienia dywidendy (po opodatkowaniu) i zdyskontowanej wartości kapitału własnego spółki (po opodatkowaniu), na koniec okresu planowania:

$$\max_{I(t),D(t),L(t)} \left\{ \int_0^z (1-f_D) D(t) e^{-it} dt + X(z) e^{-iz} - f_K (X(z) - X(0)) e^{-iz} \right\}, \quad (6)$$

gdzie:

i – stopa dyskontowa (utożsamiana z pożądaną stopą zwrotu, $i>0$, $i=\text{const}$),
f_D – stawka podatku dochodowego od dywidendy,
f_K – stawka podatku od dochodów z kapitału,
z – ustalony horyzont planowania.

Funkcja celu (6) jest równoważna z kryterium:

$$\max_{I(t),D(t),L(t)} \left\{ \int_0^z D(t) e^{-it} dt + \left(\frac{1-f_K}{1-f_D} X(z) + \frac{f_K}{1-f_D} X(0) \right) e^{-iz} \right\}. \quad (7)$$

Wprost z równań modelu można wyprowadzić równanie nadwyżki finansowej (*cash flow*). Składa się ona z zysku netto oraz amortyzacji:

$$CF(K, L, Q) = (1-f)(pQ(K, L) - wL(t) - aK(t) - rY(t)) + aK(t). \quad (8)$$

Z (1), (3) i (4) otrzymujemy:

$$CF(K, L, Q) = I(t) + D(t) - \dot{Y}(t). \quad (9)$$

Równość ta oznacza, że wypracowana w firmie nadwyżka finansowa może być przeznaczona na:
- inwestycje,
- wypłatę dywidendy,
- redukcję długu.

---

[4] Zadanie z ograniczeniem na inwestycje jest przedstawione np. w pracy: M. W. J. Blok, *Dynamic models of the firm*, Springer-Verlag, Berlin 1996.

Zadanie będzie polegało na znalezieniu takiego podziału nadwyżki finansowej, który maksymalizuje wartość funkcji celu.

Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy z zależności (1)-(4) zadanie sterowania optymalnego:
Znaleźć maksimum funkcjonału (7), gdy dynamikę firmy opisują równania:

$$\dot{K}(t)=I(t)-aK(t), \tag{10}$$

$$\dot{X}(t)=(1-f)\big(pQ(K,L)-wL(t)-(a+r)K(t)+rX(t)\big)-D(t), \tag{11}$$

a zbiór sterowań dopuszczalnych jest ograniczony przez układ nierówności:

$$K(t)-X(t)\geqslant 0, \tag{12}$$

$$(1+h)X(t)-K(t)\geqslant 0, \tag{13}$$

$$D(t)\geqslant 0, \tag{14}$$

$$X(0)=X_0>0, \qquad K(0)=K_0>0. \tag{15}$$

Zmiennymi sterującymi są: $I(t)$ (wielkość inwestycji), $D(t)$ (wielkość dywidendy) oraz $L(t)$ (poziom zatrudnienia).

Zmiennymi stanu są: $X(t)$ (zasób kapitału własnego) i $K(t)$ (całkowity zasób majątku).

Zagadnienie postaci (7), (10)-(15) spełnia założenia twierdzeń o warunkach koniecznych i dostatecznych[5].

2. Sformułowanie warunków

Utwórzmy dla tego zadania funkcję Lagrange'a:

$$\begin{aligned} L=&(1-f_D)D(t)+\lambda_1(t)(I(t)-aK(t))+\\ &+\lambda_2(t)\big((1-f)(pQ(K,L)-wL(t)-(a+r)K(t)+rX(t))-D(t)\big)+\\ &+\mu(t)D(t)+\nu_1(t)(K(t)-X(t))+\nu_2(t)\big((1+h)X(t)-K(t)\big). \end{aligned} \tag{16}$$

---

[5] Zob. np. van O. Hilten, P. M. Kort, van J. J. M. Loon, *Dynamic policies of the firm. An optimal control approach*, Springer-Verlag, Berlin 1993, s. 265, 266.

Optymalną trajektorię rozwoju firmy można zatem wyznaczyć z układu warunków, które są spełnione wszędzie z wyjątkiem ewentualnych punktów nieciągłości wektora sterowań $(I(t), D(t), L(t))$:

$$\dot{\lambda}_1(t) = (i+a)\lambda_1(t) - (1-f)\left(p\frac{\partial Q}{\partial K} - (a+r)\right)\lambda_2(t) - v_1(t) + v_2(t), \tag{17}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = (i-(1-f)r)\lambda_2(t) + v_1(t) - (1+h)v_2(t), \tag{18}$$

$$\lambda_1(t) = 0, \tag{19}$$

$$1 - \lambda_2(t) + \mu(t) = 0, \tag{20}$$

$$p\frac{\partial Q}{\partial L} = w, \tag{21}$$

$$\mu(t) \geqslant 0 \wedge \mu(t)D(t) = 0, \tag{22}$$

$$v_1(t) \geqslant 0 \wedge v_1(t)(K(t) - X(t)) = 0, \tag{23}$$

$$v_2(t) \geqslant 0 \wedge v_2(t)((1+h)X(t) - K(t)) = 0, \tag{24}$$

$$\lambda_1(z) = \gamma_1 - \gamma_2, \tag{25}$$

$$\lambda_2(z) = \frac{1-f_K}{1-f_D} - \gamma_1 + (1+h)\gamma_2, \tag{26}$$

$$\gamma_1 \geqslant 0 \wedge \gamma_1(K(z) - X(z)) = 0, \tag{27}$$

$$\gamma_2 \geqslant 0 \wedge \gamma_2((1+h)X(z) - K(z)) = 0. \tag{28}$$

Zauważmy, że z warunku (21) wynika, iż w całym horyzoncie planowania optymalny jest taki poziom zatrudnienia, przy którym stawka płac jest równa wyrażonej wartościowo krańcowej wydajności pracy.

3. Trajektorie optymalne

Analizując znaki zmiennych dodatkowych, otrzymujemy ścieżki, różniące się między sobą dynamiką i poziomem zmiennych sterujących i zmiennych stanu. Wszystkich możliwych ścieżek jest w modelu 8 (2^3), jednak nie wszystkie są dopuszczalne.

Ścieżki dopuszczalne i ich krótką charakterystykę przedstawia tabela 1[6].

[6] Pełną charakterystykę ścieżek, a także procedurę łączenia ich w trajektorie zawiera praca: E. Rychłowska-Musiał, op. cit., s. 206-211. Zob. też: van O. Hilten, P. M. Kort, van P. J. J. M. Loon, op. cit., s. 330-341.

Tabela 1. Ścieżki dopuszczalne

Zmienne ścieżki	$\mu(t)$	$v_1(t)$	$v_2(t)$	$K(t)$	$Y(t)$	$D(t)$	Charakterystyka
1	+	0	+	$\dot{K}>0$	$hX(t)$	0	faza wzrostu
2	+	0	0	K^*_{XY}	$\dot{Y}<0$	0	faza reorganizacji $p\frac{\partial Q}{\partial K}=a+r$ | $p\frac{\partial Q}{\partial L}=w$
3	+	+	0	$\dot{K}>0$	0	0	faza wzrostu
4	0	+	0	K^*_X	0	+	stan stacjonarny (ścieżka końcowa) $p\frac{\partial Q}{\partial K}=a+\frac{i}{1-f}$ | $p\frac{\partial Q}{\partial L}=w$
5	0	0	+	K^*_Y	$hX(t)$	+	stan stacjonarny (ścieżka końcowa) $p\frac{\partial Q}{\partial K}=a+\frac{h}{1+h}r+\frac{1}{1+h}\cdot\frac{i}{1-f}$ | $p\frac{\partial Q}{\partial L}=w$

Stałe wartości majątku i zatrudnienia w fazie reorganizacji (ścieżka 2) oznaczamy odpowiednio: K^*_{XY}, L^*_{XY} (indeks XY oznacza, że wykorzystywane są oba dostępne źródła finansowania: kapitał własny (X) i obcy (Y)), w stanach stacjonarnych stałe wartości majątku i zatrudnienia oznaczamy analogicznie: K^*_X, L^*_X (ścieżka 4, źródłem finansowania jest wyłącznie kapitał własny (X)) lub K^*_Y, L^*_Y (ścieżka 5, źródłem finansowania jest kapitał własny oraz kredyt w maksymalnym dopuszczalnym stopniu (Y)).

Stosując procedurę łączenia ścieżek, otrzymujemy rozwiązanie. Pierwszym jej etapem jest wyznaczenie ścieżek, które mogą być ścieżkami końcowymi. Następnie na podstawie przeprowadzonej charakterystyki, korzystając z własności ciągłości zmiennych stanu i mnożników Lagrangea, tworzymy trajektorie.

Założenie o zróżnicowanych (odmiennych) kosztach obsługi kapitału własnego i obcego ($i \neq (1-f)r$) implikuje dwa możliwe przypadki w rozwiązaniu:

$$i < (1-f)r,$$

$$i > (1-f)r.$$

Zatem w zależności od kosztów zaangażowania kapitału własnego i obcego (relacji pomiędzy rentownością kapitału własnego i kosztami kredytu), a także długości horyzontu, firma może wybierać między następującymi strategiami rozwoju:

I. Kapitał własny tańszy od obcego ($i < (1-f)r$)

- Początkowa wartość kapitału własnego „niska" $\left(X_0 < \frac{1}{1+h} K^*_{XY}\right)$ i długi horyzont ($z > \bar{z}$)[7], proces optymalny wyznacza trajektoria $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3$.

  Wraz ze skracaniem długości horyzontu w rozwiązaniu znika najpierw faza stacjonarna (ścieżka 4 – magistrala); rozwiązaniem jest wówczas trajektoria $1 \to 2 \to 3$. Dalsze skracanie horyzontu prowadzi do trajektorii $1 \to 2$, a następnie do ścieżki 1 (gdy horyzont jest bardzo krótki).

- Początkowa wartość kapitału „średnia" $\left(\frac{1}{1+h} K^*_{XY} \leqslant X_0 < K^*_{XY}\right)$ i długi horyzont ($z > \bar{z}$), rozwiązaniem optymalnym jest trajektoria $2 \to 3 \to 4 \to 3$.

  Jeżeli długość horyzontu nie wystarcza, aby trajektoria osiągnęła stan stacjonarny, to rozwiązaniem jest trajektoria $2 \to 3$, a gdy horyzont jest bardzo krótki, ścieżka 2.

---

[7] Krytyczną długość horyzontu ($\bar{z}$), w którym pojawia się w rozwiązaniu faza zrównoważonego wzrostu, można wyznaczyć dla konkretnej, ustalonej postaci funkcji produkcji (zob. punkt 5).

- Początkowa wartość kapitału własnego „wysoka" ($K^*_{XY} \leqslant X_0 < K^*_X$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$), proces optymalny wyznacza trajektoria $3 \to 4 \to 3$.

  W krótkim horyzoncie rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 3.
- Początkowa wartość kapitału własnego „optymalna" ($X_0 = K^*_X$) i długi horyzont ($z > \bar{z}$), proces optymalny wyznacza trajektoria $4 \to 3$.

  W krótkim horyzoncie rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 3.
- Początkowa wartość kapitału własnego wyższa od poziomu „optymalnego" ($X_0 > K^*_X$). W tym przypadku nie jest spełniony warunek (5), nie można zatem podać strategii optymalnej na gruncie analizowanego modelu.

II. Kapitał własny droższy od obcego $(i > (1-f)r)$

- Początkowa wartość kapitału własnego niższa od poziomu „optymalnego" $\left(X_0 < \frac{1}{1+h} K^*_Y\right)$ i długi horyzont ($z > \bar{z}$) proces optymalny opisuje trajektoria $1 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$.

  W miarę skracania długości horyzontu w rozwiązaniu znika faza równowagi stacjonarnej (ścieżka 5 – magistrala) i rozwiązaniem jest trajektoria $1 \to 2 \to 3$, następnie znika ścieżka 3 i rozwiązaniem jest trajektoria $1 \to 2$, w bardzo krótkim horyzoncie rozwiązanie jest jednofazowe: ścieżka 1.
- Początkowa wartość kapitału własnego „optymalna" $\left(X_0 = \frac{1}{1+h} K^*_Y\right)$ i długi horyzont ($z > \bar{z}$), proces optymalny wyznacza trajektoria $5 \to 1 \to 2 \to 3$, w miarę skracania horyzontu fazy znikają jak w przypadku pierwszym.
- Początkowa wartość kapitału własnego wyższa od poziomu „optymalnego" ($X > K^*_Y$). Tak jak w punkcie **I** w ostatnim przypadku, w tym wypadku nie jest spełniony warunek (5) i nie można sformułować strategii optymalnej.

Z założenia o zróżnicowanych (odmiennych) kosztach obsługi kapitału własnego i obcego $(i \neq (1-f)r)$ wynika także, iż przy ustalonej stopie zwrotu kapitału i oraz bankowej stopie procentowej r wybór odpowiedniej strategii zależy od relacji pomiędzy nimi, ale także od stawki podatku dochodowego płaconego przez firmy.

Jeżeli $i > r$, czyli bankowa stopa oprocentowania kredytu jest niższa od stopy zwrotu kapitału własnego, to rozwiazaniem optymalnym są strategie typu **II**, niezależnie od stawki podatku dochodowego płaconego przez firmy.

Jeżeli $i < r$, czyli bankowa stopa oprocentowania kredytu jest wyższa od stopy zwrotu kapitału własnego, to wybór strategii optymalnej zależy od stawki podatku dochodowego płaconego przez firmy. Wysoka stawka podatku $\left(f > 1 - \frac{i}{r}\right)$ oznacza wybór przez firmę strategii typu **II**, gdyż realny koszt

kredytu jest wówczas niewielki w porównaniu z kosztami finansowania kapitałem własnym. Przy niskiej stawce podatku $\left(f<1-\frac{i}{r}\right)$ firma wybiera strategię typu **I**.

ad.I. Kapitał własny tańszy od obcego $(i<(1-f)r)$

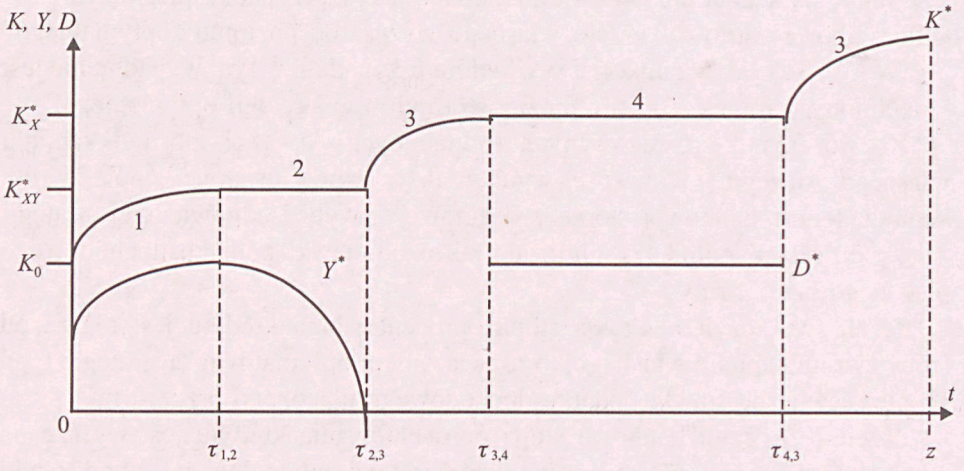
Wybór trajektorii zależy od zasobu majątku przedsiębiorstwa oraz od opłacalności dla akcjonariusza, możliwych form udziału w zyskach – dywidendy i zysku z kapitału. Aby w rozwiązaniu optymalnym pojawiła się magistrala, czyli aby począwszy od pewnego momentu $(\tau_{3,4})$, była opłacalna wypłata dywidend, dla $t\in(\tau_{3,4}, T)$, gdzie T jest momentem wstrzymania wypłaty dywidendy, musi być spełniona nierówność:

$$(1-f_D)e^{-it}>(1-f_K)\frac{X(z)}{X(t)}e^{-iz}. \tag{29}$$

Lewa strona nierówności oznacza zaktualizowaną wartość dywidendy wypłaconej akcjonariuszom z każdej złotówki zysku, a prawa strona oznacza zaktualizowaną wartość wypłaconego akcjonariuszom zysku z jednostki kapitału.

Różnice między wartościami obu form płatności jednak maleją i w momencie T następuje ich zrównanie, czyli zachodzi:

$$(1-f_D)e^{-iT}=(1-f_K)\frac{X(z)}{X(T)}e^{-iz}. \tag{30}$$



Rys. 2. Optymalne trajektorie majątku firmy, długu i dywidendy w przypadku „niskiej" początkowej wartości kapitału własnego i długiego horyzontu, gdy $i<(1-f)r$

Następuje przełączenie na ścieżkę 3, $T=\tau_{4,3}$. Zysk przestaje być kierowany na wypłatę dywidendy i służy ponownie, poprzez inwestycje, pomnażaniu kapitału firmy.

Rozwiązaniem jest zatem trajektoria $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$.

W drugiej dopuszczalnej trajektorii ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$) nie pojawia się w rozwiązaniu faza magistralna (ścieżka 4).

Jeżeli dla każdego $t \in (\tau_{3,4}, z)$ spełniona jest nierówność:

$$(1-f_D)e^{-it} < (1-f_K)\frac{X(z)}{X(t)}e^{-iz}, \tag{31}$$

to dywidenda nie powinna być w ogóle wypłacana i cały należny akcjonariuszom udział w zysku powinni otrzymać w postaci zysku z kapitału. Rozwiązaniem jest wówczas trajektoria $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Osiągnąwszy stan (Q_X^*, K_X^*, L_X^*), co w poprzednim rozwiązaniu oznaczało wejście na magistralę (punkt $t_{3,4}$), firma nie rozpoczyna wypłaty dywidendy i, nie „zatrzymując się" w tym stanie, nadal pomnaża majątek poprzez akumulowanie zysku w przedsiębiorstwie i finansowanie inwestycji.

Jeżeli horyzont nie jest wystarczająco długi ($z \leqslant \bar{z}$), to rozwiązanie jedynie „zmierza" w kierunku stanu stacjonarnego, według tych samych reguł, co przy długim horyzoncie. Stan stacjonarny nie zostaje jednak osiągnięty.

Ponieważ stawka podatku od dywidendy jest wyższa niż stopa opodatkowania zysku z kapitału, zatem otrzymywanie dywidendy zaczyna być dla akcjonariuszy opłacalne dopiero w długim horyzoncie, gdy nadzieja na uzyskanie zysku z kapitału jest odległa. Zatem długofalowa strategia finansowa firmy dzieli horyzont na trzy zasadnicze fazy: dochodzenia do magistrali (w zadaniu tym jest nią ścieżka równowagi stacjonarnej – ścieżka 4), rozwój na magistrali i zejście z niej pod koniec horyzontu.

Zanim przedsiębiorstwo osiągnie magistralną ścieżkę równowagi stacjonarnej, musi dojść do zmiany struktury kapitału, gdyż długotrwałe korzystanie z kredytów jest w tym przypadku zbyt kosztowne w porównaniu z finansowaniem wyłącznie ze środków własnych. Ścieżkę równowagi stacjonarnej (magistralę) charakteryzuje stały podział nadwyżki finansowej pomiędzy akcjonariuszy (wypłata dywidendy) i inwestycje, które pozwalają na reprodukcję majątku na poziomie K_X^*.

Gdy wypłata dywidendy przestaje być opłacalna (moment $\tau_{4,3}$), następuje „zejście" optymalnej trajektorii z magistrali. Nadwyżka finansowa jest w całości zatrzymywana w przedsiębiorstwie i służy akumulacji kapitału (poprzez inwestycje).

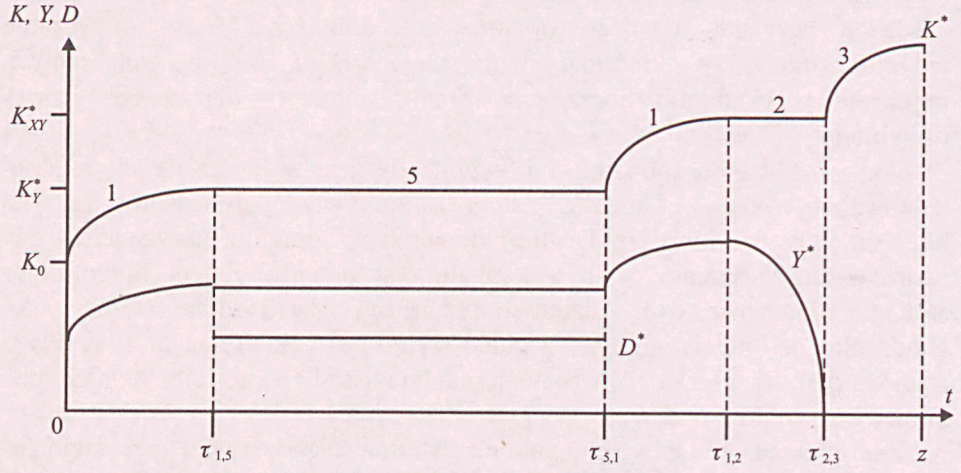
Jeżeli zasób kapitału firmy jest wystarczający do prowadzenia zamierzonej działalności bez korzystania z kredytów nawet w początkowej fazie rozwoju, w rozwiązaniu znikają dwie pierwsze fazy (nie pojawia się faza wzrostu z wykorzystaniem kredytu oraz faza reorganizacji struktury kapitału).

ad.II. Kapitał własny droższy od obcego $(i>(1-f)r)$.

Wybór trajektorii zależy, tak jak w poprzednim punkcie, od długości horyzontu, opłacalności dwóch możliwych form udziału w zyskach – dywidendy i zysku z kapitału, a także od relacji pomiędzy stopami podatkowymi f_D i f_K. Obie główne trajektorie optymalne ($1 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$ i $1 \to 2 \to 3$) różnią się obecnością (lub brakiem) fazy stacjonarnej – ścieżki 5.

Jeżeli nierówność (29) jest spełniona dla $t \in \langle \tau_{1,5}, T)$, gdzie T jest momentem wstrzymania wypłat dywidendy, rozwiązaniem jest trajektoria $1 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$ (lub $1 \to 5 \to 1 \to 2$, $1 \to 5 \to 1$ zależnie od parametrów modelu).

Jeżeli jednak dla każdego $t \in \langle \tau_{1,5}, z \rangle$ spełniona jest nierówność (31), to rozwiązaniem jest trajektoria $1 \to 2 \to 3$ (lub w miarę skracania horyzontu $1 \to 2$, 1).



Rys. 3. Optymalne trajektorie majątku firmy, długu i dywidendy w przypadku początkowej wartości kapitału własnego niższej od optymalnej i długiego horyzontu, gdy $i>(1-f)r$

Osiągnięcie magistrali (ścieżka 5) zapewnia jedynie długi horyzont planowania ($z>\bar{z}$). Ponieważ kredyt jest tani, w porównaniu z kapitałem własnym, więc jest wykorzystywany tak długo, jak długo jest to opłacalne. Dopiero w ostatniej fazie (zejścia z magistrali) przedsiębiorstwo zmierza ku zmianie struktury kapitału, aby zapewnić maksymalny zasób kapitału własnego w momencie końcowym.

Długość fazy zejścia (stała dla ustalonego zbioru parametrów), czyli odległość punktu przełączenia $\tau_{5,1}$ od końca horyzontu, zależy od różnicy w stawkach podatkowych oraz od stopy wzrostu kapitału. Im większa jest różnica w stawkach (i im wyższa stopa wzrostu), tym punkt przełączenia $\tau_{5,1}$ jest bardziej oddalony od z. Jeśli jednak stopy f_D i f_K różnią się niewiele, to może się okazać, że punkt przełączenia $\tau_{5,1}$ wypada zbyt blisko momentu z, aby mogły nastąpić dalsze przełączenia. Optymalna trajektoria kończy się wtedy na ścieżce 1 lub 2. Nie można podać ogólnej reguły ustalającej związek pomiędzy wartościami parametrów modelu a postacią ścieżki końcowej. Dopiero wprowadzenie szczegółowej funkcji produkcji i ustalenie zbioru wartości parametrów zadania pozwala na jednoznaczne wskazanie postaci optymalnej trajektorii.

Otrzymane rozwiązanie jest zgodne z teorią finansów przedsiębiorstw, głoszącą, że „w warunkach klasycznego podatku dochodowego zawsze bardziej opłacalne będzie otrzymywanie dochodów w postaci zysku z kapitału niż w postaci dywidendy[8].

Jest to rozwiązanie optymalne z punktu widzenia akcjonariusza – osoby fizycznej. Polskie prawo podatkowe stwarza bowiem istotne różnice w opodatkowaniu dywidendy i zysku z kapitału otrzymywanego przez osoby fizyczne i prawne. Osoba fizyczna od otrzymanej dywidendy płaci zryczałtowany podatek w wysokości 20%[9], natomiast uzyskane przez nią dochody z kapitału są zwolnione od podatku[10].

Dla osoby prawnej (spółki polskiej) dywidenda nie ulega kumulacji z innymi dochodami. Jest opodatkowana według zryczałtowanej stawki w wysokości 20% i podatek ten może być odliczony od innych zobowiązań podatkowych spółki[11]. Natomiast wszystkie dochody spółki, bez względu na źródło pochodzenia (czyli także dochody z kapitału), są opodatkowane według jednolitej stawki podatkowej[12].

Zatem dla akcjonariuszy – osób prawnych, według polskiego prawa podatkowego, $f_D < f_K$ i opisany model nie może być stosowany.

4. Zadanie z nieskończonym horyzontem

Z charakterystyki rozwiązania zadania (7), (10)-(15) widać, iż wybór trajektorii zależy (w każdym z przypadków) od stóp podatkowych f_D, f_K oraz od długości horyzontu z. W miarę wydłużania horyzontu, przy ustalonych f_D

[8] Zob. *Finanse i bankowość, zarys problematyki*, red. E. Bogacka-Kisiel, M. Łyszczak, AE, Wrocław 1999, s. 103.

[9] Ustawa o podatku od osób fizycznych, art. 30.

[10] Ibidem, art. 21.

[11] Ustawa o podatku od osób prawnych, art. 22, 23.

[12] Ibidem, art. 7.

i f_K, w rozwiązaniu, począwszy od pewnej wartości z, pojawia się faza stacjonarna (ścieżka 4 lub 5). Zauważmy, że gdy horyzont wydłużymy do nieskończoności ($z=+\infty$) kryterium (7) przyjmie postać:

$$\max \int_0^{\infty} D(t)e^{-it}dt. \tag{32}$$

Interesuje nas zadanie z kryterium (32) i ograniczeniami (10)-(15). W warunkach optymalności (17)-(28) dotychczasowe warunki transwersalności (25)-(28) zostaną zastąpione przez warunek:

$$\lim_{z\to\infty} \lambda_2(z)e^{-iz}=0. \tag{33}$$

Z (20) wynika, że warunek ten jest spełniony tylko wtedy, gdy $\mu(t)=0$, zatem ścieżkami końcowymi mogą być wyłącznie ścieżki: 4 lub 5.

Strategie optymalne są więc takie, jak w rozwiązaniu modelu podstawowego[13]. W zadaniu z nieskończonym horyzontem mamy następujące, główne, długofalowe trajektorie optymalne:

gdy $i<(1-f)r$ trajektoria $1\to 2\to 3\to 4$ (lub odpowiednio trajektoria $2\to 3\to 4$, $3\to 4$, 4),

gdy $i>(1-f)r$ trajektoria $1\to 5$ (lub ścieżka 5).

5. Szczególny przypadek modelu (z funkcją produkcji Cobba-Douglasa)

5.1. Optymalne wartości zmiennych

Przyjmując w zadaniu (7), (10)-(15) statyczną funkcję produkcji Cobba-Douglasa jednorodną, stopnia θ: $Q(K, L)=AK^{\alpha}L^{\beta}$, $\alpha+\beta=\theta$, $0<\theta<1$ (funkcja tej postaci spełnia założenia stawiane funkcji produkcji w modelu), można wyznaczyć optymalne, stałe poziomy majątku i zatrudnienia, charakteryzujące fazę reorganizacji (K^*_{XY}, L^*_{XY}) oraz fazę równowagi stacjonarnej – ścieżkę 4 (K^*_X, L^*_X) lub ścieżkę 5 (K^*_Y, L^*_Y)[14], równania dynamiki zmiennych oraz długości poszczególnych faz w zależności od stałych parametrów modelu.

---

[13] Por. E. Rychłowska-Musiał, op. cit.

[14] Ibidem, s. 202-203.

5.2. Wyznaczanie ścieżek wzrostu i punktów przełączania

I. $i<(1-f)r$

- Ścieżka 1

Ścieżkę charakteryzuje wzrost majątku i zatrudnienia przy maksymalnym, dopuszczalnym udziale zadłużenia firmy. Biorąc pod uwagę warunki (1) i (11) otrzymujemy równanie:

$$\dot{K}(t)=(1+h)(1-f)\left(pQ(K,L)-wL(t)-\left(a+\frac{rh}{1+h}\right)K(t)\right). \tag{34}$$

Z warunku (21) oraz postaci pochodnych funkcji produkcji otrzymujemy zależność między zatrudnieniem a zasobem majątku w każdym momencie t:

$$L^*(t)=\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} K(t)^{\frac{-\alpha}{\beta-1}}. \tag{35}$$

Podstawiając (35) do (34), otrzymujemy równanie różniczkowe typu Bernoullie'go[15]:

$$\dot{K}(t)=(1+h)(1-f)p(1-\beta)A\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} K(t)^{\frac{-\alpha}{\beta-1}}-$$

$$-(1+h)(1-f)\left(a+\frac{rh}{1+h}\right)K(t). \tag{36}$$

Rozwiązaniem tego równania z uwzględnieniem warunku początkowego (15) jest funkcja:

$$K^*(t)=\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(K_0^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-(1-n)C_2t}\right)^{\frac{1}{1-n}} \quad \text{dla } t\in\langle 0,\tau_{1,2}\rangle, \tag{37}$$

a także odpowiednio:

$$L^*(t)=\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(K_0^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-(1-n)C_2t}\right)^{\frac{n}{1-n}} \tag{38}$$

$$\text{dla } t\in\langle 0,\tau_{1,2}\rangle,$$

---

[15] Zob. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, t. 2, PWN, Warszawa 1962, s. 313-314.

gdzie:

$$C_1=(1+h)(1-f)p(1-\beta)A\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}, \tag{39}$$

$$C_2=(1+h)(1-f)\left(a+\frac{rh}{1+h}\right), \tag{40}$$

$$n=\frac{-\alpha}{\beta-1}. \tag{41}$$

Funkcje $K^*(t)$ oraz $L^*(t)$ są wklęsłymi funkcjami rosnącymi $(\frac{dK}{dt}>0,\ \frac{dL}{dt}>0,\ \frac{d^2K}{dt^2}<0,\ \frac{d^2L}{dt^2}<0)$.

- Punkt $\tau_{1,2}$

Punkt $\tau_{1,2}$ to moment osiągnięcia przez firmę poziomu majątku K^*_{XY} (oraz poziomu zatrudnienia L^*_{XY}). Funkcja $K(t)$ jest funkcją ciągłą, zatem K^*_{XY} spełnia równanie (37):

$$K^*_{XY}=\left(\frac{C_1}{C_2}+\left(K_0^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-(1-n)C_2\tau_{1,2}}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{42}$$

Z równania (42) wyznaczamy szukany punkt przełączenia $\tau_{1,2}$:

$$\tau_{1,2}=\frac{1}{(1-n)C_2}\ln\frac{K_0^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}}{(K^*_{XY})^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}}. \tag{43}$$

- Ścieżka 2

Majątek stabilizuje się na stałym poziomie K^*_{XY}, a wielkościami, które ulegają zmianie, są: wartość kapitału własnego i poziom zadłużenia. Ze względu na (1) i (11) otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne[16]:

$$\dot{Y}(t)=-(1-f)(pQ^*_{XY}-wL^*_{XY}-aK^*_{XY})+(1-f)rY(t). \tag{44}$$

---

[16] Ibidem, s. 279-291.

Rozwiązaniem tego równania z uwzględnieniem warunku początkowego

$$Y(\tau_{1,2})=\frac{h}{1+h}K^*_{XY}$$

jest funkcja:

$$Y^*(t)=\frac{C_3}{C_4}+\left(\frac{h}{1+h}K^*_{XY}-\frac{C_3}{C_4}\right)e^{C_4(t-\tau_{1,2})} \quad \text{dla } t\in\langle\tau_{1,2},\tau_{2,3}\rangle, \tag{45}$$

a stąd otrzymujemy:

$$X^*(t)=\left(K^*_{XY}-\frac{C_3}{C_4}\right)-\left(\frac{h}{1+h}K^*_{XY}-\frac{C_3}{C_4}\right)e^{C_4(t-\tau_{1,2})} \quad \text{dla } t\in\langle\tau_{1,2},\tau_{2,3}\rangle, \tag{46}$$

gdzie:

$$C_3=(1-f)(pQ^*_{XY}-wL^*_{XY}-aK^*_{XY}), \tag{47}$$

$$C_4=(1-f)r. \tag{48}$$

Funkcja $Y^*(t)$ jest wklęsłą funkcją malejącą ($\frac{dY}{dt}<0$, $\frac{d^2Y}{dt^2}<0$), $X^*(t)$ jest wypukłą funkcją rosnącą ($\frac{dX}{dt}>0$, $\frac{d^2X}{dt^2}>0$).

- Punkt $\tau_{2,3}$

Jest to moment zakończenia spłaty całej kwoty zadłużenia, czyli moment, w którym $Y^*(\tau_{2,3})=0$. Zatem równanie (45) dla $t=\tau_{2,3}$ ma następującą postać:

$$0=\frac{C_3}{C_4}+\left(\frac{h}{1+h}K^*_{XY}-\frac{C_3}{C_4}\right)e^{C_4(\tau_{2,3}-\tau_{1,2})}. \tag{49}$$

Można z niego wyznaczyć szukany punkt przełączenia:

$$\tau_{2,3}=\frac{1}{C_4}\ln\frac{-\frac{C_3}{C_4}}{\frac{h}{1+h}K^*_{XY}-\frac{C_3}{C_4}}+\tau_{1,2}. \tag{50}$$

- Ścieżka 3

W momencie $\tau_{2,3}$ firma wchodzi w trzecią fazę rozwoju. Produkcja, majątek i zatrudnienie zaczynają wzrastać. Trajektorie wzrostu otrzymujemy, rozwiązując równanie (11):

$$\dot{K}(t)=(1-f)(pQ(K,L)-wL(t)-aK(t)). \tag{51}$$

Podstawiając w powyższym równaniu zależność (35), otrzymujemy równanie różniczkowe typu Bernoullie'go:

$$\dot{K}(t)=(1-f)p(1-\beta)A\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}K(t)^{\frac{-\alpha}{\beta-1}}-(1-f)aK(t). \tag{52}$$

Rozwiązaniem tego równania z uwzględnieniem warunku początkowego $K(\tau_{2,3})=K_2^*$ jest funkcja:

$$K^*(t)=\left(\frac{C_5}{C_6}+\left((K_{XY}^*)^{1-n}-\frac{C_5}{C_6}\right)e^{-(1-n)C_6(t-\tau_{2,3})}\right)^{\frac{1}{1-n}} \tag{53}$$

$$\text{dla} \quad t\in\langle\tau_{2,3},\tau_{3,4}\rangle,$$

a także odpowiednio:

$$L^*(t)=\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\frac{C_5}{C_6}+\left((K_{XY}^*)^{1-n}-\frac{C_5}{C_6}\right)e^{-(1-n)C_6(t-\tau_{2,3})}\right)^{\frac{n}{1-n}} \tag{54}$$

$$\text{dla} \quad t\in\langle\tau_{2,3},\tau_{3,4}\rangle,$$

gdzie:

$$C_5=(1-f)p(1-\beta)A\left(\frac{w}{p\beta A}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}, \tag{55}$$

$$C_6=(1-f)a, \tag{56}$$

$$n=\frac{-\alpha}{\beta-1}. \tag{57}$$

Funkcje $K^*(t)$ oraz $L^*(t)$ są wklęsłymi funkcjami rosnącymi ($\frac{dK}{dt}>0$, $\frac{dL}{dt}>0$, $\frac{d^2K}{dt^2}<0$, $\frac{d^2L}{dt^2}<0$) (jak na ścieżce 1).

- Punkt $\tau_{3,4}$

Punkt $\tau_{3,4}$ to moment, w którym firma osiąga optymalny poziom majątku i zatrudnienia, który utrzymuje do końca okresu planowania (K_X^*, L_X^*). Równanie (53) dla $t=\tau_{3,4}$ przyjmuje następującą postać:

$$K_X^* = \left(\frac{C_5}{C_6} + \left((K_{XY}^*)^{1-n} - \frac{C_5}{C_6}\right) e^{-(1-n)C_6(\tau_{3,4}-\tau_{2,3})}\right)^{\frac{1}{1-n}}. \tag{58}$$

Można z niego wyznaczyć szukany punkt przełączenia:

$$\tau_{3,4} = \frac{1}{(1-n)C_6} \ln \frac{(K_{XY}^*)^{1-n} - \frac{C_5}{C_6}}{(K_X^*)^{1-n} - \frac{C_5}{C_6}} + \tau_{2,3}. \tag{59}$$

- Ścieżka 4 to faza stacjonarna (magistrala) optymalny poziom majątku w tej fazie to K_X^*, a zatrudnienia L_X^* [17].

Punkt przełączenia $\tau_{3,4}$ można ustalić dopiero po wyznaczeniu optymalnej ścieżki majątku w ostatniej fazie, gdyż długość fazy końcowej („zejścia" z magistrali) jest stała.

- Ścieżka 3 (końcowa)

Ścieżkę wzrostu majątku otrzymujemy, rozwiązując równanie (36) z warunkiem początkowym $K(\tau_{4,3})=K_X^*$:

$$K^*(t) = \left(\frac{C_5}{C_6} + \left((K_X^*)^{1-n} - \frac{C_5}{C_6}\right) e^{-(1-n)C_6(t-\tau_{4,3})}\right)^{\frac{1}{1-n}} \tag{60}$$

$$\text{dla} \quad t \in \langle \tau_{4,3}, z \rangle,$$

gdzie stałe C_5, C_6, n są zdefiniowane w (55)-(57).

- Punkt $\tau_{4,3}$

W punkcie przełączenia zachodzi równość (30). Przekształcając ją i podstawiając (60) (ponieważ $K(t)=X(t)$) dla $t=z$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{1-f_D}{1-f_K} K_X^*\right)^{1-n} e^{i(1-n)(z-\tau_{4,3})} = \frac{C_5}{C_6} + \left((K_X^*)^{1-n} - \frac{C_5}{C_6}\right) e^{-C_6(1-n)(z-\tau_{4,3})}. \tag{61}$$

---

[17] E. Rychłowska-Musiał, op. cit., s. 212-213.

Zależność ta wyraża związek pomiędzy punktem przełączenia $\tau_{4,3}$ a parametrami i stałymi wartościami w modelu. Nie można jednak w ogólnym przypadku równania (61) rozwiązać analitycznie.

Jeżeli $\tau_{3,4}=\tau_{4,3}$, to w rozwiązaniu nie pojawia się faza stacjonarna. Krytyczna długość horyzontu $\bar{z}$ jest pierwiastkiem równania:

$$\left(\frac{1-f_D}{1-f_K}K^*_{XY}\right)^{1-n} e^{i(1-n)(\bar{z}-\tau_{3,4})}=\frac{C_5}{C_6}+\left((K^*_{XY})^{1-n}-\frac{C_5}{C_6}\right)e^{-C_6(1-n)(\bar{z}-\tau_{3,4})}, \quad (62)$$

gdzie punkt $\tau_{3,4}$ spełnia równanie (59), a stałe C_5, C_6 i n są zdefiniowane w (55)-(57).

II. $i>(1-f)r$

- Ścieżka 1

  Wzrost majątku i zatrudnienia opisują równania (37) i (38).

- Punkt $\tau_{1,5}$

  Punkt $\tau_{1,5}$ jest momentem, w którym majątek firmy osiąga poziom K^*_Y (a zatrudnienie poziom L^*_Y). Wyznaczamy go analogicznie jak punkt $\tau_{1,2}$:

$$\tau_{1,5}=\frac{1}{(1-n)C_2}\ln\frac{K_0^{1-n}-\dfrac{C_1}{C_2}}{(K^*_Y)^{1-n}-\dfrac{C_1}{C_2}}. \quad (63)$$

- Ścieżka 5 to faza stacjonarna (magistrala). Optymalny poziom majątku w tej fazie to K^*_Y, a zatrudnienia L^*_Y.

  Punkt przełączenia $\tau_{5,1}$ będzie można ustalić dopiero po wyznaczeniu optymalnej ścieżki majątku w fazie „zejścia" z magistrali.

- Ścieżka 1 (w fazie „zejścia")

  Ścieżkę wzrostu majątku otrzymujemy, rozwiązując równanie (36) z warunkiem początkowym $K(\tau_{5,1})=K^*_Y$:

$$K^*(t)=\left(\frac{C_1}{C_2}+\left((K^*_Y)^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-(1-n)C_2(t-\tau_{5,1})}\right) \quad \text{dla} \quad t\in\langle\tau_{5,1},z\rangle, \quad (64)$$

gdzie C_1, C_2, n są zdefiniowane przez (39)-(41).

- Punkt $\tau_{5,1}$

  Spełniona jest zależność analogiczna do (30):

$$(1-f_D)e^{-i\tau_{5,1}}=(1-f_K)\frac{X(z)}{X(\tau_{5,1})}e^{-iz}. \tag{65}$$

  Przekształcając (65) zważywszy na (64) (pamiętając, że $K(t)=(1+h)X(t)$), otrzymujemy dla $t=z$:

$$\left(\frac{1-f_D}{1-f_K}K_Y^*\right)^{1-n}e^{i(1-n)(z-\tau_{5,1})}=\frac{C_1}{C_2}+\left((K_Y^*)^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-C_2(1-n)(z-\tau_{5,1})}, \tag{66}$$

  Równania (66) nie można rozwiązać analitycznie w przypadku ogólnym.
- Punkt $\tau_{1,2}$:

$$\tau_{1,2}=\frac{1}{(1-n)C_2}\ln\frac{(K_Y^*)^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}}{(K_{XY}^*)^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}}+\tau_{5,1}. \tag{67}$$

- Ścieżka 2

  Optymalną ścieżkę redukcji zadłużenia opisuje równanie (45), a wzrostu kapitału własnego równanie (46).
- Punkt $\tau_{2,3}$ spełnia równanie (50).
- Ścieżka 3

  Optymalna ścieżka wzrostu majątku $K^*(t)$ jest opisana przez (53), a optymalna ścieżka wzrostu zatrudnienia przez $L^*(t)$ (54).

  Jeżeli $\tau_{1,5}=\tau_{5,1}$, to w rozwiązaniu nie pojawia się faza stacjonarna. Krytyczna długość horyzontu $\bar{z}$ jest pierwiastkiem równania:

$$\left(\frac{1-f_D}{1-f_K}K_Y^*\right)^{1-n}e^{i(1-n)(\bar{z}-\tau_{1,5})}=\frac{C_1}{C_6}+\left((K_Y^*)^{1-n}-\frac{C_1}{C_2}\right)e^{-C_2(1-n)(\bar{z}-\tau_{1,5})}, \tag{68}$$

  gdzie punkt $\tau_{1,5}$ spełnia równanie (63), a stałe C_1, C_2 i n są zdefiniowane w (39)-(41).

6. Optymalne strategie finansowe wybranych polskich spółek akcyjnych

Dostosowana do wymogów otoczenia oraz uwzględniająca wewnętrzny stan firmy struktura kapitału jest jednym z czynników zapewniających firmie sukces ekonomiczny. Może być jednym z instrumentów sterowania wzrostem, jeśli

decyzje o zmianie źródeł finansowania będą podjęte w odpowiednim czasie. W punkcie tym prześledzimy, jak na gruncie sformułowanego modelu powinna kształtować się optymalna struktura kapitału wybranych polskich przedsiębiorstw. Wyznaczymy długości horyzontu, w którym w rozwiązaniu pojawia się faza stacjonarna. Wyznaczymy także optymalne poziomy majątku i zatrudnienia w tej fazie oraz ocenimy długości poszczególnych faz rozwoju firm. Strategie optymalne sformułujemy z punktu widzenia akcjonariuszy – osób fizycznych (zgodnie z założeniami modelu).

6.1. Zakłady Mięsne SA

Za początek okresu planowania przyjmujemy 1 stycznia 1998 roku. Początkowy zasób majątku grupy kapitałowej Zakłady Mięsne SA, kapitał własny i zatrudnienie kształtują się na poziomach:

$K_0 = 231\ 953{,}6$ tys. zł,
$X_0 = 190\ 773{,}6$ tys. zł,
$L_0 = 4{,}5$ tys. osób.

Pozostałe parametry przyjmują następujące wartości:

$a = 0{,}1$ – stopa deprecjacji,
$f = 0{,}36$ – stawka podatku od osób prawnych,
$r = 0{,}14$ – średnie oprocentowanie kredytu,
$i = 0{,}07$ – stopa dyskontowa,
$w = 883{,}6$ zł/mies. – przeciętne wynagrodzenie miesięczne,
$c = 0{,}14$ – średni koszt kapitału w spółce,
$m = 0{,}5$ – współczynnik materiałochłonności,
$\alpha = 0{,}14$ – elastyczność dochodu względem majątku[18],
$\beta = 0{,}18$ – elastyczność dochodu względem pracy,
$A = 8\ 152\ 132{,}08$ – współczynnik skali,
$f_D = 0{,}2$ – stawka podatku od dywidendy,
$f_K = 0$ – stawka podatku od zysku z kapitału (dla akcjonariuszy – osób fizycznych).

Parametry spełniają warunek:

$$i < (1-f)r.$$

[18] Parametry funkcji produkcji (A, α, β) wyznaczono, rozwiązując klasyczne statyczne zadanie maksymalizacji dochodu w warunkach długookresowej strategii rozwoju, przyjęto dane z pierwszego półrocza 1998 roku, zob. E. Rychłowska-Musiał, op. cit., s. 212-213.

Spółka Zakłady Mięsne SA powinna swoją działalność finansować przede wszystkim ze środków własnych. Ponieważ jednak w momencie początkowym firma nie ma wystarczających zasobów kapitału, może stosować kredyt, lecz jedynie jako finansowy instrument jej wzrostu w początkowej fazie rozwoju.

Wybór optymalnej strategii finansowej zależy od długości horyzontu.

Rozwiązując równanie (62), można wyznaczyć krytyczną długość horyzontu $\bar{z}=46$ lat, po przekroczeniu tej długości krytycznej w rozwiązaniu pojawia się faza stacjonarna (z wypłatą dywidendy).

1. Gdy horyzont nie przekracza 46 lat, wówczas strategia optymalna jest trójfazowa (trajektoria $1 \to 2 \to 3$). Spółka rozpoczyna działalność z maksymalnym dopuszczalnym poziomem zadłużenia. Przez krótki okres ($\tau_{1,2}=0{,}3$) inwestuje cały dostępny kapitał. Gdy po czterech miesiącach jej majątek osiągnie poziom $K^*_{XY}=389\,460{,}7$ tys. zł, a zatrudnienie poziom $L^*_{XY}=11{,}1$ tys. osób, zarząd firmy powinien podjąć decyzję o zmianie struktury kapitału. W ciągu około pół roku ($\tau_{2,3}=0{,}9$) powinny zostać spłacone wszystkie kredyty. W fazie tej na inwestycje przeznacza się tylko 10% nadwyżki finansowej tak, aby utrzymać stały poziom majątku. Po spłaceniu całego zadłużenia rozpoczyna się kolejna faza wzrostu, przy czym majątek jest finansowany wyłącznie z kapitału własnego. Faza ta trwa do końca horyzontu. Strategia optymalna w tym przypadku nie przewiduje w ogóle wypłaty dywidendy. Nie występuje faza stacjonarna. Jedynym zyskiem akcjonariusza jest zysk z kapitału zrealizowany na koniec horyzontu.

Faza 1 4 miesiące	Faza 2 6 miesięcy	Faza 3 9 lat 2 miesiące
Wzrost z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t)=K^*_{XY}$, $L^*(t)=L^*_{XY}$	Wzrost, tylko majątek własny

2. Gdy długość horyzontu przekracza 46 lat, strategia optymalna jest pięciofazowa (trajektoria $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3$): trójfazowy okres „dochodzenia" do magistrali (trajektoria $1 \to 2 \to 3$), magistrala (ścieżka 4) i faza „zejścia" z magistrali (ścieżka 3). Charakterystyka okresu „dochodzenia" do magistrali

jest taka sama, jak przedstawiona wyżej, w punkcie 1. Ponieważ teraz horyzont jest wystarczająco długi, po upływie około roku i 2 miesięcy ($\tau_{3,4}=1{,}1$) zostaje osiągnięta faza stacjonarna; 10% nadwyżki finansowej przeznaczanej na inwestycje pozwala na reprodukcję majątku na poziomie $K_X^*=459\ 060{,}6$ tys. zł. Liczba zatrudnionych w spółce utrzymuje się na poziomie $L_X^*=11{,}4$ tys. osób. 90% nadwyżki finansowej (cały zysk netto) przeznacza się na wypłatę dywidendy. Uwzględnienie przez decydentów różnic w opodatkowaniu dywidendy i zysku z kapitału powoduje w pewnym momencie „zejście" z magistrali ($\tau_{4,3}=z-44{,}9$). Wypłata dywidendy zostaje wstrzymana. Rozpoczyna się kolejna, prawie 45-letnia faza wzrostu, w której całą nadwyżkę finansową przeznacza się na inwestycje. Źródłem finansowania majątku spółki jest wyłącznie kapitał własny. Długość tej fazy nie zmienia się wraz ze wzrostem długości horyzontu. W dłuższym horyzoncie wydłuża się faza stacjonarna.

Czas trwania poszczególnych faz dla strategii 50-letniej oraz ich krótką charakterystykę prezentuje poniższa tabela:

Faza 1 4 miesiące	Faza 2 6 miesięcy	Faza 3 4 miesiące	Faza 4 4 lata	Faza 5 44 lata 10 miesięcy
Wzrost z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t)=K_{XY}^*$, $L^*(t)=L_{XY}^*$	Wzrost, tylko majątek własny	Stan stacjonarny, dywidenda, $K^*(t)=K_X^*$, $L^*(t)=L_X^*$	Wzrost, tylko majątek własny

Wnioski

Zmiana struktury kapitału wpływa dodatnio na wartość firmy. Spółka Zakłady Mięsne SA powinna wziąć pod uwagę następujące cele strategiczne:

- zmiana struktury kapitału (źródeł finansowania majątku) po krótkim czasie (4 miesiące) szybkiego wzrostu wspieranego kapitałem obcym (kredyty),
- wypłata dywidendy przez 4 lata, począwszy od drugiego roku (ale tylko wówczas, gdy horyzont strategii przekracza 46 lat),
- faza akumulacji kapitału do końca horyzontu.

6.2. Przedsiębiorstwo Cukiernicze SA

Za początek okresu planowania przyjmujemy 1 stycznia 1998 roku.

Początkowy zasób majątku Przedsiębiorstwa Cukierniczego SA, kapitał własny i zatrudnienie kształtują się na poziomach:

$K_0 = 132\ 214{,}7$ tys. zł,

$X_0 = 16\ 488{,}9$ tys. zł,

$L_0 = 1{,}71$ tys. osób.

Pozostałe parametry przyjmują następujące wartości:

$$a=0{,}1; \quad f=0{,}36; \quad r=0{,}18; \quad i=0{,}13; \quad h=1; \quad w=890 \text{ zł/mies.};$$

$$c=0{,}14; \quad m=0{,}5; \quad \alpha=0{,}24; \quad \beta=0{,}24; \quad A=263\ 671;$$

$$f_D=0{,}2; \quad f_K=0.$$

Parametry spełniają warunek:

$$i>(1-f)r.$$

Udział kredytów w finansowaniu działalności produkcyjnej przynosi spółce większe korzyści niż wykorzystywanie jedynie środków własnych.

Wybór optymalnej strategii finansowej zależy od długości horyzontu.

Rozwiązując równanie (68), można wyznaczyć krytyczną długość horyzontu $\bar{z}=21$ lat. Po przekroczeniu tej długości krytycznej w rozwiązaniu pojawia się faza stacjonarna (z wypłatą dywidendy).

1. Gdy horyzont nie przekracza 21 lat, strategia optymalna jest trójfazowa (trajektoria $1 \to 2 \to 3$). Pierwsza i trzecia to fazy wzrostu majątku, produkcji i zatrudnienia, w których cała nadwyżka finansowa przeznaczana jest na inwestycje. Dzieli je trwająca nieco ponad rok faza, w której firma powinna dokonać zmiany struktury źródeł finansowania – spłacić wszystkie kredyty i przestawić się na finansowanie majątku wyłącznie kapitałem własnym. Na inwestycje należy kierować w tym czasie tylko 10% nadwyżki finansowej tak, aby utrzymać stały poziom majątku $K^*_{XY}=182\ 782{,}4$ tys. zł i zatrudnienia $L^*_{XY}=4{,}7$ tys. osób. Jedynym źródłem zysku akcjonariuszy jest zysk z kapitału na koniec horyzontu; dywidenda nie jest wypłacana.

Położenia punktów przełączenia $\tau_{1,2}=0{,}2$; $\tau_{2,3}=1{,}4$, wyznaczamy odpowiednio, korzystając ze wzorów (43) i (50).

Czas trwania poszczególnych faz w strategii 10-letniej oraz ich charakterystykę prezentuje tabela:

Faza 1 4 miesiące	Faza 2 1 rok 2 miesiące	Faza 3 8 lat 8 miesięcy
Wzrost z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t)=K^*_{XY}$, $L^*(t)=L^*_{XY}$	Wzrost, tylko majątek własny

2. Gdy długość horyzontu przekracza 21 lat, strategia optymalna jest pięciofazowa (trajektoria $1 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$): faza „dochodzenia" do magistrali (ścieżka 1), magistrala (ścieżka 5) i trójfazowy okres „zejścia" z magistrali (trajektoria $1 \to 2 \to 3$). Fazy „dochodzenia" i „zejścia" z magistrali są fazami wzrostu. Zmiana struktury kapitału dokonuje się w fazie „zejścia". Spółka spłaca wszystkie kredyty, utrzymując majątek na poziomie $K^*_{XY}=182\ 782{,}4$ tys. zł i zatrudnienia $L^*_{XY}=4{,}7$ tys. osób. Ma na to rok, po czym następuje 18-letnia faza wzrostu (cała nadwyżka finansowa jest przeznaczana na inwestycje), w której jedynym źródłem finansowania majątku jest kapitał własny spółki. Faza środkowa wiąże się z rozwojem firmy na magistrali (czas trwania tej fazy zależy od długości horyzontu). Towarzyszy mu wysoka dywidenda (90% nadwyżki finansowej), a inwestycje w wysokości 10% nadwyżki finansowej mają tylko zapewnić reprodukcję prostą majątku na poziomie $K^*_Y=172\ 202{,}1$ tys. zł i zatrudnienie na poziomie $L^*_Y=4{,}6$ tys. osób.

Położenie punktów przełączenia dla strategii 25-letniej:

$$\tau_{1,5}=0{,}3; \quad \tau_{5,1}=5{,}95; \quad \tau_{1,2}=5{,}96; \quad \tau_{2,3}=7,$$

wyznaczono na podstawie (63), (66), (43) i (50).

Czas trwania poszczególnych faz w przypadku strategii 25-letniej oraz ich charakterystykę prezentuje poniższa tabela:

Faza 1 4 miesiące	Faza 2 5 lat 8 miesięcy	Faza 3 0,1 miesiąca	Faza 4 1 rok	Faza 5 18 lat
Wzrost z maksymalnym długiem	Stan stacjonarny, dywidenda $K^*(t)=K^*_Y$, $L^*(t)=L^*_Y$	Wzrost, z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t)=K^*_{XY}$, $L^*(t)=L^*_{XY}$	Wzrost, tylko majątek własny

Wnioski

Firma osiąga korzyści ze zmiany struktury źródeł finansowania. Spółka Przedsiębiorstwo Cukiernicze SA powinna rozważyć następujące cele strategiczne:

- w strategiach z horyzontem nieprzekraczającym 21 lat zmiana struktury kapitału powinna dokonać się już w pierwszym roku działalności,
- wypłata dywidendy (nawet od pierwszego roku) możliwa tylko pod warunkiem przyjęcia długofalowej strategii (z horyzontem ponad 21-letnim),
- w strategiach długofalowych zmiana struktury kapitału zalecana dopiero po zakończeniu fazy stacjonarnej,
- po zmianie struktury kapitału powinna rozpocząć się faza jego akumulacji, trwająca do końca horyzontu.

6.3. Zakłady Chemiczne SA

Za początek okresu planowania przyjmujemy 1 stycznia 1998 roku.
Początkowy zasób majątku grupy kapitałowej Zakłady Chemiczne SA, kapitał własny i zatrudnienie kształtują się na poziomach:

$K_0 = 812\,713$ tys. zł,
$X_0 = 663\,968$ tys. zł,
$L_0 = 8$ tys. osób.

Pozostałe parametry przyjmują następujące wartości:

$$a=0{,}15; \quad f=0{,}36; \quad r=0{,}17; \quad i=0{,}16; \quad h=2; \quad w=1300 \text{ zł/mies.};$$
$$c=0{,}13; \quad m=0{,}5; \quad \alpha=0{,}27; \quad \beta=0{,}32; \quad A=155{,}7 \text{ tys.};$$
$$f_D=0{,}2; \quad f_K=0.$$

Parametry spełniają warunek:

$$i>(1-f)r,$$

zatem firma powinna wykorzystywać kredyty do finansowania swojej działalności.

Wybór optymalnej strategii finansowej zależy od długości horyzontu.

Z równania (68) wyznaczamy krytyczną długość horyzontu $\bar{z}=14$ lat; po przekroczeniu tej krytycznej długości w rozwiązaniu pojawia się faza stacjonarna (z wypłatą dywidendy).

1. Gdy horyzont nie przekracza 14 lat, optymalna strategia rozwoju jest trójfazowa (trajektoria $1 \to 2 \to 3$). Zarówno pierwsza, jak i ostatnia są fazami wzrostu majątku, produkcji i zatrudnienia. W fazie środkowej, trwającej nieco ponad półtora roku, firma powinna dokonać zmiany struktury kapitału – spłacić wszystkie kredyty i rozpocząć finansowanie majątku wyłącznie poprzez angażowanie kapitału własnego. Na inwestycje przeznacza się wówczas 15% nadwyżki finansowej, aby utrzymać majątek na poziomie $K^*_{XY} = 998\,729{,}2$ tys. zł i zatrudnienie na poziomie $L^*_{XY} = 24{,}2$ tys. osób. Jedynym zyskiem akcjonariusza jest zysk z kapitału realizowany na koniec horyzontu, dywidenda w tej strategii nie jest wypłacana.

Położenia punktów przełączenia

$$\tau_{1,2} = 0{,}2; \qquad \tau_{2,3} = 1{,}8,$$

wyznaczamy odpowiednio na podstawie (43) i (50).

Czas trwania poszczególnych faz dla strategii 10-letniej oraz ich krótką charakterystykę prezentuje poniższa tabela:

Faza 1 2 miesiące	Faza 2 1 rok 7 miesięcy	Faza 3 8 lat 3 miesiące
Wzrost z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t) = K^*_{XY}$, $L^*(t) = L^*_{XY}$	Wzrost, tylko majątek własny

2. Gdy długość horyzontu przekracza 14 lat, optymalna staje się strategia pięciofazowa (trajektoria $1 \to 5 \to 1 \to 2 \to 3$): faza „dochodzenia" do magistrali (ścieżka 1), magistrala (ścieżka 5) i trójfazowy okres „zejścia" z magistrali (trajektoria $1 \to 2 \to 3$). Początkowo w ciągu miesiąca firma „napędza" wzrost, wykorzystując kapitał własny oraz kredyty zaciągnięte do maksymalnego, dopuszczalnego poziomu. Po tym czasie, osiągnąwszy stan stacjonarny, przedsiębiorstwo rozpoczyna wypłatę dywidendy (85% nadwyżki finansowej) przeprowadzając tylko te inwestycje, które zapewniają utrzymanie majątku na poziomie $K^*_Y = 873\,274{,}9$ tys. zł, a w konsekwencji zatrudnienia na poziomie $L^*_Y = 22{,}9$ tys. osób. Czas pozostawania przedsiębiorstwa w stanie stacjonarnym (na magistrali) zależy od długości horyzontu. Końcowy, prawie 14-letni okres jest ponownie fazą wzrostu. Przez niespełna dwa lata firma powinna spłacić

wszystkie kredyty, dokonując zmiany struktury źródeł finansowania. W fazie tej majątek utrzymywany jest na poziomie $K^*_{XY}=998\ 729{,}2$ tys. zł, a zatrudnienie na poziomie $L^*_{XY}=24{,}2$ tys. osób. Do końca horyzontu (12 lat) źródłem finansowania majątku jest tylko kapitał własny.

Położenie punktów przełączenia w warunkach strategii 22-letniej:

$$\tau_{1,5}=0{,}1; \quad \tau_{5,1}=8{,}25; \quad \tau_{1,2}=8{,}26; \quad \tau_{2,3}=10,$$

wyznaczono na podstawie (63), (66), (43) i (50).

Czas trwania poszczególnych faz przy założeniu strategii 22-letniej oraz ich charakterystykę prezentuje tabela:

Faza 1 1 miesiąc	Faza 2 8 lat 2 miesiące	Faza 3 0,1 miesiąca	Faza 4 1 rok 9 miesięcy	Faza 5 12 lat
Wzrost z maksymalnym długiem	Stan stacjonarny, dywidenda $K^*(t)=K^*_Y$, $L^*(t)=L^*_Y$	Wzrost, z maksymalnym długiem	Zmiana struktury kapitału, spłata całego zadłużenia, $K^*(t)=K^*_{XY}$, $L^*(t)=L^*_{XY}$	Wzrost, tylko majątek własny

Wnioski

Zmiana struktury kapitału zwiększa wartość firmy. Spółka Zakłady Chemiczne SA powinna uwzględnić następujące cele strategiczne:

- w strategiach krótkookresowych, poniżej 14 lat, zmiana struktury kapitału powinna dokonać się w ciągu dwóch pierwszych lat działalności,
- wypłata dywidendy (począwszy nawet od pierwszego roku) może nastąpić tylko pod warunkiem przyjęcia długofalowej strategii (z horyzontem przekraczającym 14 lat),
- w strategiach długofalowych zmiana struktury kapitału powinna nastąpić dopiero po zakończeniu fazy stacjonarnej,
- po zmianie struktury kapitału, do końca horyzontu preferowana akumulacja kapitału.

Podsumowanie

Teoria sterowania optymalnego daje dogodne narzędzie matematyczne, dzięki któremu można ocenić spółkę, zaliczając ją do jednej z dwóch grup – o niskiej $(i<(1-f)r)$ lub o wysokiej $(i>(1-f)r)$ stopie zwrotu kapitału własnego – i wybrać jej optymalną strategię finansową oraz optymalną strukturę kapitału w ujęciu dynamicznym. Jak widzieliśmy, w krótkich okresach nie ma znaczenia, do której kategorii firma należy $(i<(1-f)r$, czy $i>(1-f)r)$. Strategia finansowa spółki w krótkim okresie powinna być następująca: w pierwszej fazie powinno nastąpić wykorzystanie kredytu, umożliwiającego firmie szybki wzrost, następnie jego spłata i wzrost tylko z wykorzystaniem środków własnych.

Gdy horyzont jest dostatecznie długi, w rozwiązaniach ujawnia się **efekt magistrali**. Optymalna trajektoria w początkowym okresie zmierza ku ścieżce zrównoważonego wzrostu (lub równowagi stacjonarnej, w przypadku zerowego postępu techniczno-organizacyjnego) – **magistrali** – następnie rozwój jej przebiega wzdłuż magistrali, aby oddalić się od niej w końcowym etapie rozwoju.

Jeżeli firmę charakteryzuje niska stopa zwrotu kapitału własnego $(i<(1-f)r)$ powinna wykorzystywać środki obce tylko w początkowym etapie (w fazie dochodzenia do magistrali). Pozwalają one na zainicjowanie wzrostu, ale ze względu na wysokie koszty mogą być stosowane tylko przez krótki czas.

Firmy z wysoką stopą zwrotu $(i>(1-f)r)$ mogą korzystać ze środków obcych na większą skalę. Działa bowiem mechanizm **dźwigni finansowej**. Zmiana struktury kapitału dokonuje się dopiero w fazie odchodzenia od magistrali, gdy – zgodnie z przyjętym kryterium optymalności kładziony jest nacisk na powiększanie kapitału własnego.

Analizując wyniki badań empirycznych, należy mieć na uwadze niezwykle prostą strukturę rozpatrywanego modelu. W warunkach polskiej gospodarki stałość parametrów modelu może budzić zrozumiałe kontrowersje, zatem optymalne wartości zmiennych i długości faz wyznaczone dla poszczególnych spółek należy traktować jako wielkości orientacyjne. Są jednak ważne z dwóch powodów. Po pierwsze, wyraźnie wskazują na kierunek racjonalnych decyzji finansowych i inwestycyjnych w firmie; po drugie, mogą służyć jako rozsądne przybliżenie rzeczywiście dokonywanych przez nią wyborów.

Każdy z rozpatrywanych przypadków charakteryzuje się stosunkowo długim horyzontem, zapewniającym pojawienie się **efektu magistrali** w rozwiązaniu. Z punktu widzenia inwestora (akcjonariusza) jest to o tyle ważne, iż oznacza, że jedynie w przypadku długofalowych inwestycji w akcje danego przedsiębiorstwa opłacalne jest, w pewnym okresie, wypłacanie zysku w postaci

dywidendy. Gdy planowany horyzont jest stosunkowo krótki, cała wypracowana w firmie nadwyżka finansowa powinna być kierowana na inwestycje, służące pomnażaniu majątku i zapewnieniu akcjonariuszowi maksymalnego zysku z kapitału w momencie końcowym.

Literatura

Bednarski L., Borowiecki R., Duraj J., Kurtys E., Waśniewski T., Wersty B., *Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa*, Akademia Ekonomiczna, Wrocław 1998

Blok M. W. J., *Dynamic models of the firm*, Springer-Verlag, Berlin 1996

Bogacka-Kisiel E., Łyszczak M., (red.) Finanse i bankowość, zarys problematyki, AE, Wrocław 1999

Chiang A. C., *Elements of dynamic optimalization*, McGraw-Hill, Inc. 1992

Czerwiński Z., *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, PWE, Warszawa 1973

Dębski W., *Zarządzanie finansami*, CIM, Warszawa 1996

Gomułka S. *Teoria innowacji i wzrostu gospodarczego*, CASE, Warszawa 1998

Hilten O. van, Kort P. M., Loon P. J. J. M. van, *Dynamic policies of the firm. An optimal control approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993

Kort P. M., *Optimal dynamic investment policies of a value maximizing firm*, Springer-Verlag, Berlin 1989

Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1962

Nowak M., *Dynamiczne modele zarządzania finansami w przedsiębiorstwie*, Pret, Warszwa 1995

Panek E., *Elementy ekonomii matematycznej statyka*, WN PWN, Warszawa – Poznań 1993

Panek E., *Optymalizacja procesów wzrostu gospodarczego w świetle teorii sterowania*, PWN, Warszawa – Poznań 1989

Panek E., *Teoria magistral*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Poznań 1995

Rychłowska-Musiał E., *Optymalne strategie rozwoju firmy w modelu typu Lesourne'a*, w: *Prace z ekonometrii finansowej*, red. W. Jurek, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000