Piotr DWORNICZAK

WYBRANE MODELE OPTYMALIZACJI DECYZJI W WARUNKACH ROZMYTOŚCI

Codziennie wielokrotnie stajemy przed problemami wyboru pewnych przedmiotów, sposobów postępowania, kierunków działania czy strategii rozwoju. Najogólniej stajemy wtedy przed wyborem najlepszej, z pewnego punktu widzenia, decyzji (alternatywy). Często jest to trudne zadanie, gdyż decyzje zazwyczaj oceniane bywają z wielu punktów widzenia, czyli ze względu na wiele kryteriów, przy czym decyzja optymalna ze względu na jedno z nich nie musi być taka ze względu na inne. Pomocą we wspomaganiu podejmowania decyzji są różnego typu procedury matematyczne. Od lat rozwijane są rozwiązania, wykorzystujące teorię zbiorów rozmytych. W tym artykule przedstawione zostaną w skróconej formie niektóre z nich. W literaturze z tego zakresu występują dwa główne typy podejścia do racjonalnej klasyfikacji decyzji. W jednym żąda się ustalenia zupełnego uporządkowania alternatyw dopuszczalnych, w drugim natomiast wyróżnia się pewien „optymalny" (czasem zwany „zadowalającym") podzbiór decyzji dopuszczalnych i ewentualnie w nim poszukuje się zupełnego porządku bez prób porównywania działań „nieoptymalnych". W przypadku podejmowania decyzji w warunkach rozmytości podejścia drugiego bezpośrednio zastosować nie można, gdyż każda decyzja może być uznana za optymalną w pewnym stopniu. Wiąże się to z samą istotą zbiorów czy też własności rozmytych. Zawsze przecież są to takie zbiory, cechy lub własności, których nie można sklasyfikować lub ocenić jednoznacznie za pomocą logiki dwuwartościowej, przy czym nie wynika to z naszej niewiedzy, lecz jest ich immanentną cechą.

Podstawą do rozważań dotyczących decyzji optymalnych w warunkach rozmytości jest podejście zastosowane po raz pierwszy przez Bellmana i Zadeha[1].

[1] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, *Decision-making in a fuzzy enviroment*, Manag. Sci. 1970, vol. 17, s. 141-164.

Załóżmy, że X jest zbiorem decyzji (alternatyw). Aby wybrać odpowiednią decyzję, musimy określić pewien cel, do którego dążymy. Zbiór decyzji prowadzących do tego celu oznaczymy przez G (ang. *goal*). W szczególności w wypadku celu rozmytego, nie mogąc jednoznacznie zaklasyfikować decyzji jako prowadzącej do niego lub nie, zbiór G jest podzbiorem rozmytym zbioru X. Jest to zatem zbiór $G \subsetneq X$ dany przez funkcję przynależności $\mu_G(x): X \to [0, 1\rangle$.

Oprócz wyróżnionego celu decyzje są podporządkowane pewnym ograniczeniom. Nie muszą to już jednak być ograniczenia ostre, prowadzące do wyznaczenia zbioru decyzji dopuszczalnych, ale mogą być rozmyte. Ograniczenie rozmyte C (ang. *constraint*) jest zatem zbiorem rozmytym $C \subsetneq X$ danym przez funkcję przynależności $\mu_C(x): X \to \langle 0, 1\rangle$.

Rozmyta decyzja prowadząca do celu G przy ograniczeniu C jest rezultatem wyznaczenia pewnego typu iloczynu zbiorów G i C, czyli zbioru $D = G$ „i" C. W terminach funkcji przynależności mamy $\mu_D(x) = \mu_G(x) \mathbin{@} \mu_C(x)$. Znak @ jest symbolem funkcji nazywanej agregacją.

Jest to funkcja $@: \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$, spełniająca dla dowolnych $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ warunki:

1) monotoniczności względem obu argumentów, tzn.
   $a \leqslant b$ i $c \leqslant d \Rightarrow a \mathbin{@} c \leqslant b \mathbin{@} d$,
2) przemienności, tzn. $a \mathbin{@} b = b \mathbin{@} a$,
3) łączności, tzn. $(a \mathbin{@} b) \mathbin{@} c = a \mathbin{@} (b \mathbin{@} c)$,
4) warunek brzegowy $a \mathbin{@} 1 = a$.

Funkcja ta nazywana jest także t-normą, nie jest ona przy tym określona jednoznacznie.

Agregację $n \geqslant 3$ składowych określa się indukcyjnie w postaci

$$a_1 \mathbin{@} a_2 \mathbin{@} \ldots \mathbin{@} a_n = (a_1 \mathbin{@} a_2 \mathbin{@} \ldots \mathbin{@} a_{n-1}) \mathbin{@} a_n.$$

Pytanie, który ze sposobów agregacji należy uznać w danym wypadku za najwłaściwszy, pozostaje w gestii decydenta. Najczęściej operacją @ jest minimum lub mnożenie.

Decyzja rozmyta $D = G \wedge C$ jest typu minimum, gdy funkcja przynależności ma postać

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}. \tag{1}$$

Decyzja rozmyta $D = G \bullet C$ jest typu mnożenia, gdy funkcja przynależności ma postać

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \cdot \mu_C(x). \tag{2}$$

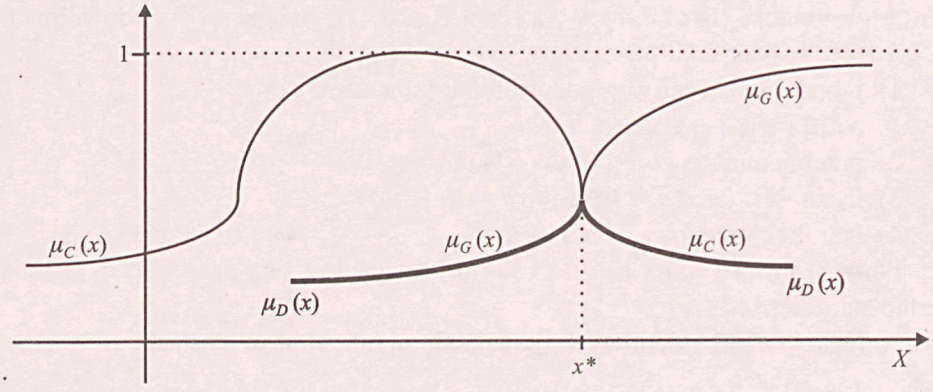
Decyzja $x^* \in X$ jest decyzją optymalną wyznaczoną na podstawie decyzji rozmytej D, gdy

$$\mu_D(x^*) = \sup_{x \in X} \mu_D(x). \tag{3}$$

Powyższe definicje zobrazowane zostaną przykładami.

Przykład 1

Niech $X = \Re$. Niech cel rozmyty G określony będzie przez funkcję $\mu_G(x)$, a ograniczenia rozmyte przez funkcję $\mu_C(x)$. Określamy decyzję rozmytą D typu minimum o funkcji przynależności danej formułą (1). Optymalna decyzja nierozmyta to decyzja x^*. Podane funkcje przynależności i decyzję x^*, zaznaczono na poniższym rysunku.



Wyznaczenie decyzji rozmytej typu mnożenia na rysunku nie jest łatwe, dlatego zobaczymy to na innym przykładzie.

Przykład 2

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$, natomiast cel i ograniczenie to zbiory rozmyte

$$G = \{0{,}2/x_1;\ 0{,}3/x_2;\ 0{,}8/x_3;\ 0{,}9/x_4;\ 1/x_5;\ 0{,}7/x_6;\ 0{,}5/x_7\},$$

$$C = \{0{,}3/x_3;\ 0{,}4/x_4;\ 0{,}5/x_5;\ 0{,}6/x_6;\ 0{,}7/x_7;\ 0{,}8/x_8;\ 0{,}9/x_9;1/x_{10}\},$$

Wtedy decyzja rozmyta D określona według formuły (2) ma postać

$$D = \{0/x_1;\ 0/x_2;\ 0{,}24/x_3;\ 0{,}36/x_4;\ 0{,}5/x_5;\ 0{,}42/x_6;\ 0{,}35/x_7;\ 0/x_8;\ 0/x_9;\ 0/x_{10}\}.$$

Optymalną decyzją nierozmytą jest decyzja x_5.

Postępowanie podobne do powyższego stosuje się również w przypadkach, gdy określonych jest n celów $G_1, G_2, \ldots, G_n$ oraz m ograniczeń $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Wtedy alternatywa oceniana jest na podstawie $k=n+m$ kryteriów.

Decyzja rozmyta D określona jest wówczas przez funkcję przynależności $\mu_D(x): X \to \langle 0, 1 \rangle$ daną formułą

$$\mu_D(x) = \mu_{G_1}(x) @ \mu_{G_2}(x) @ \ldots @ \mu_{G_n}(x) @ \mu_{C_1}(x) @ \mu_{C_2}(x) @ \ldots @ \mu_{C_m}(x), \quad (4)$$

gdzie @ jest pewnym operatorem agregacji. Najczęściej operatorem tym jest minimum.

Próby podania zadowalających rozwiązań zagadnienia wyboru nierozmytej decyzji optymalnej notowane są od lat siedemdziesiątych.

W rozwiązaniach tych można wyróżnić dwa etapy: pierwszy dotyczący sposobu agregacji kryteriów oraz drugi dotyczący sposobu wyboru najlepszej decyzji nierozmytej na podstawie decyzji rozmytej.

O ile etap drugi polega zazwyczaj na wyznaczeniu optymalnej decyzji nierozmytej x^*, dla której $\mu_D(x^*) = \sup_{x \in X} \mu_D(x)$, o tyle w pierwszym występuje wiele różnych rozwiązań. Prześledźmy kilka z nich.

We wszystkich przypadkach zakłada się zupełność i przechodniość rozpatrywanych relacji preferencji

Rozwiązanie Bellmana i Zadeha[2]

Rozwiązanie to dotyczy dwóch przypadków:

1° gdy wszystkie kryteria są jednakowo ważne,

2° gdy kryteria nie są jednakowo ważne.

Przypadek 1° został już opisany w formułach (1) i (4) i przedstawiony na przykładzie 1. W przypadku 2° autorzy przyjęli w oryginale istnienie jednego celu G i wielu ograniczeń $C_1, C_2, \ldots, C_m$, którym przypisane zostały pewne wagi $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_m$ odpowiednio, przy czym $\sum_{i=0}^{m} w_i = 1$. Wtedy decyzję rozmytą D określa się przez funkcję przynależności

$$\mu_D(x) = \min\{w_0 \cdot \mu_G(x), w_1 \cdot \mu_{C_1}(x), w_2 \cdot \mu_{C_2}(x), \ldots, w_m \cdot \mu_{C_m}(x)\}. \quad (5)$$

W rozważaniach można przyjąć większą liczbę celów $G_1, G_2, \ldots, G_n$ przy ograniczeniach $C_1, C_2, \ldots, C_m$, którym przyporządkowano odpowiednio wagi

[2] Ibidem.

$w_1, w_2, \ldots, w_{m+n}$ przy czym $\sum_{i=1}^{m+n} w_i = 1$. Analogicznie do (5) decyzja rozmyta D określona będzie przez

$$\mu_D(x) = \min\{w_1 \cdot \mu_{G_1}(x),\ w_2 \cdot \mu_{G_2}(x),\ \ldots,\ w_{m+n} \cdot \mu_{C_m}(x)\}. \tag{6}$$

Przykład 3

Niech $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ będzie zbiorem alternatyw. Rozmyty cel i ograniczenia to

$$G = \{0{,}5/x_1;\ 0{,}7/x_2;\ 0{,}6/x_3\}, \qquad C_1 = \{0{,}2/x_1;\ 0{,}4/x_2;\ 0{,}8/x_3\},$$

$$C_2 = \{0{,}6/x_1;\ 0{,}5/x_2;\ 0{,}9/x_3\}, \qquad C_3 = \{0{,}2/x_1;\ 0{,}6/x_2;\ 0{,}2/x_3\},$$

natomiast ich wagi to $w_0 = 0{,}3$, $w_1 = 0{,}3$, $w_2 = 0{,}1$, $w_3 = 0{,}3$.

Wtedy nie uwzględniając wag, mamy $D = \{0{,}2/x_1,\ 0{,}4/x_2,\ 0{,}2/x_3\}$, a nierozmytą decyzją optymalną jest x_2.

Przy uwzględnieniu wag otrzymamy pomocnicze kryteria „wyważone"

$$G' = \{0{,}15/x_1,\ 0{,}21/x_2,\ 0{,}18/x_3\}, \qquad C_1' = \{0{,}06/x_1,\ 0{,}12/x_2,\ 0{,}24/x_3\},$$

$$C_2' = \{0{,}06/x_1,\ 0{,}05/x_2,\ 0{,}09/x_3\}, \qquad C_3' = \{0{,}06/x_1,\ 0{,}18/x_2,\ 0{,}06/x_3\},$$

skąd

$$D = \{0{,}06/x_1,\ 0{,}05/x_2,\ 0{,}06/x_3\}$$

i decyzje optymalne to x_1 lub x_3 (równoważnie).

Wszystkie wartości funkcji przynależności oraz wagi muszą być podane przez decydenta. Istotna jest tu więc rola człowieka. Niełatwo odpowiedzieć na pytanie, czy jest to wada czy zaleta tej metody. Patrząc przez pryzmat automatyzacji procesu, jest to jej wadą, z drugiej jednak strony to zawsze człowiek jest osobą, która dokonuje pewnego rodzaju oceny alternatyw i decyzję podejmuje, a wszystkie procedury matematyczne powinny mu to jedynie ułatwić. Cechą powyższego rozumowania jest także to, że w efekcie bierze się pod uwagę tylko minimalne wartości kryteriów przypisane danej alternatywie, „gubiąc" inne. W powyższym przykładzie w jego części pierwszej stopnie przynależności $\mu_D(x_1)$ i $\mu_D(x_3)$ są równe, co prowadzi do wniosku, że x_1 i x_3 są równoważne. Przyjęcie tego jest dość dziwne, gdyż przecież alternatywa x_3 jest lepsza od x_1 według kryteriów G, C_1 i C_2, a równoważne są one tylko według C_3. Podobnie dzieje się w części drugiej przykładu po uwzględnieniu wag kryteriów.

Rozwiązanie Saaty'ego[3]

Rozwiązanie to polega na pewnym porównaniu parami elementów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skończonego zbioru decyzji w każdym z przyjętych kryteriów $K_1, K_2, \ldots, K_m$ oraz na porównaniu parami względnej ważności kryteriów i wyprowadzeniu na tej podstawie, za pomocą wektorów własnych uzyskanych macierzy, stopni przynależności poszczególnych decyzji w rozmytej decyzji optymalnej. Zakłada się przy tym, że wszystkie decyzje są porównywalne. Dzięki porównaniom otrzymamy macierze R_l, $l=1, 2, \ldots, m$, obrazujące preferencje według wszystkich kryteriów. Postępuje się przy tym zgodnie z tzw. skalą Saaty'ego.

Załóżmy, że alternatywa x_i jest co najmniej tak dobra jak x_j według kryterium K_l. Wtedy element $r^l_{i,j}$ macierzy $R_l=[r^l_{i,j}]$ określony jest według reguły:

$$r^l_{i,j}=\begin{cases} 1, & \text{gdy } x_i \text{ i } x_j \text{ są jednakowo dobre (ważne),} \\ 3, & \text{gdy } x_i \text{ jest nieco lepsze (ważniejsze) niż } x_j, \\ 5, & \text{gdy } x_i \text{ jest lepsze (ważniejsze) niż } x_j, \\ 7, & \text{gdy } x_i \text{ jest dużo lepsze (ważniejsze) niż } x_j, \\ 9, & \text{gdy } x_i \text{ jest absolutnie lepsze (ważniejsze) niż } x_j. \end{cases}$$

Element $r^l_{i,j}$ może przyjmować wartości 2, 4, 6, 8 w sytuacjach pośrednich. Na tej podstawie wyznacza się elementy $r^l_{j,i}$, biorąc

$$r^l_{j,i}=\frac{1}{r^l_{i,j}}.$$

Regułę tę będziemy nazywać skalą Saaty'ego.

Podobnie określa się macierz W względnej ważności kryteriów, zakładając oczywiście pełną ich porównywalność. Podanie macierzy R_l, $l=1, 2, \ldots, m$ oraz W leży w gestii decydenta lub ekspertów.

Dalsze postępowanie polega na wyznaczeniu wektorów własnych v_l odpowiadających maksymalnym wartościom własnym λ_l macierzy R_l, $l=1, 2, \ldots, m$ oraz wektora własnego v_0 odpowiadającego maksymalnej wartości własnej λ_0 macierzy W. Wektory $v_0, v_1, \ldots, v_m$ normalizujemy następnie według skali kardynalnej, tzn. wektor $v=[t_1, t_2, \ldots, t_k]$ po znormalizowaniu stanie się wektorem

---

[3] T. L. Saaty, *Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets*, Fuzzy Sets and System 1978, vol. 1, s. 57-68; T. L. Saaty, *Modelling unstructured decision problems – the theory of analytical hierarchies*, Math. Comput. Simulation 1978, vol. 20, s. 147-158.

$$v' = \left[\frac{t_1}{\sum t_i}, \frac{t_2}{\sum t_i}, \ldots, \frac{t_k}{\sum t_i} \right].$$

Ze znormalizowanych wektorów $v'_1, v'_2, \ldots, v'_m$ tworzymy macierz $A = [v'_1 \mid v'_2 \mid \ldots \mid v'_m]$, a po przemnożeniu jej przez wektor v'_0 otrzymujemy wektor

$$A \cdot v'_0 = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^T,$$

którego składowe są stopniami przynależności poszczególnych alternatyw $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w decyzji rozmytej D. Nie jest celem tej pracy szczegółowe rozważanie tego podejścia. Poprzestańmy zatem na powyższych uwagach i przykładzie 4, odsyłając zainteresowanego czytelnika do tekstów źródłowych[4].

Przykład 4

Niech $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ będzie zbiorem decyzji porównywanych na podstawie trzech kryteriów K_1, K_2, K_3. Przyjmijmy, że oceny według poszczególnych kryteriów dane są zgodnie ze skalą Saaty'ego w poniższych macierzach

R_1	x_1	x_2	x_3
x_1	1	3	5
x_2	$\frac{1}{3}$	1	3
x_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1

R_2	x_1	x_2	x_3
x_1	1	3	9
x_2	$\frac{1}{3}$	1	5
x_3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	1

R_3	x_1	x_2	x_3
x_1	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$
x_2	7	1	3
x_3	5	$\frac{1}{3}$	1

Niech macierz względnej ważności kryteriów ma postać

W	K_1	K_2	K_3
K_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$
K_2	5	1	$\frac{1}{5}$
K_3	9	5	1

[4] Ibidem.

Wyznaczając na podstawie powyższych danych optymalną decyzję, otrzymujemy wektory własne, odpowiadające maksymalnym wartościom własnym postaci

$$v_1 = \begin{bmatrix} 6{,}082 \\ 2{,}466 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 10{,}671 \\ 4{,}217 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0{,}258 \\ 2{,}327 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}079 \\ 0{,}281 \\ 1{,}000 \end{bmatrix},$$

a po znormalizowaniu

$$v_1' = \begin{bmatrix} 0{,}637 \\ 0{,}258 \\ 0{,}105 \end{bmatrix}, \quad v_2' = \begin{bmatrix} 0{,}672 \\ 0{,}265 \\ 0{,}063 \end{bmatrix}, \quad v_3' = \begin{bmatrix} 0{,}072 \\ 0{,}649 \\ 0{,}279 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad v_0' = \begin{bmatrix} 0{,}058 \\ 0{,}207 \\ 0{,}735 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie

$$A \cdot v_0' = \begin{bmatrix} 0{,}637 & 0{,}672 & 0{,}072 \\ 0{,}258 & 0{,}265 & 0{,}649 \\ 0{,}105 & 0{,}063 & 0{,}279 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}058 \\ 0{,}207 \\ 0{,}735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}229 \\ 0{,}547 \\ 0{,}224 \end{bmatrix},$$

skąd decyzja rozmyta to $D = \{0{,}229/x_1,\ 0{,}547/x_2,\ 0{,}224/x_3\}$, a najlepszą alternatywą jest x_2.

Podejście Saaty'ego ma dwie usterki. Pierwsza dotyczy czasochłonności wyznaczania wektorów własnych. W dobie obecnej, dzięki zastosowaniu komputerów, nie jest to wada istotna. Druga to ta, że przy porównywaniu parami zgodnie ze skalą Saaty'ego traci się część informacji, która pozwoliła wyznaczyć odpowiednie macierze (mogła by być zachowana w przypadku zastosowania relacji rozmytych). Przykładowo koszty K_1 przejazdu, które chcemy minimalizować, wynoszą 20 000 zł, dla alternatywy x_1, a 22 000 zł dla x_2. Macierzą Saaty'ego będzie zapewne (w zależności od decydenta)

R_1	x_1	x_2
x_1	1	3
x_2	$\frac{1}{3}$	1

lub

R_1	x_1	x_2
x_1	1	5
x_2	$\frac{1}{5}$	1

lub

R_1	x_1	x_2
x_1	1	7
x_2	$\frac{1}{7}$	1

lub

R_1	x_1	x_2
x_1	1	9
x_2	$\frac{1}{9}$	1

dzięki którym trudno zauważyć, że ocena x_2 od oceny x_1 różni się zaledwie (?) o 10%. Informacja nie byłaby tak łatwo zgubiona, gdyby zależności opisywał zbiór rozmyty (cel) $G=\{x : x$ powoduje niski koszt przejazdu$\}$ dany choćby przykładowo w postaci $G=\left\{\frac{20}{22}/x_1, \frac{22}{22}/x_2\right\}=\{0{,}91/x_1, 1/x_2\}$.

Rozwiązania Yagera[5]

Sposób zaproponowany przez Yagera przyjmuje określenie Bellmana-Zadeha (1) i (4), przy czym dla kryteriów o nierównych stopniach ważności postępowanie jest inne niż podane w (5) lub (6). Względna ważność kryteriów jest wyrażona przez wykładniki potęg w ten sposób, że decyzja rozmyta D określona jest następująco:

$$\mu_D(x)=\min\{[\mu_{G_1}(x)]^{\alpha_1}, [\mu_{G_2}(x)]^{\alpha_2}, \ldots, [\mu_{C_m}(x)]^{\alpha_{n+m}}\}.$$

Oczywiście im wyższa jest względna ważność danego kryterium (celu lub ograniczenia), tym większy powinien być odpowiadający mu wykładnik $\alpha_i \in \Re_+$ potęgi (powinno tak być ze względu na regułę wyznaczania decyzji D, tzn. regułę minimum).

Jednym ze sposobów określenia wykładników α_i jest skorzystanie z podejścia dotyczącego związku zwrotu „bardzo S" z wartościami funkcji przynależności μ_S. Zadeh określił tę zależność przez μ_S^2. Podobnie na przykład „nie bardzo S" określone jest $\mu_{\text{nie bardzo S}}=1-(\mu_S)^2$.

Prześledzimy to rozumowanie na danych z przykładu 3.

Przyjmijmy przy tym, że cel G i ograniczenia C_1 i C_2 są „bardzo" ważne. Mamy wtedy

$$G^2=\{0{,}25/x_1, 0{,}49/x_2, 0{,}36/x_3\},$$

$$C_1^2=\{0{,}04/x_1, 0{,}16/x_2, 0{,}64/x_3\},$$

$$C_2^2=\{0{,}36/x_1, 0{,}25/x_2, 0{,}81/x_3\},$$

$$C_3=\{0{,}2/x_1, 0{,}6/x_2, 0{,}2/x_3\},$$

---

[5] R. R. Yager, *A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets*, Decision Sci. 1981, vol. 12, s. 589-600; R. R. Yager, *Fuzzy decision making including unequal objectives*, Fuzzy Sets and system 1978, vol. 1, s. 87-95; R. R. Yager, *Multiple objective decision – making using fuzzy sets*, Intern. J. Man-Machine Stud. 1977, vol. 9, s. 375-382.

skąd

$$D=\{0{,}04/x_1,\ 0{,}16/x_2,\ 0{,}2/x_3\},$$

a decyzja optymalna to x_3.

To stosunkowo proste podejście łączy się z pewną wadą. Pojawia się mianowicie pytanie, czy jeśli kryteria (jak w przykładzie) G, C_1 i C_2 są ważne (ważniejsze w stosunku do C_3), to czy są one względem siebie równoważne oraz czy na przykład kryterium „ważniejsze" od „ważniejszego" jest związane z funkcją $(\mu^2)^2=\mu^4$, czy może z μ^3 lub jeszcze inną pośrednią wartością?

Aby pokonać ten problem, Yager przyjął rozumowanie Saaty'ego, które przez porównanie parami ważności kryteriów prowadzi do określenia v_0 wektora własnego macierzy porównań kryteriów W odpowiadającego maksymalnej wartości własnej tej macierzy. Yager podaje, że składowe wektora własnego v_0 wyrażają przybliżony stopień ważności odpowiednich kryteriów w całym zespole tych kryteriów. Są to zatem poszukiwane wykładniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+m}$.

Jeszcze raz przyjmijmy dane z przykładu 3, przy czym niech macierz względnej ważności kryteriów ma postać

W	G	C_1	C_2	C_3
G	1	7	7	5
C_1	$\frac{1}{7}$	1	1	3
C_2	$\frac{1}{7}$	1	1	3
C_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Wektorem własnym odpowiadającym maksymalnej wartości własnej $\lambda=4{,}26772$ jest [0,9587; 0,1890; 0,1890; 0,0972], więc odpowiednie wykładniki to $\alpha_1=0{,}9587$; $\alpha_2=0{,}1890$; $\alpha_3=0{,}1890$ i $\alpha_4=0{,}0972$.
Stąd

$$G^{\alpha_1}=\{0{,}51/x_1,\ 0{,}71/x_2,\ 0{,}61/x_3\},$$
$$C_1^{\alpha_2}=\{0{,}74/x_1,\ 0{,}84/x_2,\ 0{,}96/x_3\},$$
$$C_2^{\alpha_3}=\{0{,}91/x_1,\ 0{,}88/x_2,\ 0{,}98/x_3\},$$
$$C_3^{\alpha_4}=\{0{,}86/x_1,\ 0{,}95/x_2,\ 0{,}86/x_3\}$$

oraz

$$D=\{0{,}51/x_1,\ 0{,}71/x_2,\ 0{,}61/x_3\},$$

a decyzją optymalną jest x_2.

Wadą powyższej metody jest tak jak w poprzednich używanie reguły minimum (ostrego „i") które może prowadzić do sytuacji, że alternatywa oceniona nisko w jednym z kryteriów, a wysoko w pozostałych zostanie odrzucona na korzyść innej alternatywy o przeciętnych ocenach (ale) według wszystkich kryteriów.

Trzecia propozycja Yagera oparta jest na działaniach na lingwistycznych ocenach ważności kryteriów uznanych za bardzo ważne, ważne, średnio ważne, mało ważne, bardzo mało ważne lub inne tym podobne oceny oraz ocenach alternatyw w każdym z kryteriów. Metoda ta jest w istocie podobna do dwóch przedstawionych z tym, że nie występuje w niej przejście z terminów językowych, określających ważność kryteriów i alternatyw na liczbowe wagi tychże kryteriów i alternatyw. Z tego powodu jest łatwiejsza obliczeniowo choć z drugiej strony prostota ta utrudnia uchwycenie różnic w ważnościach kryteriów i ocen w całym ich systemie. Opis metody i przykład zastosowania można znaleźć w pracy R. R. Yagera lub H. Kwakernaaka[6].

Oprócz wymienionych powyżej rozwiązań problemu wyboru optymalnej decyzji na uwagę zasługują również inne późniejsze podejścia.
Najważniejszymi są:

- rozwiązanie Baasa i Kwakernaaka[7] i podobne Jaina[8], w których na podstawie rozmytych ocen ważności względnej kryteriów i rozmytych ocen alternatyw według tych kryteriów otrzymuje się rozmyte oceny całkowite alternatyw (jako liczby rozmyte),
- rozwiązanie Donga, Shaha i Wonga[9], którzy na podstawie rozmytych ocen ważności względnej kryteriów i rozmytych ocen alternatyw przy użyciu zasady rozszerzania stosowanej dla α-poziomów tych ocen wyznaczają rozmyte oceny całkowite alternatyw (jako liczby rozmyte),

---

[6] R. R. Yager, *Fuzzy decision*; H. Kwakernaak, *An algoritm for rating multiple aspect alternatives using fuzzy sets*, Automatica 1979, vol. 15, s. 615, 616.

[7] S. Baas, H. Kwakernaak, *Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets*, Automatica 1977, vol. 13, s. 47-58; H. Kwakernaak, op. cit.

[8] R. Jain, *A procedure for multi-aspect decision – making using fuzzy sets*, Int. J. Syst. Sci. 1977, vol. 8, s. 1-7.

[9] W. M. Dong, H. C. Shah, F. S. Wong, *Fuzzy computation in risk and decision analysis*, Civil. Engrg. Systems 1985, vol. 2, s. 201-208.

- rozwiązanie Schmuckera[10], który stosuje algorytm Donga-Shaha-Wonga, biorąc za oceny liczby rozmyte typu dyskretnego, upraszczając przez to obliczenia, ale tracąc część informacji o ważności alternatyw.

Powyższe trzy rozwiązania prowadzą w rezultacie do porównywania liczb rozmytych co jest ich niedogodnością, należy bowiem zauważyć, że istnieje ponad 20 sposobów porównywania liczb rozmytych.

Warto więc wskazać na jeszcze inne rozwiązania, do których należą:

- rozwiązanie Tsenga i Kleina[11], którzy na podstawie lingwistycznych ocen ważności kryteriów wyznaczają pewne wagi tych kryteriów (podejście typu Saaty'ego) i na ich podstawie oraz na podstawie ocen alternatyw według każdego kryterium przypisują każdej alternatywie pewną jej ocenę,
- rozwiązanie Yagera[12] będące uogólnieniem metody przedstawionej we wcześniejszej pracy[13] za pomocą pewnego operatora agregacji OWA (*ordered weighted averaging*) będącego pośrednią formą między agregacją typu „i", a agregacją typu „lub". (Rozwiązanie bazujące na powyższym podał później Baldwin[14]).

Wszystkie powyżej przedstawione rozwiązania zawierają założenia dotyczące przechodniości i zupełności relacji względnej ważności kryteriów i preferencji według każdego z nich. Ponadto ważność ta podana jest najczęściej na podstawie zwykłych binarnych relacji porównujących decyzje bądź kryteria. Często wprowadzane zostają pewnego rodzaju stopniowania, mówiące o sile tych preferencji.

Podane rozwiązania stanowią podstawę całej klasy wspomagania podejmowania decyzji.

Literatura

Baas S., Kwakernaak H., *Rating and ranking of multiple-aspect alternatives using fuzzy sets*, Automatica 1977, vol. 13,

Baldwin J.F., *Support logic and evidential reasoning in FRIL*, Report 193, s. 1-7, EUFIT 93 (First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies), Aachen 1993

Bellman R.E., Zadeh L.A., *Decision-making in a fuzzy environment*, Manag. Sci. 1970, vol. 17

---

[10] Ibidem.

[11] T. Y. Tseng, C. M. Klein, *A new algorithm for fuzzy multicriteria decision making*, Intern. J. Approx, Reason. 1992, vol. 6, s. 45-66.

[12] R. R. Yager, *On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making*, IEEE Trans. Syst. Man Cybernet 1988, vol. 18, s. 183-190.

[13] R. R. Yager, *Fuzzy*, s. 87.98.

[14] J. F. Baldwin, *Support logic and evidential reasoning in FRIL*, Report 193, s. 1-7, EUFIT 93 (First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies), Aachen 1993.

Dong W.M., Shah H.C., Wong F.S., *Fuzzy computation in risk and decision analysis*, Civil. Engrg. Systems 1985, vol. 2

Dong W.M., Wong F.S., *Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle*, Fuzzy Sets and System 1987, vol. 21

Jain R., *A procedure for multi-aspect decision – making using fuzzy sets*, Int. J. Syst. Sci. 1977, vol. 8

Kwakernaak H., *An algoritm for rating multiple aspect alternatives using fuzzy sets*, Automatica 1979, vol. 15

Ribeiro R.A., *Fuzzy multiple attribute decision making : A Review and new preference elication techniques*. Fuzzy Sets and System 1996, vol. 78

Saaty T.L., *Exploring the interface between hierarchies, multiple objectives and fuzzy sets*, Fuzzy Sets and System 1978, vol. 1

Saaty T.L., *Modelling unstructured decision problems – the theory of analytical hierarchies*, Math. Comput. Simulation 1978, vol. 20

Tseng T.Y., Klein C.M., *A new algorithm for fuzzy multicriteria decision making*, Intern. J. Approx. Reason 1992, vol. 6

Yager R.R., *A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets*, Decision Sci. 1981, vol. 12

Yager R.R., *Fuzzy decision making includling unequal objectives*, Fuzzy Sets and System 1978, vol. 1

Yager R.R., *Multiple objektive decision – making using fuzzy sets*, Intern. J. Man-Machine Stud. 1977, vol. 9

Yager R.R., *On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making*, IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. 1988, vol. 18