Marek ŁAŻEWSKI, Krzysztof ZATOR

BADANIE ZWROTÓW Z AKCJI NOTOWANYCH W SYSTEMIE CIĄGŁYM NA GIEŁDZIE PAPIERÓW WARTOŚCIOWYCH W WARSZAWIE Z WYKORZYSTANIEM ROZKŁADÓW PARETO-LEVY'EGO

1. Rozkłady Pareto-Levy'ego

Rozkłady stabilne (w szczególności rozkłady Pareto-Levy'ego, będące głównym przedmiotem tej pracy) stanowią bogatą klasę rozkładów statystycznych, zawierającą między innymi rozkłady normalne i Cauchy'ego, są rozkładami opisującymi z dobrym dopasowaniem dobrze znane z badań empirycznych zjawiska znacznej skośności oraz „grubych ogonów" rozkładów. Klasa tych rozkładów została scharakteryzowana przez Levy'ego w 1924 roku [16]. Badał on znormalizowane sumy niezależnych zmiennych losowych o identycznych rozkładach. Twierdzi się, że rozkład jest stabilny (α-stabilny), jeżeli ma następującą własność ([39], s. 286): suma niezależnych zmiennych α-stabilnych (o takim samym indeksie stabilności α) jest zmienną stabilną, a więc rozkłady takie są stabilne względem operacji sumowania. Ogólnie, rozkłady stabilne są opisywane przez cztery parametry: wskaźnik stabilności $\alpha \in (0,\ 2)$, wskaźnik skośności $-1 \le \beta \le 1$, wskaźnik skali $\gamma > 0$ oraz wskaźnik charakteryzujący pozycję $\delta \in R$. Jeżeli dla pewnej zmiennej losowej X jest $\alpha=2$, to zmienna X ma rozkład normalny. W innych wypadkach, tzn. gdy $0 < \alpha < 2$, rozkład ma ogony istotnie grubsze niż rozkład normalny. W przypadku gdy $\beta > 0$, rozkład jest skośny w prawo i odwrotnie, jeżeli $\beta < 0$, to rozkład jest skośny w lewo. Parametr skali γ gra analogiczną rolę co odchylenie standardowe w przypadku rozkładu normalnego. Parametr δ dla $\alpha > 1$ jest równy wartości oczekiwanej. W przypadku hipotezy o efektywności rynków kapitałowych, a w szczególności rynków akcji, przyjmuje się, że $\alpha=2$.

W hipotezie rynku fraktalnego zakłada się, że ten parametr może przyjmować wartości z przedziału od 0 do 2. Konsekwencją takiego założenia jest to, że rozkłady Pareto-Levy'ego cechują się samopodobieństwem względem czasu, to znaczy są niezmiennicze względem skali ([30], s. 107).

Rozkłady Pareto-Levy'ego mają wysokie wierzchołki i grube ogony, poza tym cechują się właściwością, polegającą na „wytwarzaniu" trendów i cykli oraz „skłonnością" do gwałtownych i nieciągłych zmian, to znaczy duże zmiany dokonują się poprzez małą liczbę dużych zmian ([30], s. 38). W rozkładach normalnych duże zmiany wywołane są wieloma małymi zmianami. W przypadku omawianych rozkładów, wariancja (dla $1 \leq \alpha \leq 2$) – podstawowy miernik ryzyka w klasycznych teoriach rynków kapitałowych – (w przeciwieństwie do wariancji rozkładu normalnego) jest nieokreślona.

Dotychczasowa stosunkowo mała popularność rozkładów stabilnych w zastosowaniu do opisu zwrotów giełdowych wynika z tego, iż nieznana jest analityczna postać funkcji gęstości rozkładów stabilnych, z wyjątkiem rozkładów Gaussa-Laplace'a ($\alpha = 2$), Levy'ego ($\alpha = 1/2$) oraz Cauchy'ego ($\alpha = 1$), które są szczególnymi przypadkami rozkładów stabilnych.

Klasyczny model, mający swoje odzwierciedlenie we wszystkich obecnie stosowanych modelach rynków kapitałowych, stworzony przez Bacheliera, zakłada, że zwroty z papierów wartościowych są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach, które można z dobrym przybliżeniem opisać za pomocą rozkładu normalnego lub logarytmiczno-normalnego [1]. Mandelbrot ([22], s. 394-419) był pierwszym krytykiem takiego założenia, którego niewłaściwość bardzo szeroko przedstawił w swoich pracach Peters [30], [31].

Liniowe modele, w których stopy zwrotu są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach zostały poddane krytyce między innymi przez Famę oraz Sharpa [7], [36]. Pierwszy z nich – analizując dzienne stopy zwrotu z akcji – odkrył, że mają one rozkład lewostronnie asymetryczny, niezgodny z rozkładem normalnym, czego przejawem było występowanie zwiększonych skrajnych frakcji rozkładów. Praca Sharpa opierająca się na rocznych stopach zwrotu potwierdziła wyniki Famy. W literaturze przedmiotu pojawiło się wiele prac, w których w celu wyjaśnienia odstępstw obserwowanych struktur szeregów czasowych od rozkładu normalnego, wskazano na możliwość zastosowania innych rozkładów, opartych na rozkładach Pareto-Levy'ego [17], stabilnych rozkładach paretowskich, lub też mieszanych rozkładach normalnych. Dla przykładu można tutaj podać prace Mandelbrota [23], [24], Famy, Kona i Hsu [8], [14], [12]. Nowsze badania Turnera i Weigla [14], a w przypadku szeregów czasowych stóp zwrotu z akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie wyniki Welfego i Brzeszczyńskiego [38], Łażewskiego oraz Bołta i Miłobędzkiego [18], [19], [20], [21], [2] pozwalają na sformułowanie twierdzenia, że rozkłady stóp zwrotu – zarówno na rynku amerykań-

skim, jak i polskim – nie są rozkładami normalnymi, a więc można za Petersem postawić hipotezę [30], że reakcje inwestorów na informacje nie są liniowe, a symptomem tego jest zmienność wariancji stóp zwrotu z papierów wartościowych w czasie. Konsekwencją takiego stanu rzeczy jest konieczność poszukiwania bardziej efektywnych narzędzi ekonometrycznych, które będą umożliwiały precyzyjniejszy opis otaczającej nas rzeczywistości. Z całą pewnością można stwierdzić, że rozkłady stabilne to umożliwiają.

2. Metody estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego

Ze względu na to, że nie jest znana jawna postać analityczna funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładów Pareto-Levy'ego, podamy dalej pewne podstawowe własności funkcji charakterystycznej, gdyż ona właśnie stanowi podstawę estymacji parametrów rozkładu.

Funkcją charakterystyczną $\varphi(t)$ zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną funkcji e^{itx}, gdzie t jest zmienną rzeczywistą, a i – jednostką urojoną ([15], s. 147):

$$\bigwedge_{t\in R}\varphi(t) = E(\exp\ (itX)). \tag{1}$$

Zgodnie z definicją wartości przeciętnej, funkcja charakterystyczna zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości f jest określona wzorem:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Wzór (2) określa jednoznacznie, dla danego rozkładu prawdopodobieństwa, funkcję charakterystyczną tego rozkładu, przy czym zachodzi również związek odwrotny, tzn. odwracając transformatę Fouriera opisaną wzorem (2), można z funkcji charakterystycznej otrzymać gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$. Przy założeniu o istnieniu skończonej wartości całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt, \tag{3}$$

zachodzi więc zależność:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

przy czym gęstość f zmiennej losowej X jest funkcją ciągłą dla $x \in R$.

Jeżeli φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X o dystrybuancie F, a x i $x+h$ są punktami ciągłości dystrybuanty F, to:

$$F(x+h)-F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-itx)-\exp(it(x+h))}{it}\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Jeżeli istnieje k-ty moment zmiennej losowej X o funkcji charakterystycznej φ, to φ jest k-krotnie różniczkowalna (w sposób ciągły) i zachodzi związek:

$$\alpha_k = EX^k = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0).$$

W pracy tej dla opisu cen akcji będziemy rozpatrywać uogólnione wykładnicze procesy Levy'ego $(S_t)_{t\in R_+}$ postaci:

$$S_t = S_0\exp(rt)\exp(L_t), \tag{6}$$

gdzie r jest ustaloną wartością stopy procentowej, a L jest procesem Levy'ego. W przypadku gdy rozpatrujemy zdyskontowane ceny akcji, wyrażenie (6) będziemy mogli zapisać w uproszczonej formie: $S_t = S_0\exp(L_t)$.

Proces $X=(X_t)$ $0\le t\le\infty$ z warunkiem początkowym $X_0=0$ jest procesem Levy'ego, jeżeli [33]:

(i) X ma przyrosty niezależne od poprzednich realizacji;

(ii) X ma przyrosty stacjonarne, to znaczy X_t-X_s ma taki sam rozkład jak X_{t-s}, $0\le s<t<\infty$;

(iii) X_t ma ciągły rozkład prawdopodobieństwa, to znaczy $\lim_{t\to s} X_t = X_s$.

W literaturze przedmiotu istnieje kilka sposobów parametryzacji rozkładów stabilnych, przy czym we wszystkich przypadkach wykorzystuje się transformatę Fouriera. W pierwszym z nich zaproponowanym przez Samorodnitsky'ego i Taqqua, funkcja charakterystyczna rozkładu Pareto-Levy'ego ma następującą postać [35]:

$$E(\exp(itX)) = \exp\left(-\gamma^\alpha|t|^\alpha\left[1-i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign} t)\right]+i\delta_1 t\right),\quad \alpha\neq 1, \tag{7}$$

$$E(\exp(itX)) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1+i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|\right]+i\delta_1 t\right),\quad \alpha=1, \tag{7a}$$

w którym $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta_1;1)$. Innym rodzajem parametryzacji jest propozycja Zolotareva, w której $X\sim S(\alpha,\beta,\gamma,\delta_0;0)$ [40]. Wtedy funkcja charakterystyczna przybiera postać:

$$E(\exp(itX)) = \exp\left(-\gamma^\alpha|t|^\alpha\left[1-i\beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)(\operatorname{sign} t)(\gamma|t|^{1-\alpha}-1)\right]+i\delta_0 t\right),\quad \alpha\neq 1, \tag{8}$$

$$E(\exp(itX)) = \exp\left(-\gamma|t|\left[1+i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign} t)\ln|t|+\ln\gamma\right]+i\delta_0 t\right), \quad \alpha=1. \tag{8a}$$

Wartość tej reprezentacji polega na tym, że funkcja charakterystyczna – a co za tym idzie zgodnie z wyrażeniem (4) funkcja gęstości rozkładu – jest ciągła dla wszystkich wartości parametrów. Parametry α, β i γ mają takie same znaczenie dla obydwóch parametryzacji (7) i (7a) oraz (8) i (8a), przy czym związek między nimi jest następujący:

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right)\gamma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha \neq 1, \tag{9}$$

oraz

$$\delta_1 = \delta_0 - \beta\frac{2}{\pi}\gamma\ln\gamma, \quad \text{jeżeli} \quad \alpha = 1. \tag{10}$$

Podstawowe właściwości rozkładów Pareto-Levy'ego zostały zbadane przez Samorodnitsky'ego i Taqqua [35]. Niech $f(x|\alpha,\beta,\gamma,\delta_0)$ będzie gęstością funkcji $S(\alpha,\beta,\gamma,\delta_0;0)$. Rozkłady Pareto-Levy'ego charakteryzuje się wtedy następującą własnością:

$$f(x|\alpha,-\beta,\gamma,\delta_0) = f(-x|\alpha,\beta,\gamma,-\delta_0), \tag{11}$$

oraz

$$\text{support } f(x|\alpha,-\beta,\gamma,\delta_0) = \begin{cases} \left[\delta_0-\gamma\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2},\ +\infty\right) & \text{dla} \quad \alpha<1;\ \beta=1 \\ \left(-\infty,\delta_0+\gamma\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right] & \text{dla} \quad \alpha<1;\ \beta=-1 \\ (-\infty,+\infty) & \text{w innych przypadkach} \end{cases} \tag{12}$$

Dla przypadków skrajnych skośności ($\beta=\pm1$) rozkład (dla $\alpha<1$) dąży do ∞ wraz ze wzrostem α do jedności.

W celu estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego zaproponowano w ciągu ostatnich trzech dekad kilkanaście metod. Ich szczegółowy przegląd można znaleźć w pozycji monograficznej Racheva i Mittnika [34].

Najwcześniej stosowana metoda szacowania parametru stabilności α polega na wykreśleniu empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej. Udowodniono, że ([35], s. 16):

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha P(X>x) = c_\alpha(1+\beta)\gamma^\alpha. \tag{13}$$

Ogon empirycznej funkcji rozkładu w skali podwójnie logarytmicznej powinien być zbliżony do linii prostej o nachyleniu α, jeżeli zmienna losowa ma

rozkład α-stabilny. Główny problem polega w tym przypadku na tym, że nieznana jest postać ogona Pareto. McCulloch wykazał [26], że stosowanie uogólnionego modelu Pareto sugerowanego przez DuMouchela [6] lub też estymatora Hilla [11], kiedy $1<\alpha<2$, prowadzi do przeszacowania tego parametru. McCulloch wskazał, że badacze używający takich mylnych estymatorów grubych ogonów α bez uzasadnienia podawali twierdzenia o tym, że analizowane dane były niestabilne.

Drugie podejście związane z estymacją parametrów rozkładów stabilnych zaproponowali Fama i Roll [9], którzy skonstruowali tablice kwantyli symetrycznych rozkładów stabilnych, dla $\beta=0$. McCulloch rozszerzył tę metodologię na przypadki niesymetryczne [25]. Press [32] pierwszy zaproponował metodę estymacji parametrów rozkładów stabilnych opartą na empirycznej funkcji charakterystycznej. Sposób ten był następnie modyfikowany między innymi przez Paulsona, Halcomba i Leitcha, Feuervergera i McDunnougha oraz Kogona i Williamsa [29], [10], [13].

W ostatnich latach, w przypadku rozkładów statystycznych, dla których nieznana jest analityczna postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa, zaproponowano metody estymacji parametrów oparte na metodzie największej wiarygodności. Jeżeli przyjmiemy sposób parametryzacji rozkładu stabilnego opisanego wzorami (8) i (8a) oraz jeśli oznaczymy przez $\boldsymbol{\theta}=(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta_o)$ wektor szacowanych parametrów, a przez $f(x|\boldsymbol{\theta})$ gęstość funkcji prawdopodobieństwa, to przestrzeń parametrów jest dana przez: $\boldsymbol{\Theta}=(0,2]\times[-1,1]\times(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$. Logarytm funkcji wiarygodności próby $X_1, \ldots, X_n$ jest dany przez wyrażenie:

$$l(\boldsymbol{\Theta})=\sum_{i=1}^{n}\log f(X_i|\boldsymbol{\Theta}). \tag{14}$$

Nieznana jawna postać analityczna funkcji gęstości rozkładu Pareto-Levy'ego sprawia trudności techniczne związane z estymacją parametrów metodą największej wiarygodności na podstawie wzoru (14). Wiele pomocnych w tym zakresie właściwości gęstości rozkładów stabilnych przedstawił Zolotarev [40]. W pewnych przypadkach parametr stabilności α można wyrazić za pomocą funkcji specjalnych, takich jak całki Fresnela, funkcje MacDonalda oraz funkcje Whittakera[1]. Badania DuMouchela wykazały, że gdy $\boldsymbol{\Theta}_0$ przyjmuje wartość z przedziału określonego przez przestrzeń parametrów $\boldsymbol{\Theta}$, wtedy estymator największej wiarygodności ma asymptotycznie rozkład normalny o wartości średniej $\boldsymbol{\Theta}_0$ oraz macierzy kowariancji określonej przez $n^{-1}\mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{B}=(b_{ij})$ jest odwróconą macierzą informacji Fishera $\mathbf{I}$, którą można zapisać w postaci [5]:

[1] *Numerical Computation of Stable Densities and Distributions Functions*, Communications in Statistics. Stochastic Models, 13(4), s. 759-774.

$$I_{ji} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{f} dx . \tag{15}$$

Gdy Θ znajduje się blisko granicy przestrzeni parametrów Θ, wtedy dla próby o skończonej liczebności trudno precyzyjnie oszacować parametry, co stwarza komplikacje implementacyjne związane z tą metodą estymacji parametrów.

Jedyne efektywne, w sensie czasu wykonywania obliczeń, algorytmy estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego opracowali i zaimplementowali numerycznie Brorsen i Yang oraz Nolan, którzy wykorzystali w tym celu transformatę Fouriera [3], [28]. Istotną rolę w procesie estymacji parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego, w szczególności parametru stabilności α, ze względu na brak jawnej postaci ich funkcji gęstości prawdopodobieństwa, odgrywa dobór metody szacunku, która pozwoli na uzyskanie estymatorów stabilnych, niezależnych od liczebności próby. Estymatory największej wiarygodności – w przeciwieństwie do innych estymatorów – spełniają oczekiwania. Badania w tym zakresie przeprowadził Nolan, który przedstawił asymptotyczne wartości odchyleń standardowych szacunków parametrów α i β w zależności od ich położenia w dopuszczalnym przedziale zmienności. W miarę wzrostu wartości parametru α wartości szacunków jego błędu maleją, ale następuje bardzo istotny wzrost błędu szacunku parametru β [28].

Ze względu na coraz większe zainteresowanie ekonometryków finansowych danymi ekonomicznymi o dużej częstotliwości, odpowiednie szeregi czasowe zawierają po kilka milionów obserwacji, co powoduje wzrost czasu obliczeń, pojawiła się konieczność opracowania szybszych i bardziej efektywnych algorytmów. Do takich można zaliczyć przede wszystkim algorytm oparty na tak zwanej szybkiej transformacie Fouriera, który opracował Chen, a istotnie rozwinęli Mittnik, Rachev, Doganoglu i Chenyao [4], [27]. Jak już wspomniano wcześniej, funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa można wyrazić wzorem:

$$f(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \varphi(t;\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, dt . \tag{16}$$

Wartość całki we wzorze (16) może być określona w N-wymiarowej przestrzeni punktów odległych od siebie o h:

$$x_k = \left(k - 1 - \frac{N}{2}\right)h, \quad k=1, \ldots, N. \tag{17}$$

Podstawiając $t = 2\pi\omega$ do wyrażenia (16), otrzymujemy:

$$f\left(\left(k-1-\frac{N}{2}\right)h\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi\omega) e^{\left(-i2\pi 2\pi\omega - 1 - \frac{N}{2}\right)h} d\omega . \tag{18}$$

Prawa strona równania (18) może być aproksymowana wyrażeniem:

$$s\sum_{n=1}^{N}\varphi\left(2\pi s\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\right)e^{-i2\pi\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\left(k-1-\frac{N}{2}\right)hs} \tag{19}$$

i dlatego:

$$f\left(\left(k-1-\frac{N}{2}\right)h\right)\approx s\sum_{n=1}^{N}\varphi\left(2\pi s\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\right)e^{-i2\pi\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\left(k-1-\frac{N}{2}\right)hs}. \tag{20}$$

Jeżeli teraz podstawimy $s=(hN)^{-1}$, to otrzymamy

$$f\left(\left(k-1-\frac{N}{2}\right)h\right)\approx s(-1)^{k-1-\frac{N}{2}}\cdot\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\varphi\left(2\pi s\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\right)e^{-\frac{i2\pi(n-1)(k-1)}{N}}. \tag{21}$$

Suma we wzorze (21) może być efektywnie wyznaczona – w sensie czasu trwania algorytmu numerycznego – w wyniku zastosowania szybkiej transformaty Fouriera do sekwencji:

$$(-1)^{n-1}\varphi\left(2\pi s\left(n-1-\frac{N}{2}\right)\right),\quad n=1,\ldots,N. \tag{22}$$

Dzieląc *k-ty* element tej sekwencji przez $s(-1)^{k-1-\frac{N}{2}}$, otrzymamy gęstość prawdopodobieństwa dla każdego punktu przestrzeni [34].

3. Zmienność zwrotów z akcji opisana za pomocą rozkładów Pareto-Levy'ego

Parametry rozkładów Pareto-Levy'ego estymowano w opisany wcześniej sposób na podstawie zwrotów z akcji notowanych w systemie **ciągłym** na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Analizy przeprowadzono dla następujących spółek: AGORA S.A., ELEKTRIM S.A., KGHM S.A., PROKOM S.A., PKN ORLEN S.A. oraz dla indeksu WIG. Dane z okresu od 2 marca 1998 roku do 9 października 2001 roku pochodzą z firmy CAIT teletekstowe systemy informacyjne s.c. z Katowic zajmującej się redystrybucją informacji z Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Dla każdej z wymienionych spółek oraz dla indeksu WIG utworzono szeregi czasowe zwrotów obserwowanych w następujących odcinkach czasu: 1 min, 5 min, 15 min, 30 min, 1 godz. oraz 2 godz. Liczebności prób – jednakowe dla analizowanych spółek – wynoszą: 83 390 w 1 min, 16 863 w 5 min, 5774 w 15 min, 3003 w 30 min, 1617 w 1 godz., 924 w 2 godz.

Stopy zwrotu obliczono według wzoru:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \tag{23}$$

gdzie P_t oznacza cenę papieru wartościowego w momencie t. Oszacowania parametrów badanych rozkładów stabilnych przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Oceny parametrów rozkładów Pareto-Levy'ego

		1 min	5 min	15 min	30 min	1 godz.	2 godz.
AGORA S.A.	α	**1,5324**	**1,4124**	**1,2913**	**1,2618**	**1,2276**	**1,4501**
	β	0,0179	0,0239	0,0345	0,08804	–0,0235	–0,08241
	γ	0,2922	0,0001	0,0011	0,001811	–0,003703	0,007043
	δ	–0,1302	–0,1235	–0,8048	–0,0001964	–0,0002071	0,0001625
ELEKTRIM S.A.	α	**1,7428**	**1,6440**	**1,3768**	**1,3488**	**1,3028**	**1,2887**
	β	0,0164	–0,0566	–0,0239	–0,0145	0,04458	–0,01841
	γ	0,3104	0,0022	0,0030	0,004129	0,005582	0,007803
	δ	–0,1939	0,0001	0,00002	0,00001889	–0,00008163	0,00004762
KGHM S.A.	α	**1,7359**	**1,6843**	**1,6271**	**1,5792**	**1,3923**	**1,3280**
	β	0,0183	0,0179	–0,0667	–0,09960	–0,03902	–0,14188
	γ	0,1740	0,0089	0,0031	0,004034	0,004478	0,005799
	δ	–0,1362	–0,0592	0,00004	0,00009196	0,00005117	0,0002646
PROKOM S.A.	α	**1,6392**	**1,5720**	**1,4913**	**1,4565**	**1,2900**	**1,2848**
	β	0,0173	0,0141	–0,0193	–0,09365	–0,1056	–0,1713
	γ	0,3424	0,0870	0,0003	0,003963	0,004838	0,006296
	δ	–0,1815	–0,1437	0,000016	0,000103	0,0001683	0,0003611
PKN ORLEN S.A.	α	**1,7482**	**1,9240**	**2,0000**	**1,49291**	**1,2949**	**1,3678**
	β	0,0146	0,0040	0,0000	–0,0421	0,00346	–0,1459
	γ	0,0840	0,0061	0,0028	0,002872	0,00306	0,004708
	δ	–0,0217	0,0021	0,0000	0,00003201	–0,0000035	0,0002133
WIG	α	**1,5324**	**1,4124**	**1,2913**	**1,2618**	**1,2276**	**1,4501**
	β	0,0180	0,0239	0,0345	0,08804	–0,02349	–0,08241
	γ	0,0003	0,0006	0,0012	0,001810	0,003703	0,007043
	δ	–0,0000013	–0,00001	–0,00008	–0,000196	–0,000207	0,000162

Źródło: Opracowanie własne.

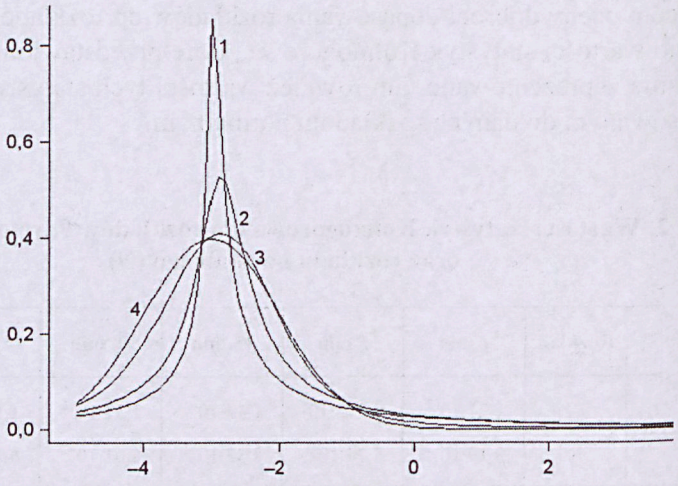
W celu oceny dobroci dopasowania rozkładów do rozkładów empirycznych obliczono wartości statystyk Kołmogorowa, które przedstawiono w tabeli 2. Dla porównania zaprezentowano tam również wartości tych statystyk, odpowiadające dopasowanym do danych rozkładom normalnym.

Tabela 2. Wartości statystyk Kołmogorowa dla rozkładów Pareto-Levy'ego (P-L) oraz rozkładu normalnego (N)

	Rozkład	1 min	5 min	15 min	30 min	1 godz.	2 godz.
AGORA S.A	P-L	$1{,}21 \cdot 10^{-2}$	$0{,}973 \cdot 10^{-2}$	$1{,}14 \cdot 10^{-2}$	$1{,}37 \cdot 10^{-2}$	$1{,}89 \cdot 10^{-2}$	$2{,}12 \cdot 10^{-2}$
	N	$9{,}17 \cdot 10^{-2}$	$8{,}74 \cdot 10^{-2}$	$8{,}32 \cdot 10^{-2}$	$8{,}01 \cdot 10^{-2}$	$6{,}74 \cdot 10^{-2}$	$6{,}56 \cdot 10^{-2}$
ELEKTRIM S.A.	P–L	$1{,}73 \cdot 10^{-2}$	$7{,}92 \cdot 10^{-3}$	$1{,}36 \cdot 10^{-2}$	$1{,}93 \cdot 10^{-2}$	$1{,}24 \cdot 10^{-2}$	$1{,}99 \cdot 10^{-2}$
	N	$7{,}47 \cdot 10^{-2}$	$7{,}09 \cdot 10^{-2}$	$7{,}75 \cdot 10^{-2}$	$7{,}84 \cdot 10^{-2}$	$6{,}71 \cdot 10^{-2}$	$6{,}37 \cdot 10^{-2}$
KGHM S.A.	P–L	$2{,}42 \cdot 10^{-2}$	$1{,}59 \cdot 10^{-2}$	$1{,}75 \cdot 10^{-2}$	$2{,}34 \cdot 10^{-2}$	$1{,}37 \cdot 10^{-2}$	$2{,}21 \cdot 10^{-2}$
	N	$8{,}64 \cdot 10^{-2}$	$7{,}29 \cdot 10^{-2}$	$7{,}78 \cdot 10^{-2}$	$6{,}25 \cdot 10^{-2}$	$5{,}93 \cdot 10^{-2}$	$5{,}39 \cdot 10^{-2}$
PROKOM S.A.	P–L	$6{,}17 \cdot 10^{-3}$	$2{,}32 \cdot 10^{-2}$	$1{,}23 \cdot 10^{-2}$	$1{,}99 \cdot 10^{-2}$	$1{,}96 \cdot 10^{-2}$	$2{,}43 \cdot 10^{-2}$
	N	$9{,}29 \cdot 10^{-2}$	$8{,}78 \cdot 10^{-2}$	$7{,}81 \cdot 10^{-2}$	$7{,}41 \cdot 10^{-2}$	$7{,}43 \cdot 10^{-2}$	$5{,}39 \cdot 10^{-2}$
ORLEN S.A.	P–L	$1{,}48 \cdot 10^{-2}$	$1{,}34 \cdot 10^{-2}$	$2{,}18 \cdot 10^{-2}$	$7{,}45 \cdot 10^{-3}$	$1{,}56 \cdot 10^{-2}$	$1{,}59 \cdot 10^{-2}$
	N	$8{,}27 \cdot 10^{-2}$	$8{,}61 \cdot 10^{-2}$	$8{,}36 \cdot 10^{-2}$	$7{,}58 \cdot 10^{-2}$	$7{,}66 \cdot 10^{-2}$	$7{,}18 \cdot 10^{-2}$
WIG	P–L	$1{,}73 \cdot 10^{-2}$	$2{,}76 \cdot 10^{-2}$	$1{,}87 \cdot 10^{-2}$	$2{,}65 \cdot 10^{-2}$	$1{,}94 \cdot 10^{-2}$	$2{,}43 \cdot 10^{-2}$
	N	$7{,}42 \cdot 10^{-2}$	$7{,}48 \cdot 10^{-2}$	$7{,}11 \cdot 10^{-2}$	$6{,}67 \cdot 10^{-2}$	$7{,}04 \cdot 10^{-2}$	$6{,}21 \cdot 10^{-2}$

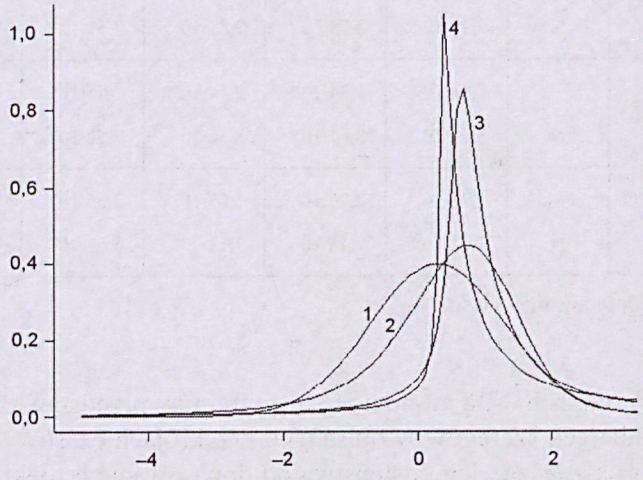
Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunkach 3-38 za pomocą histogramów przedstawiono rozkłady empiryczne badanych szeregów w opisanych przekrojach czasowych w celu zwrócenia uwagi na znaczne ich odstępstwa od dopasowanych rozkładów normalnych, które zaprezentowano za pomocą linii ciągłej. Praktycznie w każdym wypadku można stwierdzić, że wartości kurtozy i współczynników skośności dla rozkładów Pareto-Levy'ego są diametralnie różne od rozkładu normalnego. Na rysunkach 39-44 zaprezentowano – w celu precyzyjniejszego przedstawienia struktury badanych szeregów czasowych – histogramy WIG dla różnych rozpiętości przedziałów klasowych.



1 – (α=0,5, β=0,2, γ=1, δ=–3)
2 – (α=1,0, β=0,2, γ=1, δ=–3)
3 – (α=1,5, β=0,2, γ=1, δ=–3)
4 – (α=2,0, β=0,2, γ=1, δ=–3)

Rys. 1. Funkcja gęstości rozkładu Pareto-Lavy'ego
Źródło: Opracowanie własne

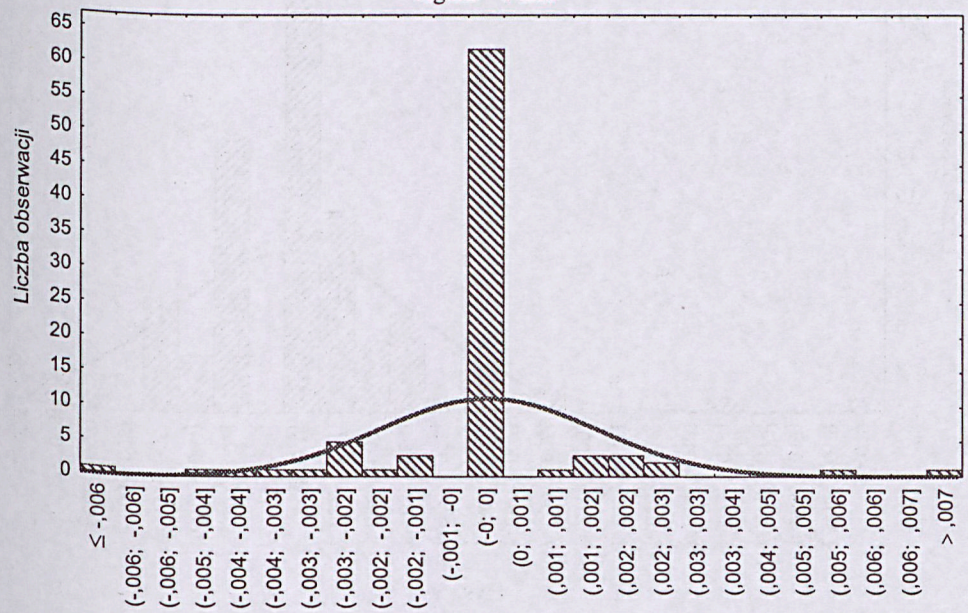


1 – (α=0,5, β=0,7, γ=1, δ=0,3)
2 – (α=1,0, β=0,7, γ=1, δ=0,3)
3 – (α=1,5, β=0,7, γ=1, δ=0,3)
4 – (α=2,0, β=0,7, γ=1, δ=0,3)

Rys. 2. Funkcja gęstości rozkładu Pareto-Lavy'ego
Źródło: Opracowanie własne

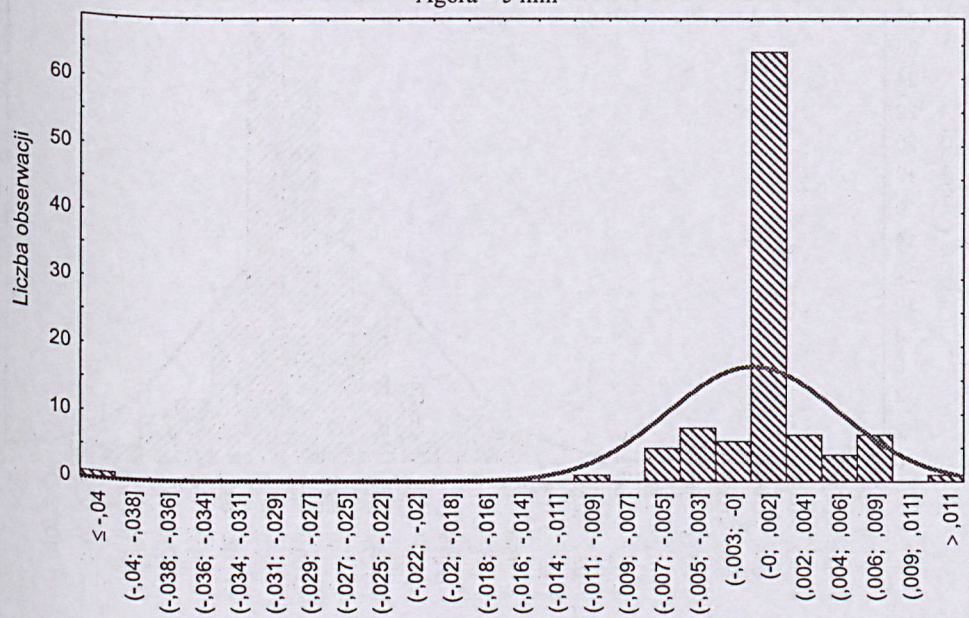
Histogramy zwrotów akcji w różnych przekrojach czasowych (rys. 3-38)
Źródło: Opracowanie własne

Agora – 1 min

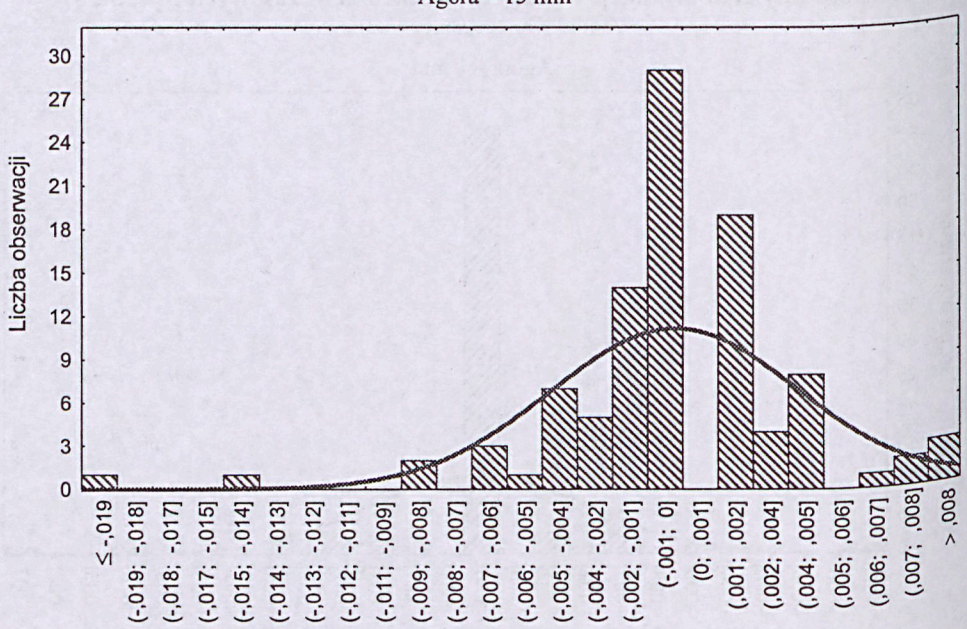


Rys. 3

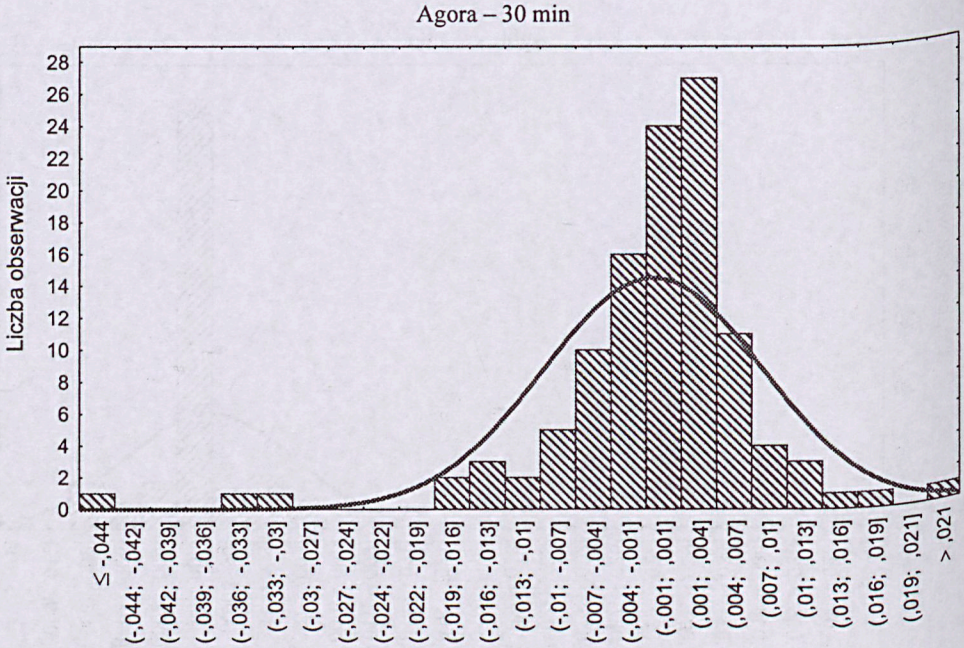
Agora – 5 min



Rys. 4

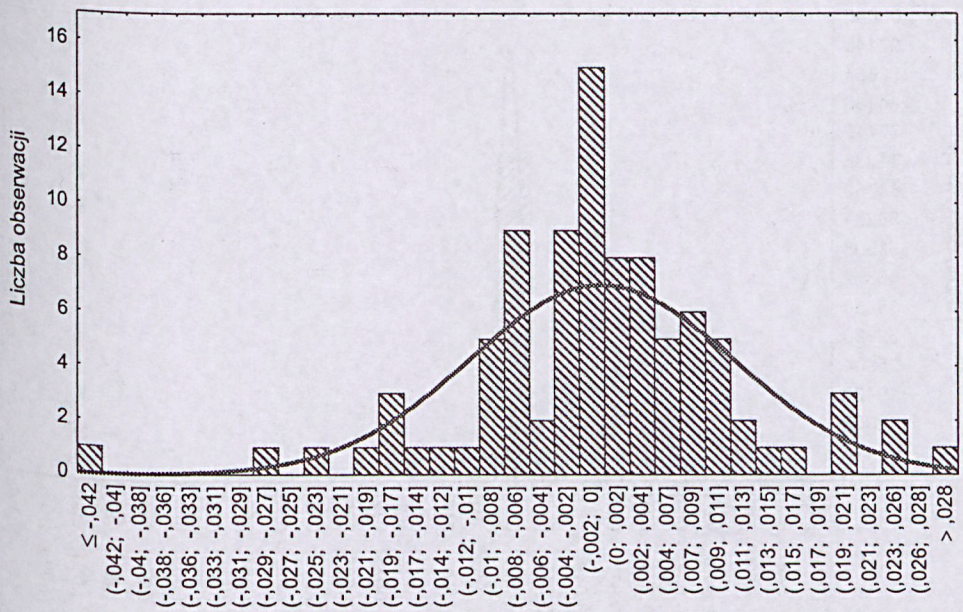

Agora – 15 min
Liczba obserwacji
0
3
6
9
12
15
18
21
24
27
30
≤ -,019
(-,019; -,018]
(-,018; -,017]
(-,017; -,015]
(-,015; -,014]
(-,014; -,013]
(-,013; -,012]
(-,012; -,011]
(-,011; -,009]
(-,009; -,008]
(-,008; -,007]
(-,007; -,006]
(-,006; -,005]
(-,005; -,004]
(-,004; -,002]
(-,002; -,001]
(-,001; 0]
(0; ,001]
(,001; ,002]
(,002; ,004]
(,004; ,005]
(,005; ,006]
(,006; ,007]
(,007; ,008]
> ,008

Rys. 5


Agora – 30 min
Liczba obserwacji
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
≤ -,044
(-,044; -,042]
(-,042; -,039]
(-,039; -,036]
(-,036; -,033]
(-,033; -,03]
(-,03; -,027]
(-,027; -,024]
(-,024; -,022]
(-,022; -,019]
(-,019; -,016]
(-,016; -,013]
(-,013; -,01]
(-,01; -,007]
(-,007; -,004]
(-,004; -,001]
(-,001; ,001]
(,001; ,004]
(,004; ,007]
(,007; ,01]
(,01; ,013]
(,013; ,016]
(,016; ,019]
(,019; ,021]
> ,021

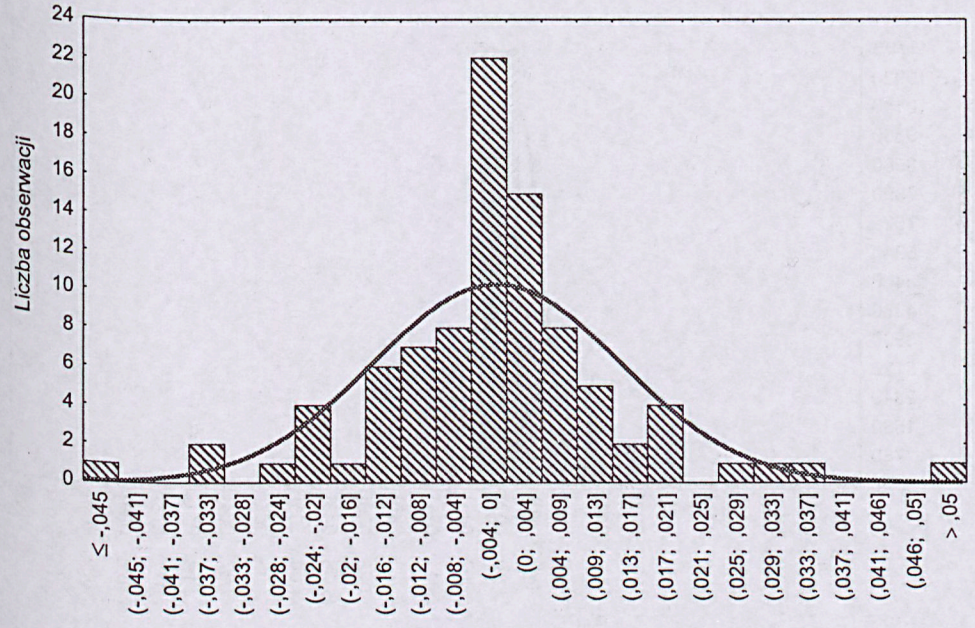
Rys. 6

Agora – 1 godz.

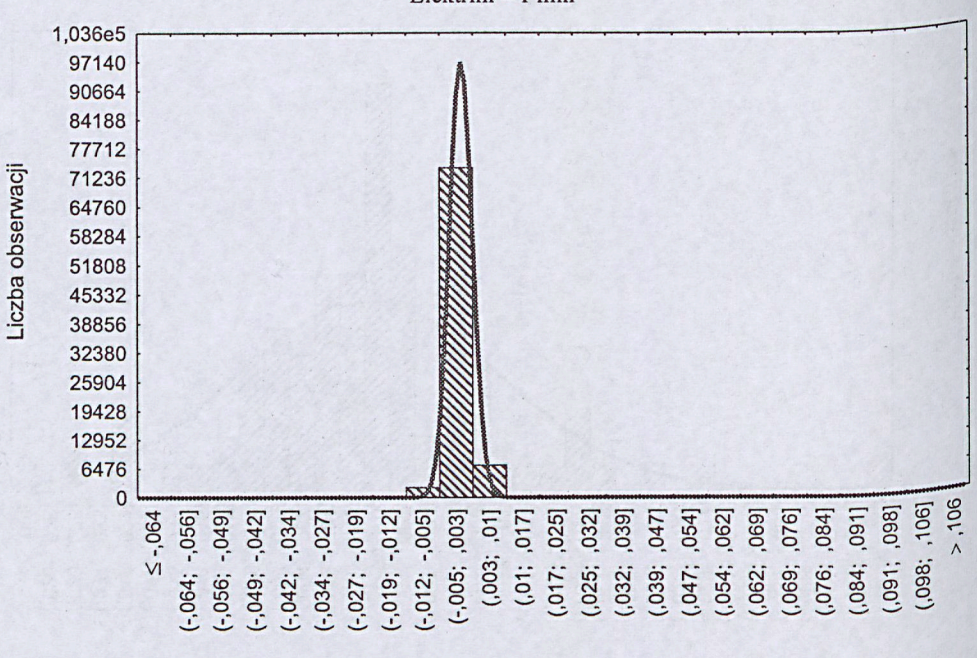


Rys. 7

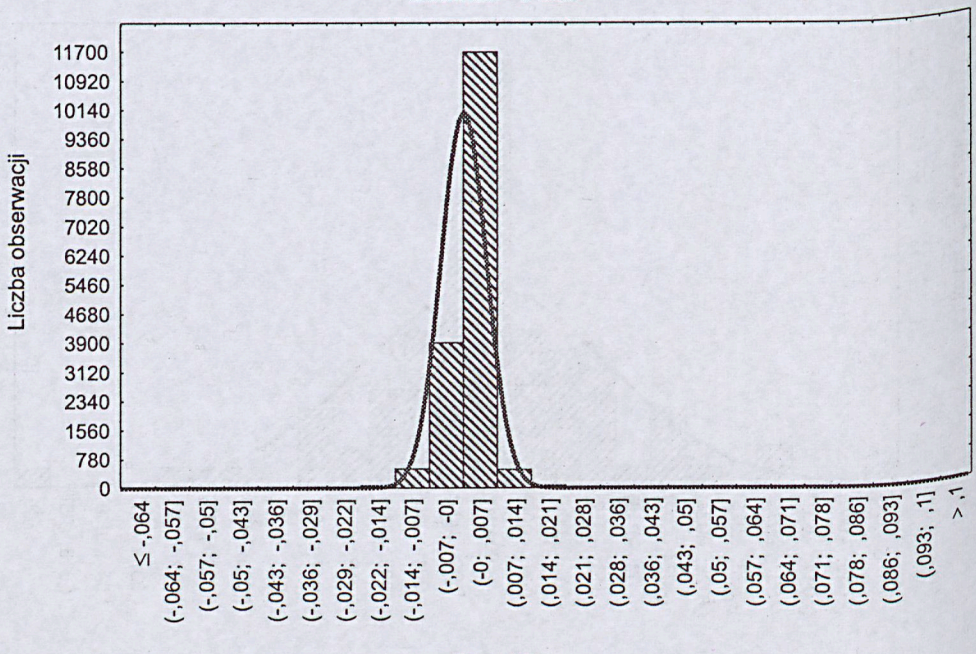
Agora – 2 godz.



Rys. 8

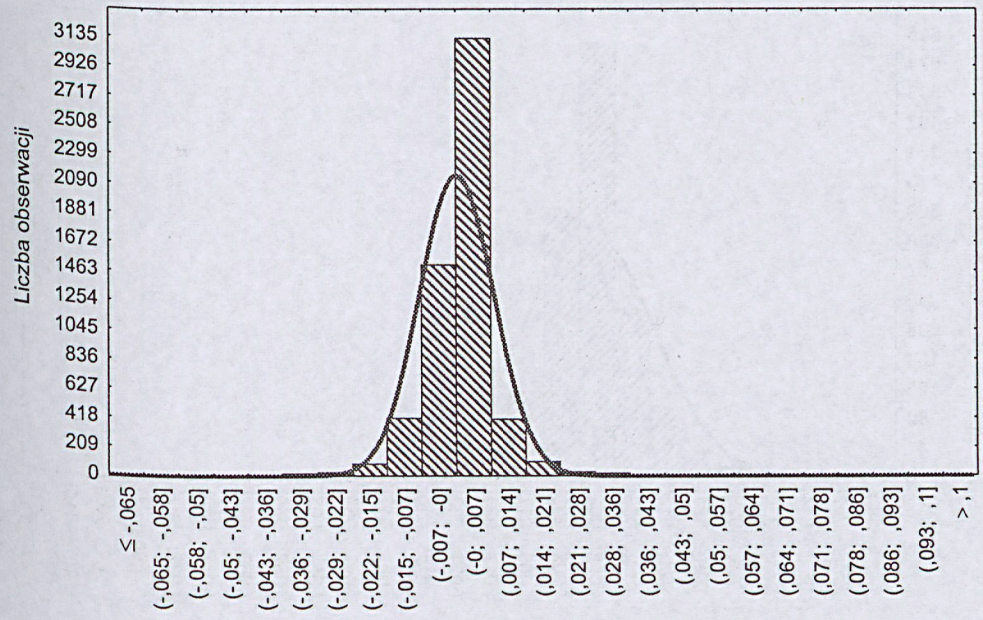

Elektrim – 1 min
Liczba obserwacji
1,036e5
97140
90664
84188
77712
71236
64760
58284
51808
45332
38856
32380
25904
19428
12952
6476
0
≤ -,064
(-,064; -,056]
(-,056; -,049]
(-,049; -,042]
(-,042; -,034]
(-,034; -,027]
(-,027; -,019]
(-,019; -,012]
(-,012; -,005]
(-,005; ,003]
(,003; ,01]
(,01; ,017]
(,017; ,025]
(,025; ,032]
(,032; ,039]
(,039; ,047]
(,047; ,054]
(,054; ,062]
(,062; ,069]
(,069; ,076]
(,076; ,084]
(,084; ,091]
(,091; ,098]
(,098; ,106]
> ,106

Rys. 9


Elektrim – 5 min
Liczba obserwacji
11700
10920
10140
9360
8580
7800
7020
6240
5460
4680
3900
3120
2340
1560
780
0
≤ -,064
(-,064; -,057]
(-,057; -,05]
(-,05; -,043]
(-,043; -,036]
(-,036; -,029]
(-,029; -,022]
(-,022; -,014]
(-,014; -,007]
(-,007; -0]
(-0; ,007]
(,007; ,014]
(,014; ,021]
(,021; ,028]
(,028; ,036]
(,036; ,043]
(,043; ,05]
(,05; ,057]
(,057; ,064]
(,064; ,071]
(,071; ,078]
(,078; ,086]
(,086; ,093]
(,093; ,1]
> ,1

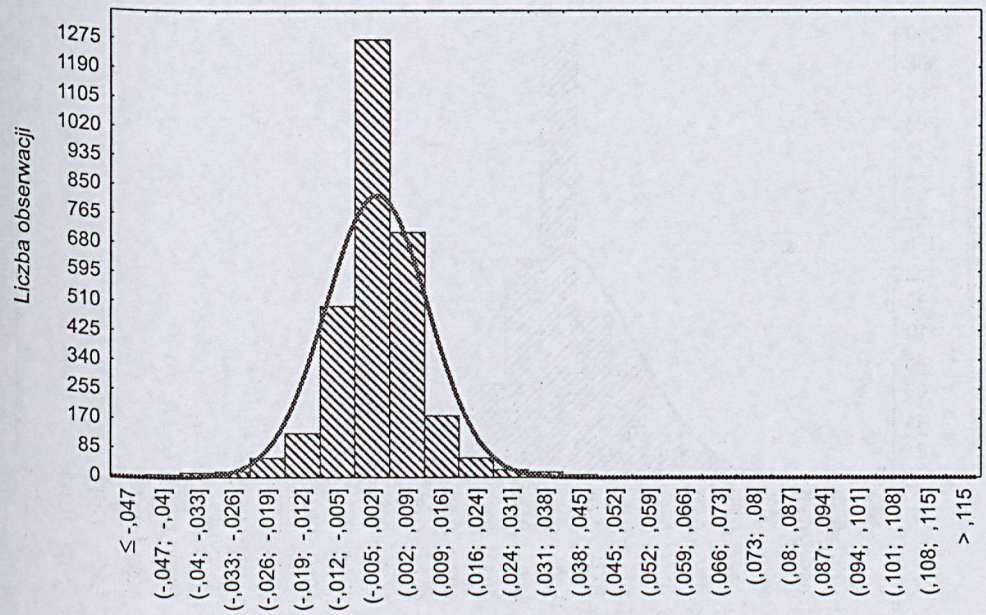
Rys. 10

Elektrim – 15 min

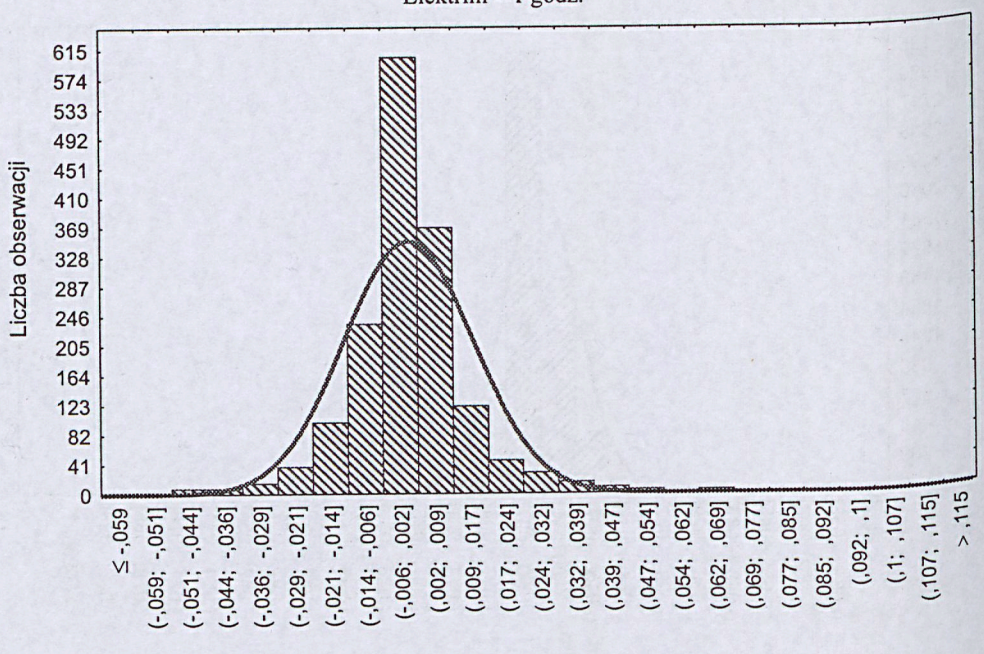


Rys. 11

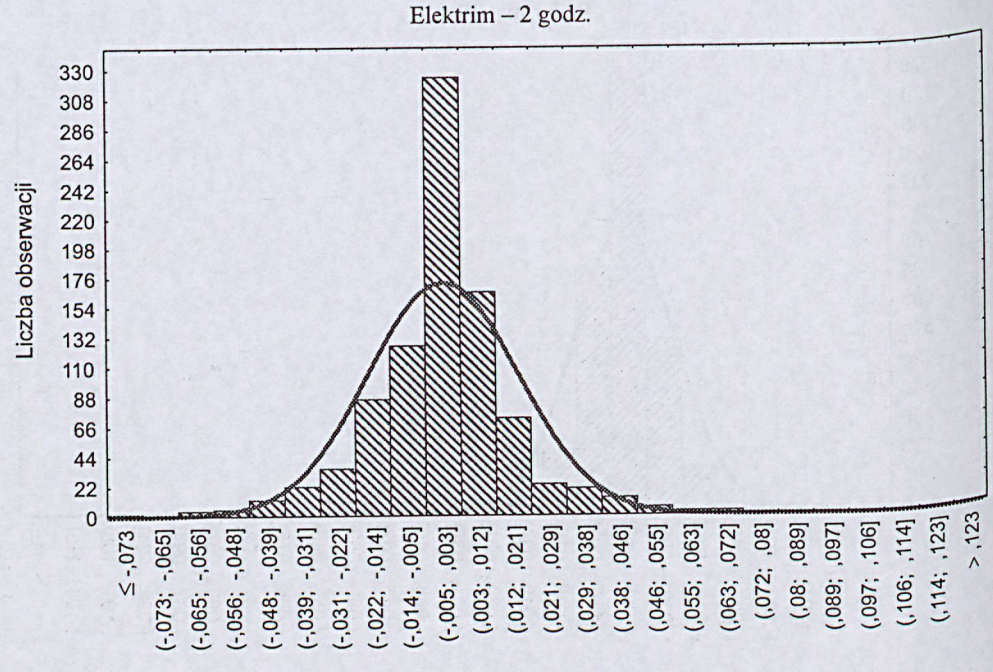
Elektrim – 30 min



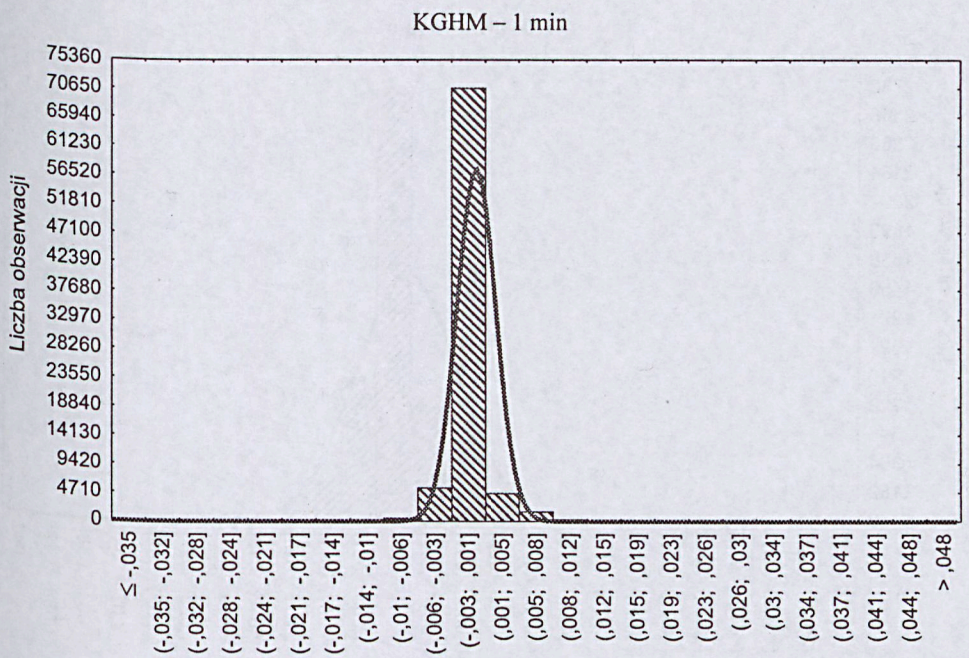
Rys. 12


Elektrim – 1 godz.
Liczba obserwacji
615
574
533
492
451
410
369
328
287
246
205
164
123
82
41
0
≤ -,059
(-,059; -,051]
(-,051; -,044]
(-,044; -,036]
(-,036; -,029]
(-,029; -,021]
(-,021; -,014]
(-,014; -,006]
(-,006; ,002]
(,002; ,009]
(,009; ,017]
(,017; ,024]
(,024; ,032]
(,032; ,039]
(,039; ,047]
(,047; ,054]
(,054; ,062]
(,062; ,069]
(,069; ,077]
(,077; ,085]
(,085; ,092]
(,092; ,1]
(,1; ,107]
(,107; ,115]
> ,115

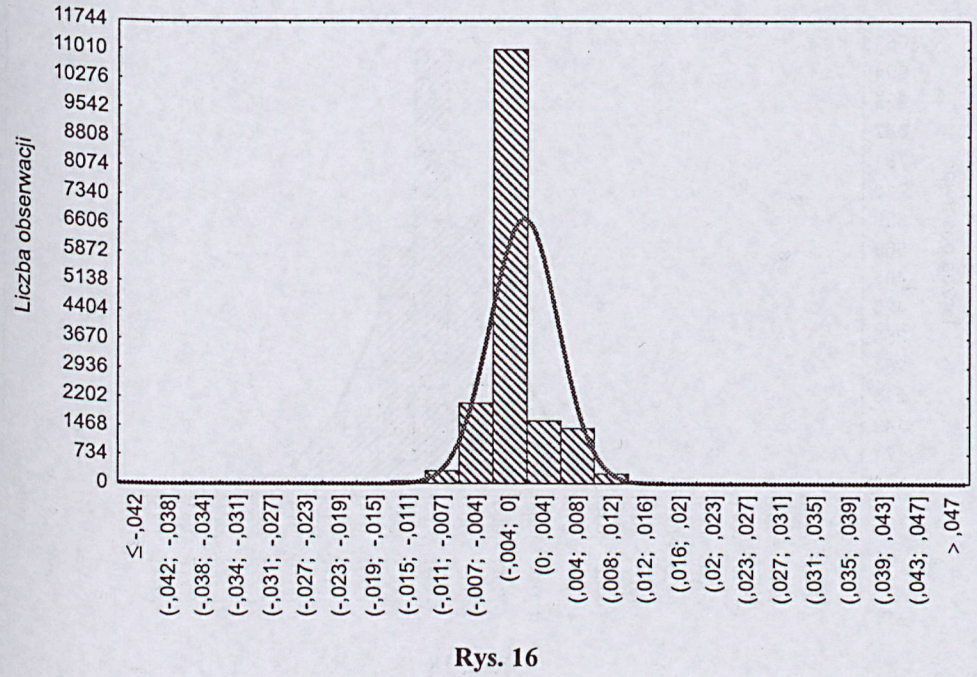
Rys. 13


Elektrim – 2 godz.
Liczba obserwacji
330
308
286
264
242
220
198
176
154
132
110
88
66
44
22
0
≤ -,073
(-,073; -,065]
(-,065; -,056]
(-,056; -,048]
(-,048; -,039]
(-,039; -,031]
(-,031; -,022]
(-,022; -,014]
(-,014; -,005]
(-,005; ,003]
(,003; ,012]
(,012; ,021]
(,021; ,029]
(,029; ,038]
(,038; ,046]
(,046; ,055]
(,055; ,063]
(,063; ,072]
(,072; ,08]
(,08; ,089]
(,089; ,097]
(,097; ,106]
(,106; ,114]
(,114; ,123]
> ,123

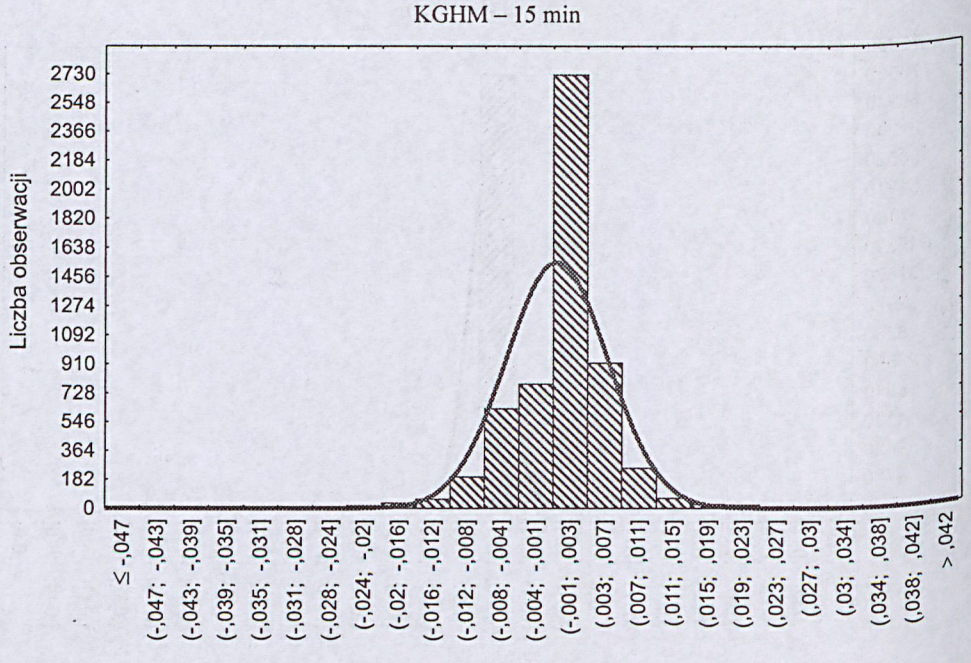
Rys. 14


KGHM – 1 min
Liczba obserwacji
75360
70650
65940
61230
56520
51810
47100
42390
37680
32970
28260
23550
18840
14130
9420
4710
0
≤ -,035
(-,035; -,032]
(-,032; -,028]
(-,028; -,024]
(-,024; -,021]
(-,021; -,017]
(-,017; -,014]
(-,014; -,01]
(-,01; -,006]
(-,006; -,003]
(-,003; ,001]
(,001; ,005]
(,005; ,008]
(,008; ,012]
(,012; ,015]
(,015; ,019]
(,019; ,023]
(,023; ,026]
(,026; ,03]
(,03; ,034]
(,034; ,037]
(,037; ,041]
(,041; ,044]
(,044; ,048]
> ,048

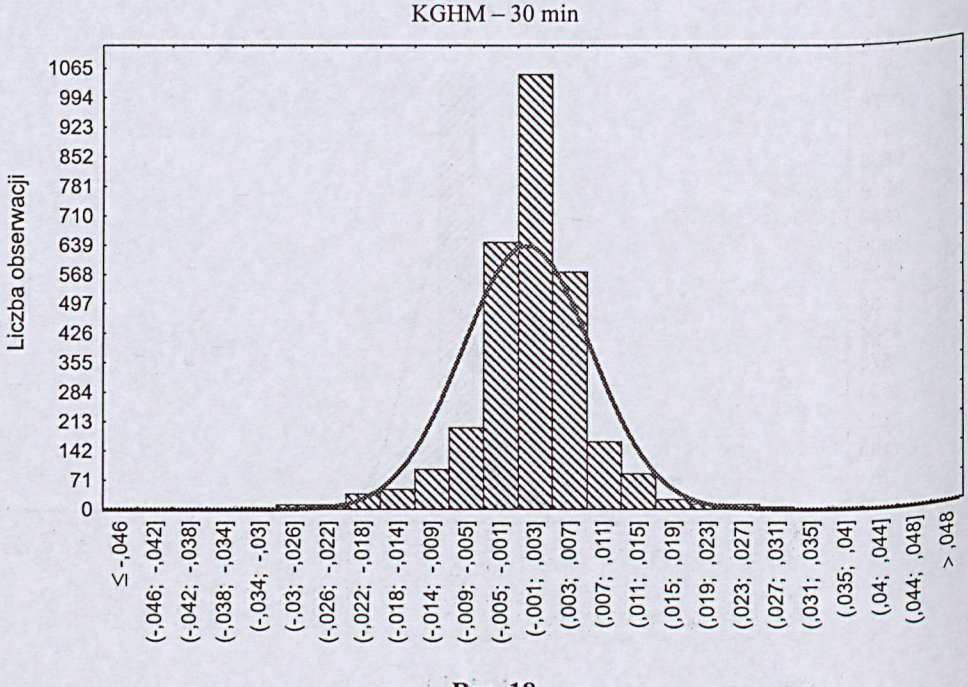
Rys. 15


KGHM – 5 min
Liczba obserwacji
11744
11010
10276
9542
8808
8074
7340
6606
5872
5138
4404
3670
2936
2202
1468
734
0
≤ -,042
(-,042; -,038]
(-,038; -,034]
(-,034; -,031]
(-,031; -,027]
(-,027; -,023]
(-,023; -,019]
(-,019; -,015]
(-,015; -,011]
(-,011; -,007]
(-,007; -,004]
(-,004; 0]
(0; ,004]
(,004; ,008]
(,008; ,012]
(,012; ,016]
(,016; ,02]
(,02; ,023]
(,023; ,027]
(,027; ,031]
(,031; ,035]
(,035; ,039]
(,039; ,043]
(,043; ,047]
> ,047

Rys. 16

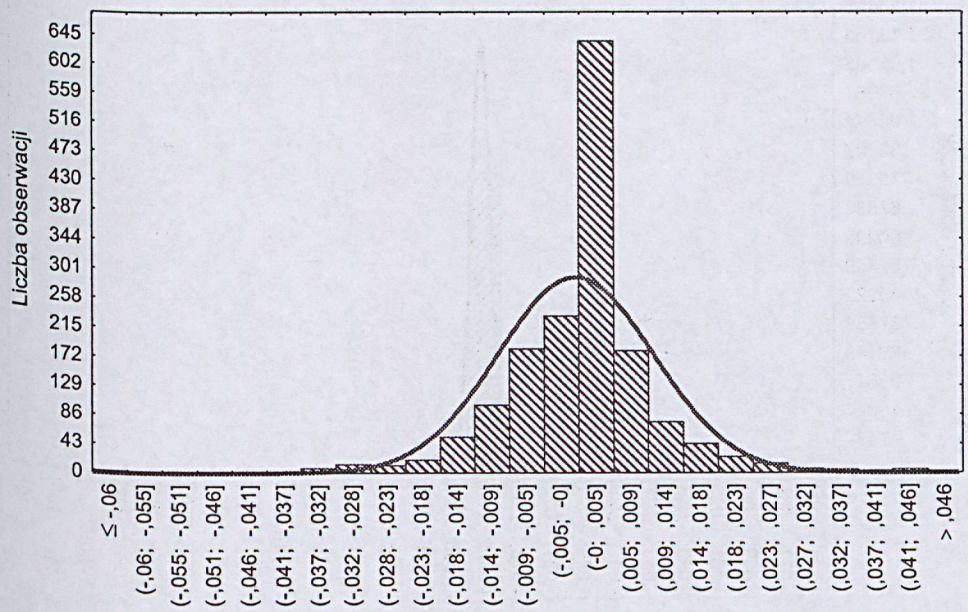

KGHM – 15 min
Liczba obserwacji
2730
2548
2366
2184
2002
1820
1638
1456
1274
1092
910
728
546
364
182
0
≤ -,047
(-,047; -,043]
(-,043; -,039]
(-,039; -,035]
(-,035; -,031]
(-,031; -,028]
(-,028; -,024]
(-,024; -,02]
(-,02; -,016]
(-,016; -,012]
(-,012; -,008]
(-,008; -,004]
(-,004; -,001]
(-,001; ,003]
(,003; ,007]
(,007; ,011]
(,011; ,015]
(,015; ,019]
(,019; ,023]
(,023; ,027]
(,027; ,03]
(,03; ,034]
(,034; ,038]
(,038; ,042]
> ,042

Rys. 17


KGHM – 30 min
Liczba obserwacji
1065
994
923
852
781
710
639
568
497
426
355
284
213
142
71
0
≤ -,046
(-,046; -,042]
(-,042; -,038]
(-,038; -,034]
(-,034; -,03]
(-,03; -,026]
(-,026; -,022]
(-,022; -,018]
(-,018; -,014]
(-,014; -,009]
(-,009; -,005]
(-,005; -,001]
(-,001; ,003]
(,003; ,007]
(,007; ,011]
(,011; ,015]
(,015; ,019]
(,019; ,023]
(,023; ,027]
(,027; ,031]
(,031; ,035]
(,035; ,04]
(,04; ,044]
(,044; ,048]
> ,048

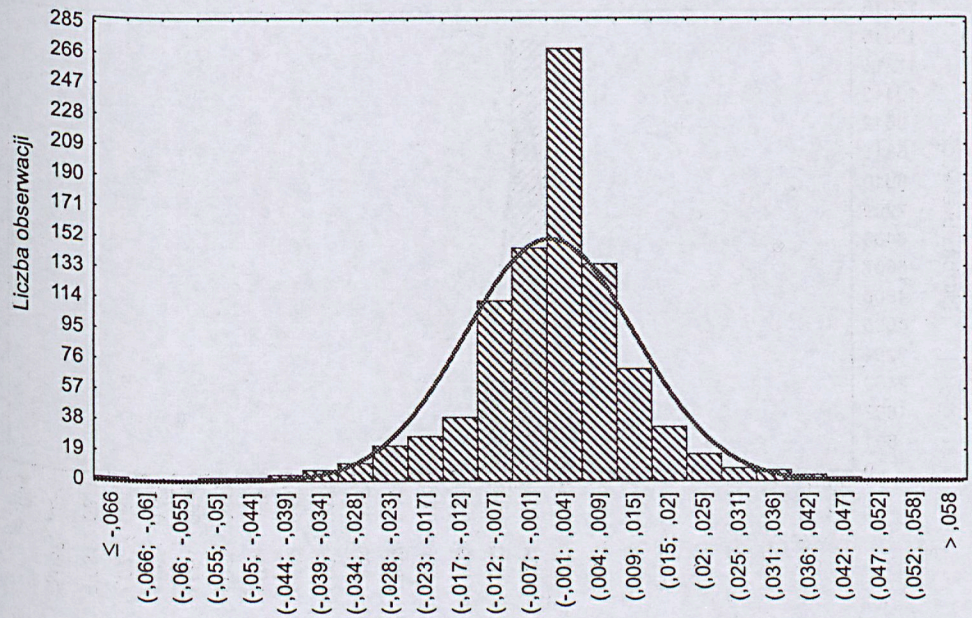
Rys. 18

KGHM – 1 godz.

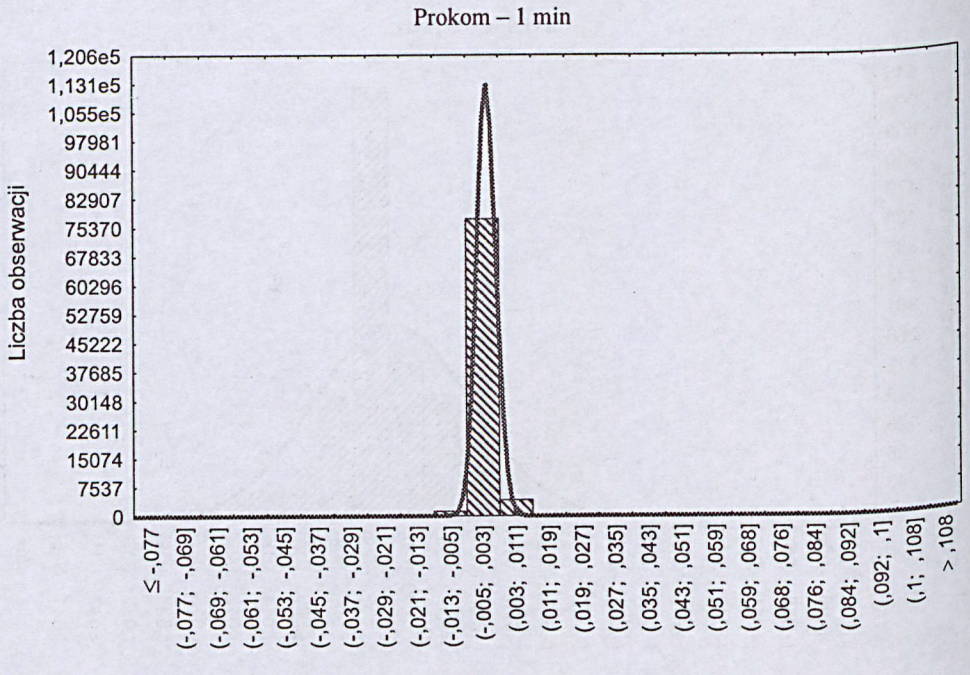


Rys. 19

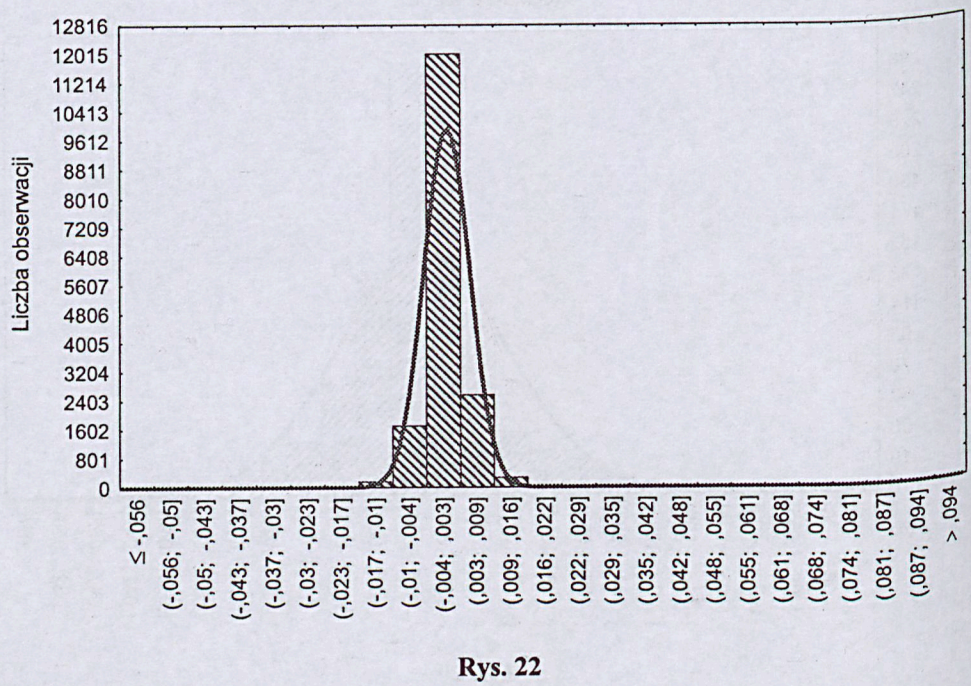
KGHM – 2 godz.



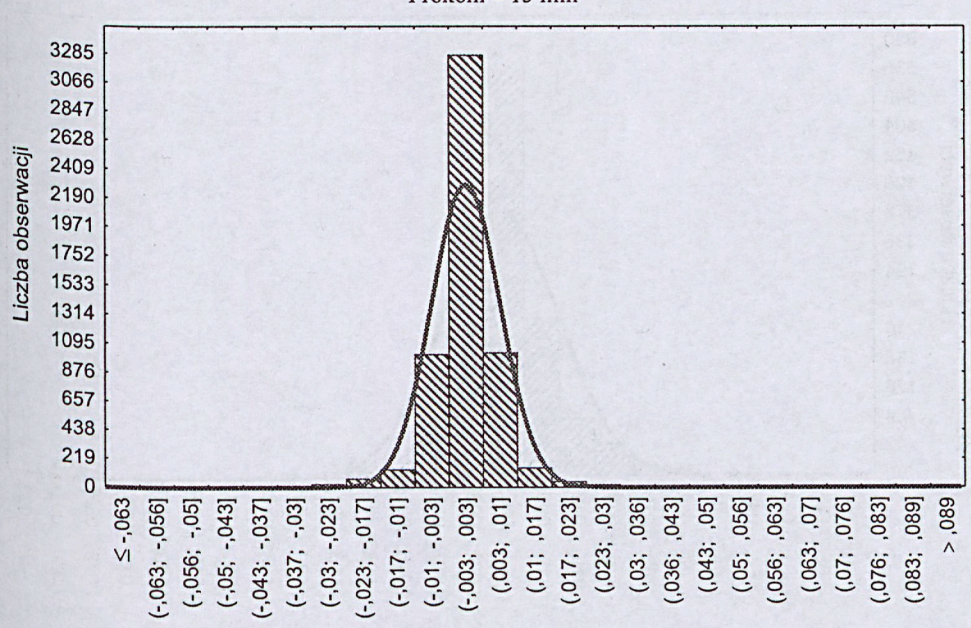
Rys. 20


Prokom – 1 min
Liczba obserwacji
1,206e5
1,131e5
1,055e5
97981
90444
82907
75370
67833
60296
52759
45222
37685
30148
22611
15074
7537
0
≤ -,077
(-,077; -,069]
(-,069; -,061]
(-,061; -,053]
(-,053; -,045]
(-,045; -,037]
(-,037; -,029]
(-,029; -,021]
(-,021; -,013]
(-,013; -,005]
(-,005; ,003]
(,003; ,011]
(,011; ,019]
(,019; ,027]
(,027; ,035]
(,035; ,043]
(,043; ,051]
(,051; ,059]
(,059; ,068]
(,068; ,076]
(,076; ,084]
(,084; ,092]
(,092; ,1]
(,1; ,108]
> ,108

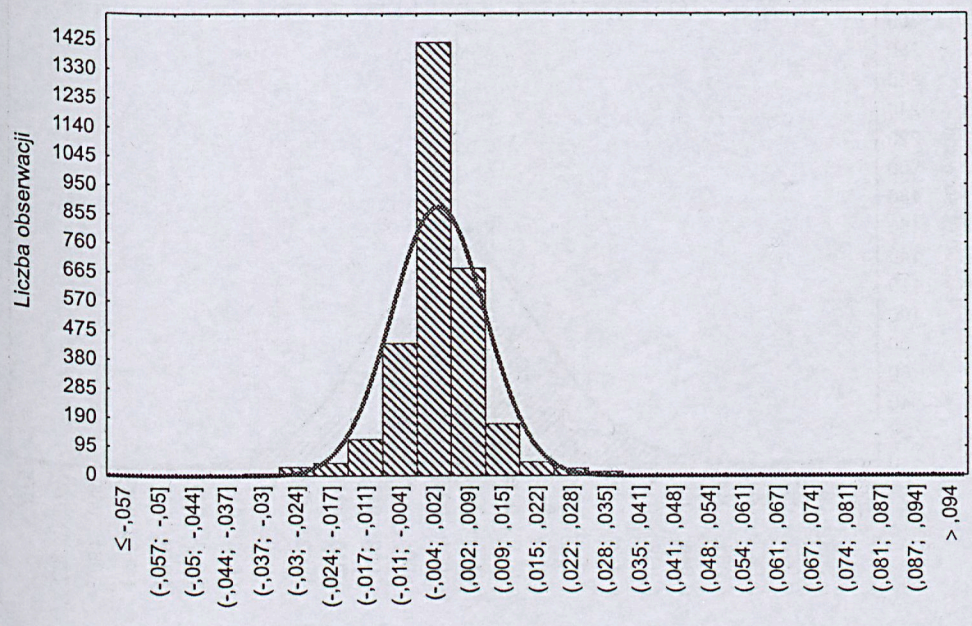
Rys. 21


Prokom – 5 min
Liczba obserwacji
12816
12015
11214
10413
9612
8811
8010
7209
6408
5607
4806
4005
3204
2403
1602
801
0
≤ -,056
(-,056; -,05]
(-,05; -,043]
(-,043; -,037]
(-,037; -,03]
(-,03; -,023]
(-,023; -,017]
(-,017; -,01]
(-,01; -,004]
(-,004; ,003]
(,003; ,009]
(,009; ,016]
(,016; ,022]
(,022; ,029]
(,029; ,035]
(,035; ,042]
(,042; ,048]
(,048; ,055]
(,055; ,061]
(,061; ,068]
(,068; ,074]
(,074; ,081]
(,081; ,087]
(,087; ,094]
> ,094

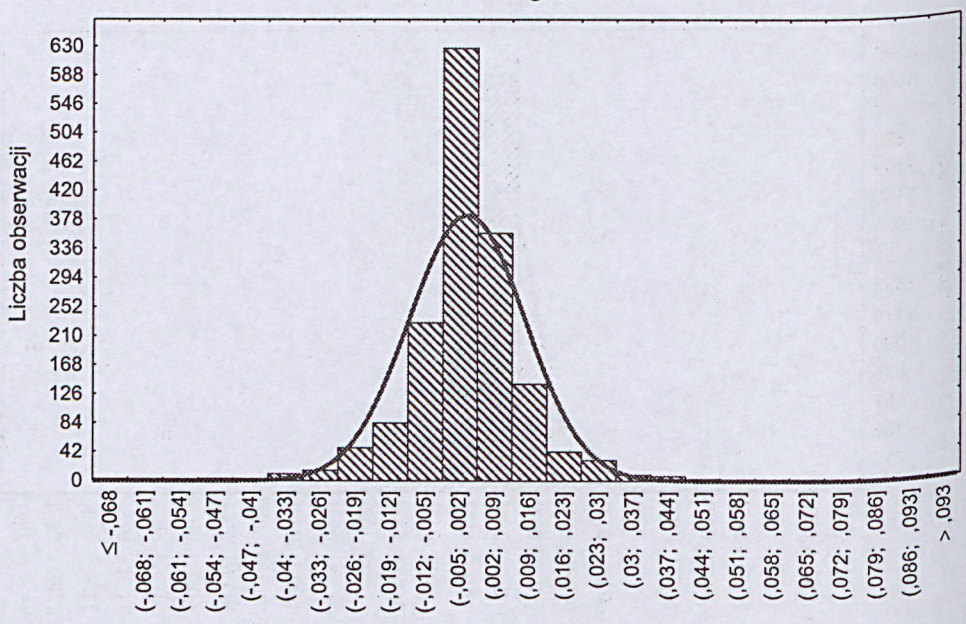
Rys. 22


Prokom – 15 min
Liczba obserwacji
3285
3066
2847
2628
2409
2190
1971
1752
1533
1314
1095
876
657
438
219
0
≤ -,063
(-,063; -,056]
(-,056; -,05]
(-,05; -,043]
(-,043; -,037]
(-,037; -,03]
(-,03; -,023]
(-,023; -,017]
(-,017; -,01]
(-,01; -,003]
(-,003; ,003]
(,003; ,01]
(,01; ,017]
(,017; ,023]
(,023; ,03]
(,03; ,036]
(,036; ,043]
(,043; ,05]
(,05; ,056]
(,056; ,063]
(,063; ,07]
(,07; ,076]
(,076; ,083]
(,083; ,089]
> ,089

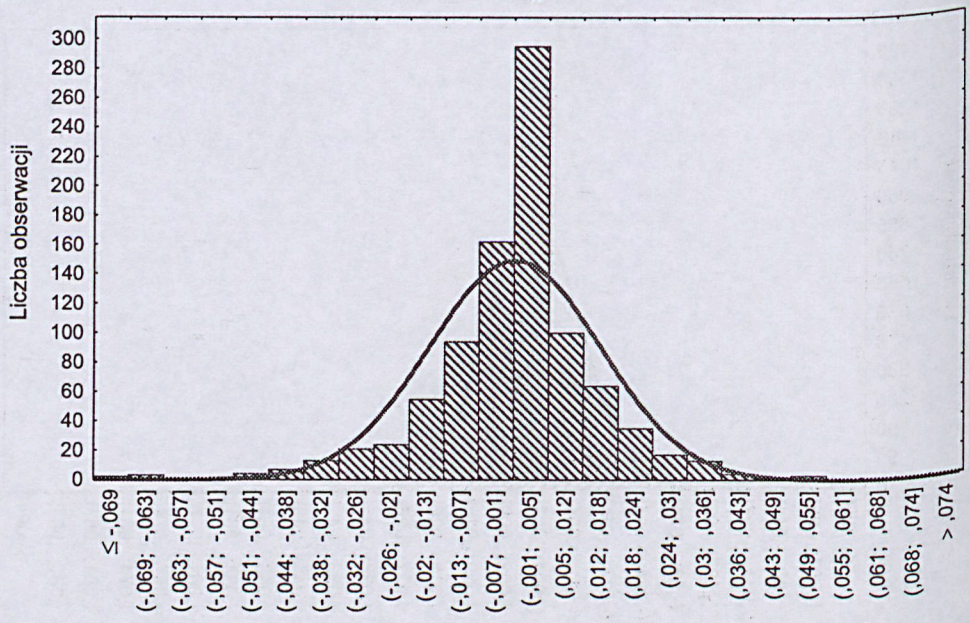
Rys. 23


Prokom – 30 min
Liczba obserwacji
1425
1330
1235
1140
1045
950
855
760
665
570
475
380
285
190
95
0
≤ -,057
(-,057; -,05]
(-,05; -,044]
(-,044; -,037]
(-,037; -,03]
(-,03; -,024]
(-,024; -,017]
(-,017; -,011]
(-,011; -,004]
(-,004; ,002]
(,002; ,009]
(,009; ,015]
(,015; ,022]
(,022; ,028]
(,028; ,035]
(,035; ,041]
(,041; ,048]
(,048; ,054]
(,054; ,061]
(,061; ,067]
(,067; ,074]
(,074; ,081]
(,081; ,087]
(,087; ,094]
> ,094

Rys. 24

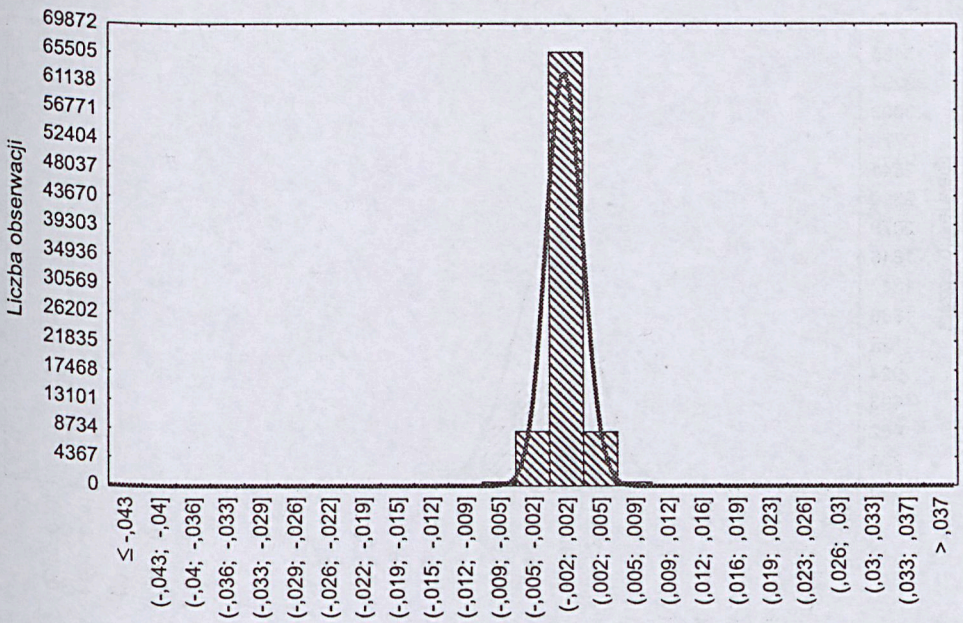

Prokom – 1 godz.
Liczba obserwacji
630
588
546
504
462
420
378
336
294
252
210
168
126
84
42
0
≤ -,068
(-,068; -,061]
(-,061; -,054]
(-,054; -,047]
(-,047; -,04]
(-,04; -,033]
(-,033; -,026]
(-,026; -,019]
(-,019; -,012]
(-,012; -,005]
(-,005; ,002]
(,002; ,009]
(,009; ,016]
(,016; ,023]
(,023; ,03]
(,03; ,037]
(,037; ,044]
(,044; ,051]
(,051; ,058]
(,058; ,065]
(,065; ,072]
(,072; ,079]
(,079; ,086]
(,086; ,093]
> ,093

Rys. 25


Prokom – 2 godz.
Liczba obserwacji
300
280
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
≤ -,069
(-,069; -,063]
(-,063; -,057]
(-,057; -,051]
(-,051; -,044]
(-,044; -,038]
(-,038; -,032]
(-,032; -,026]
(-,026; -,02]
(-,02; -,013]
(-,013; -,007]
(-,007; -,001]
(-,001; ,005]
(,005; ,012]
(,012; ,018]
(,018; ,024]
(,024; ,03]
(,03; ,036]
(,036; ,043]
(,043; ,049]
(,049; ,055]
(,055; ,061]
(,061; ,068]
(,068; ,074]
> ,074

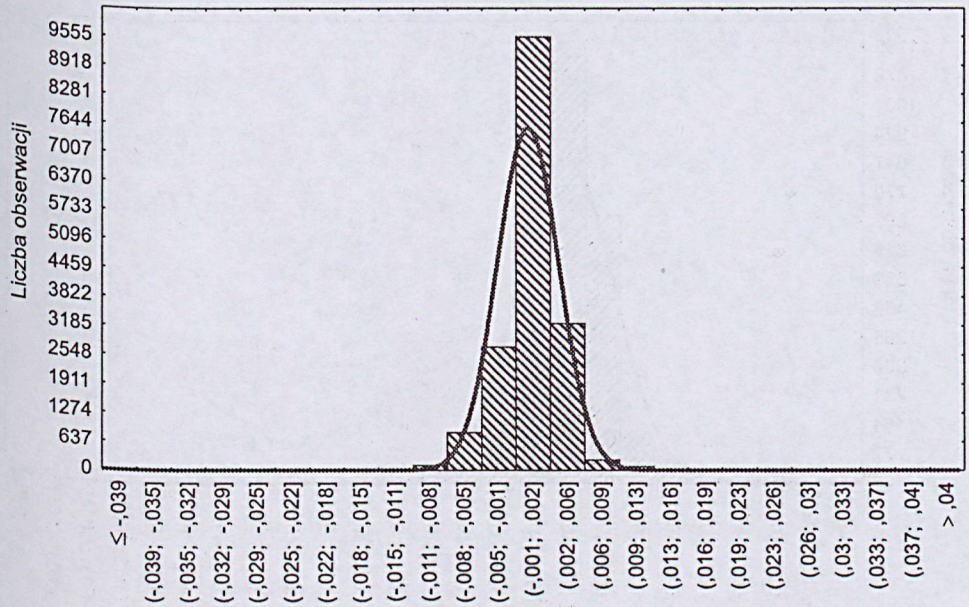
Rys. 26

PKN – 1 min

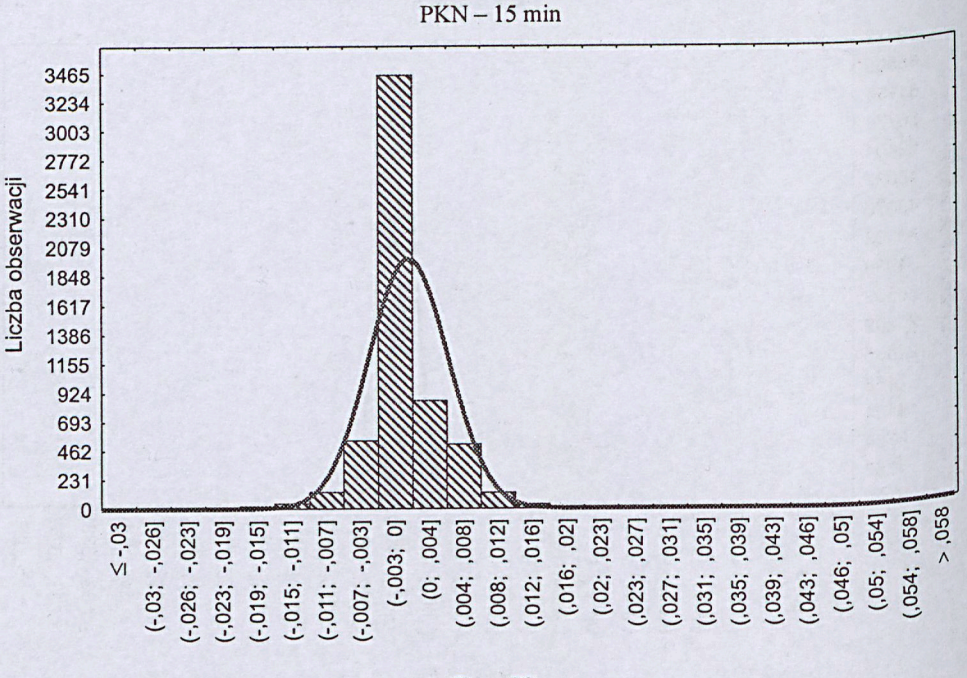


Rys. 27

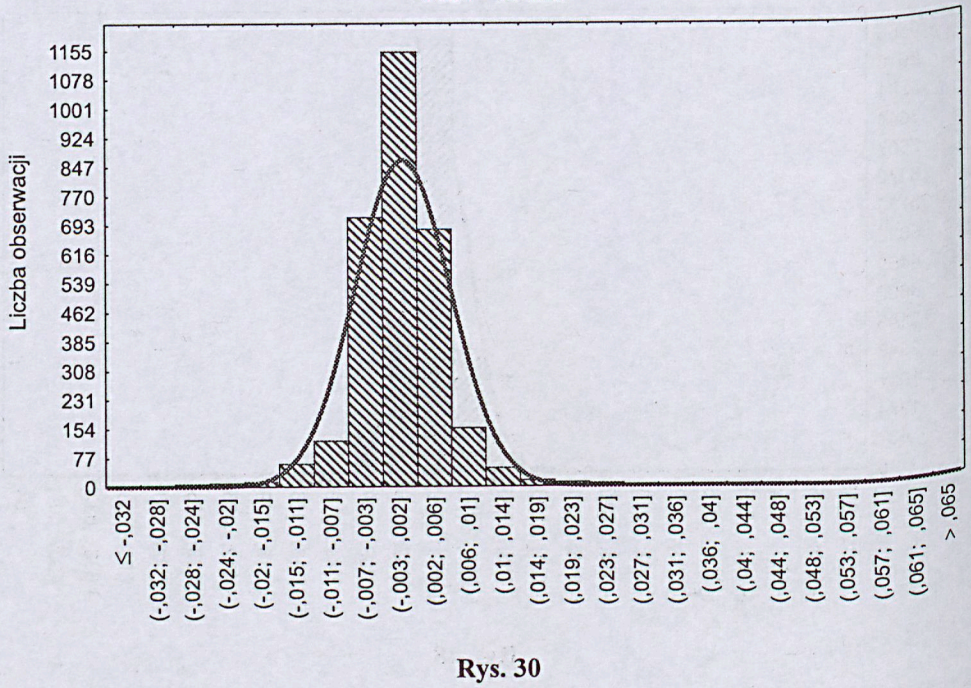
PKN – 5 min



Rys. 28

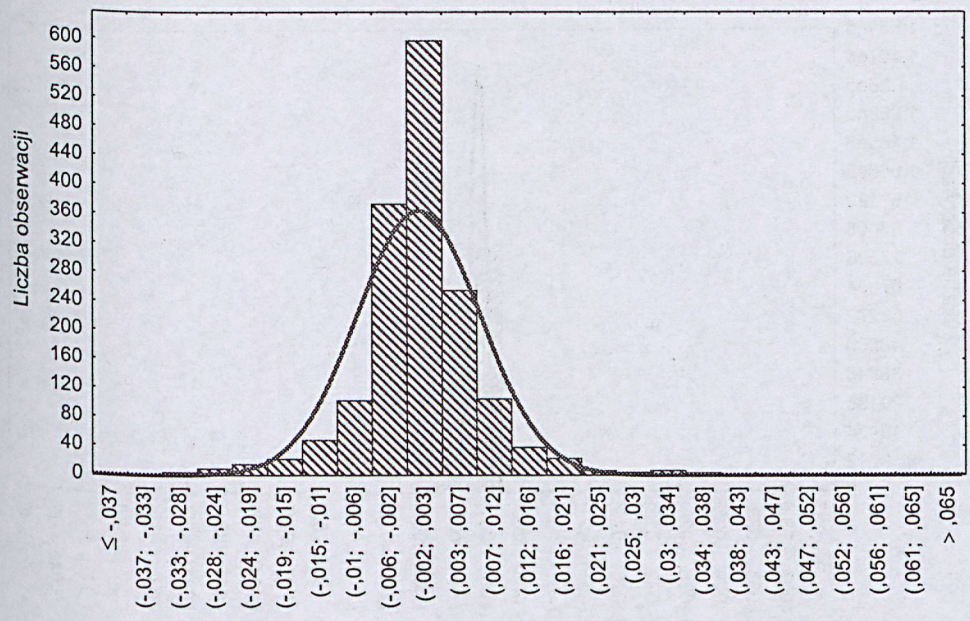

PKN – 15 min
Liczba obserwacji
3465
3234
3003
2772
2541
2310
2079
1848
1617
1386
1155
924
693
462
231
0
≤ -,03
(-,03; -,026]
(-,026; -,023]
(-,023; -,019]
(-,019; -,015]
(-,015; -,011]
(-,011; -,007]
(-,007; -,003]
(-,003; 0]
(0; ,004]
(,004; ,008]
(,008; ,012]
(,012; ,016]
(,016; ,02]
(,02; ,023]
(,023; ,027]
(,027; ,031]
(,031; ,035]
(,035; ,039]
(,039; ,043]
(,043; ,046]
(,046; ,05]
(,05; ,054]
(,054; ,058]
> ,058

Rys. 29


PKN – 30 min
Liczba obserwacji
1155
1078
1001
924
847
770
693
616
539
462
385
308
231
154
77
0
≤ -,032
(-,032; -,028]
(-,028; -,024]
(-,024; -,02]
(-,02; -,015]
(-,015; -,011]
(-,011; -,007]
(-,007; -,003]
(-,003; ,002]
(,002; ,006]
(,006; ,01]
(,01; ,014]
(,014; ,019]
(,019; ,023]
(,023; ,027]
(,027; ,031]
(,031; ,036]
(,036; ,04]
(,04; ,044]
(,044; ,048]
(,048; ,053]
(,053; ,057]
(,057; ,061]
(,061; ,065]
> ,065

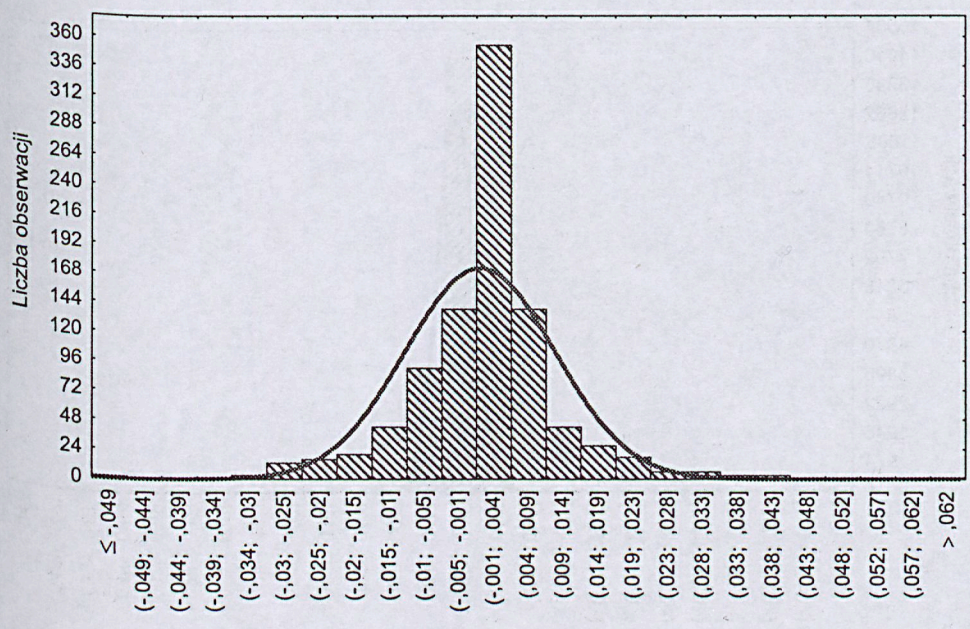
Rys. 30

PKN – 1 godz.



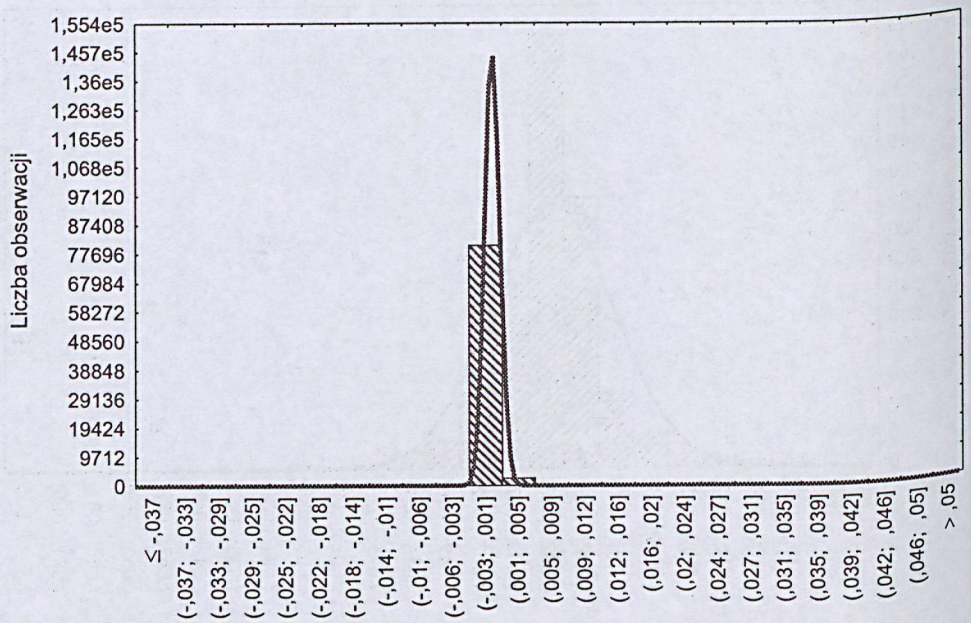
Rys. 31

PKN – 2 godz.



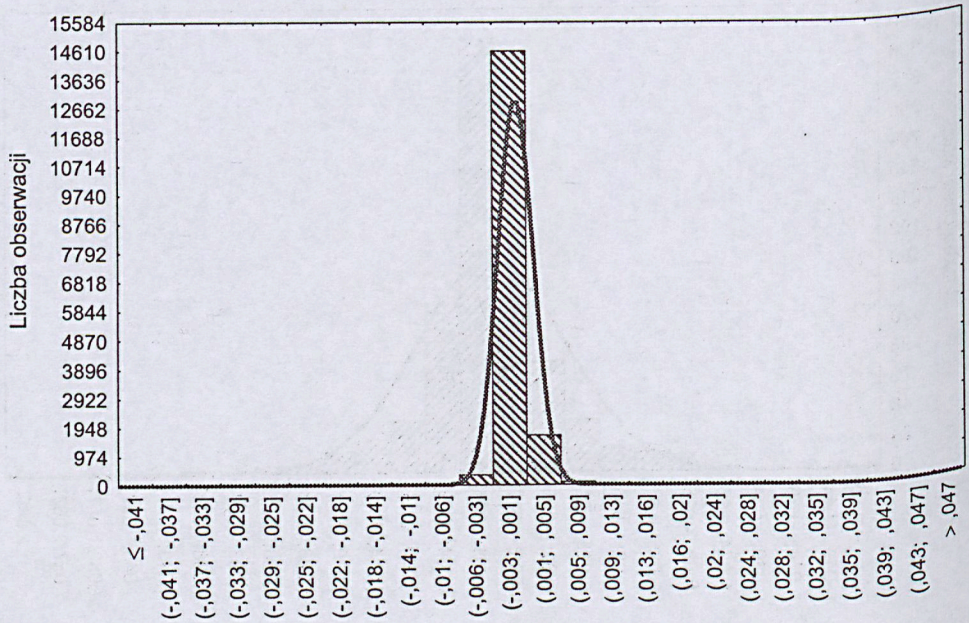
Rys. 32

WIG – 1 min



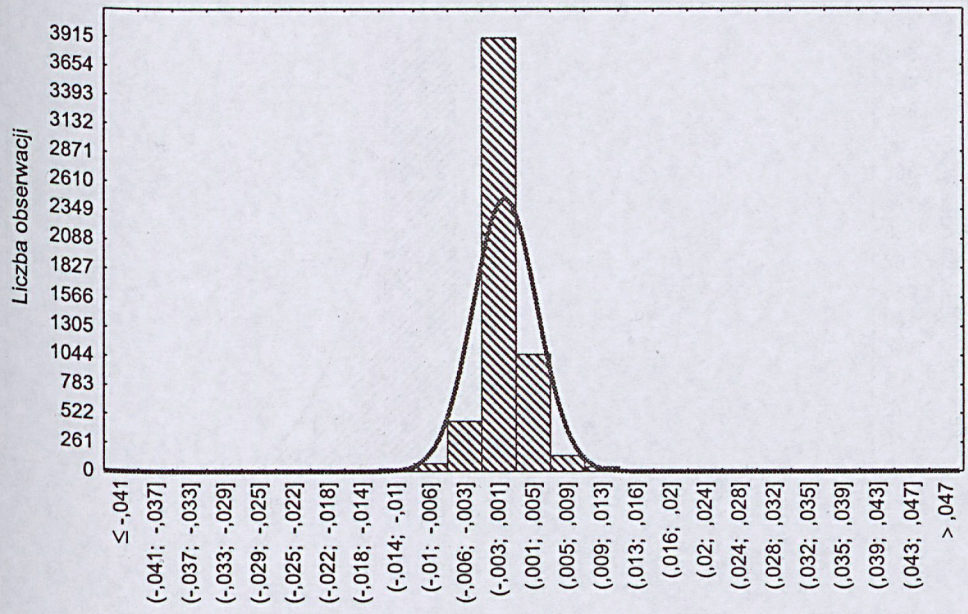
Rys. 33

WIG – 5 min



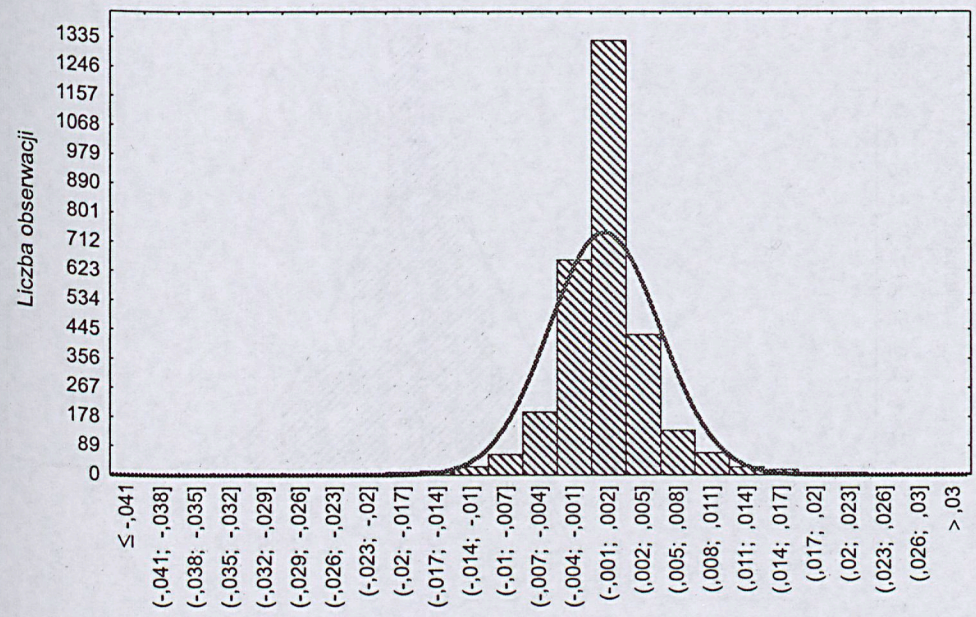
Rys. 34

WIG – 15 min



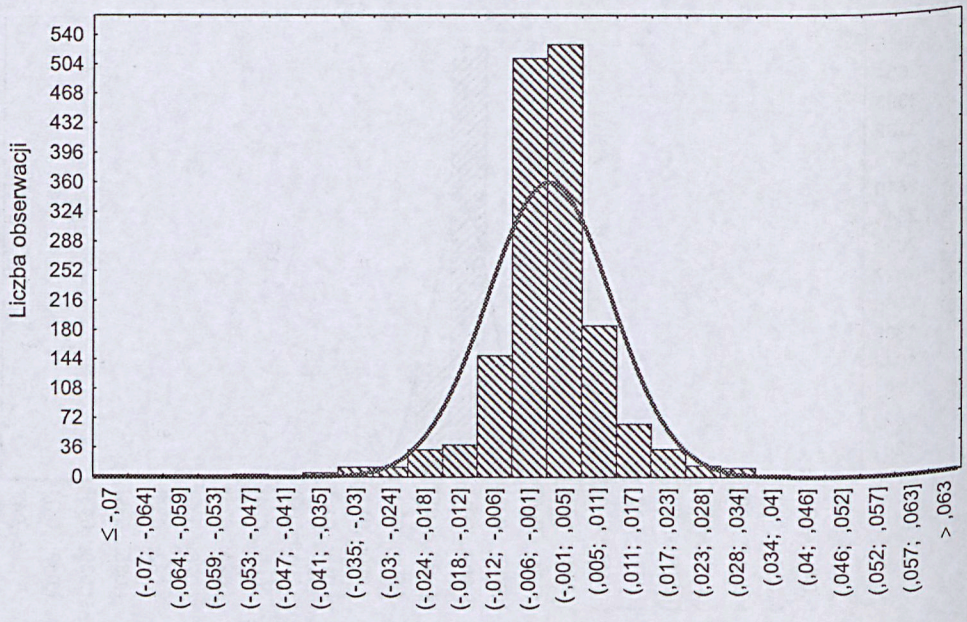
Rys. 35

WIG – 30 min



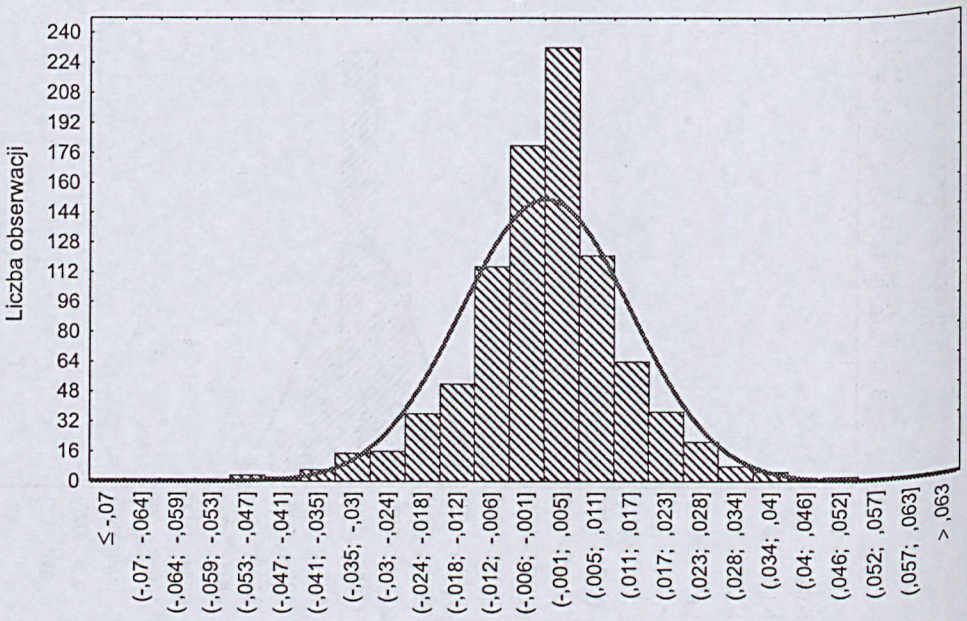
Rys. 36

WIG – 1 godz.



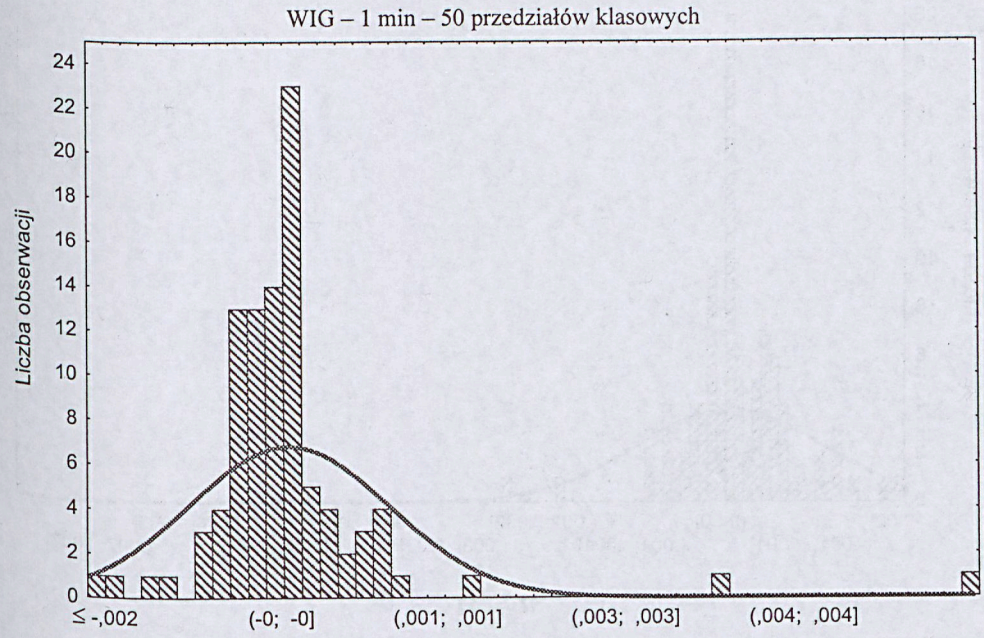
Rys. 37

WIG – 2 godz.

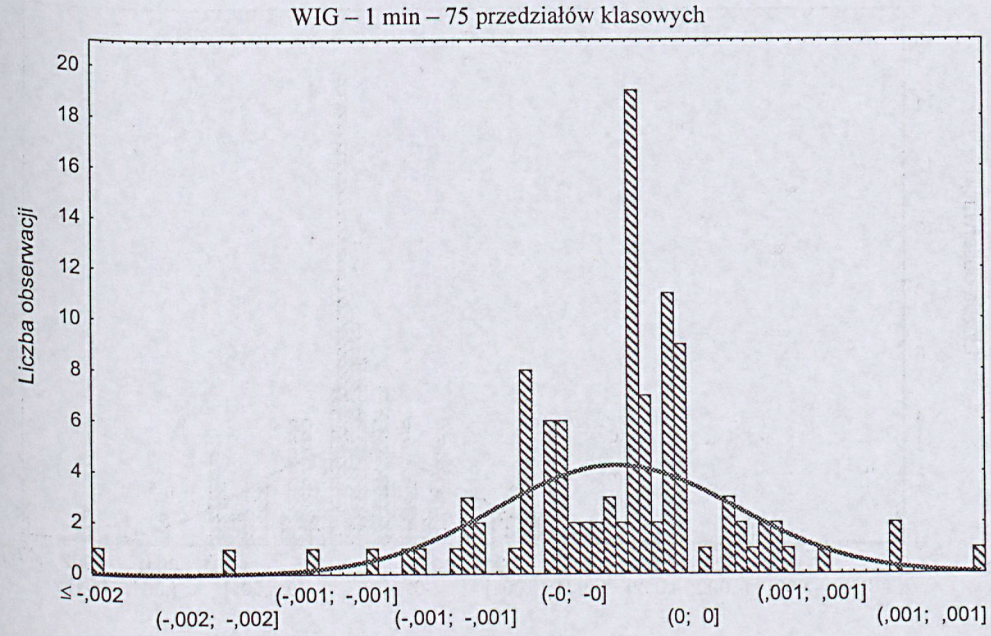


Rys. 38

Histogramy WIG w zależności od liczby przedziałów klasowych (rys. 39-46)
Źródło: Opracowanie własne

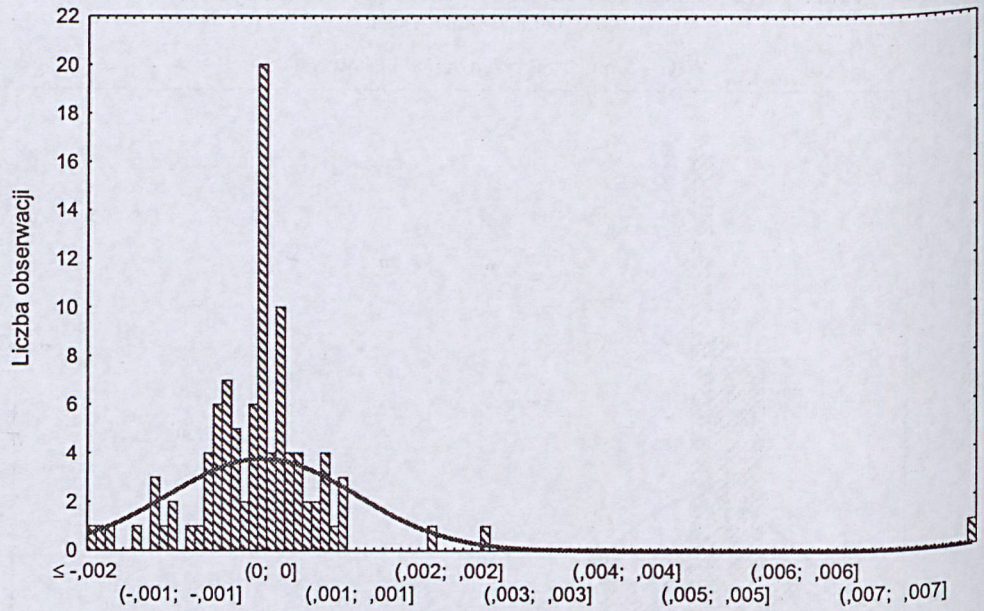


Rys. 39



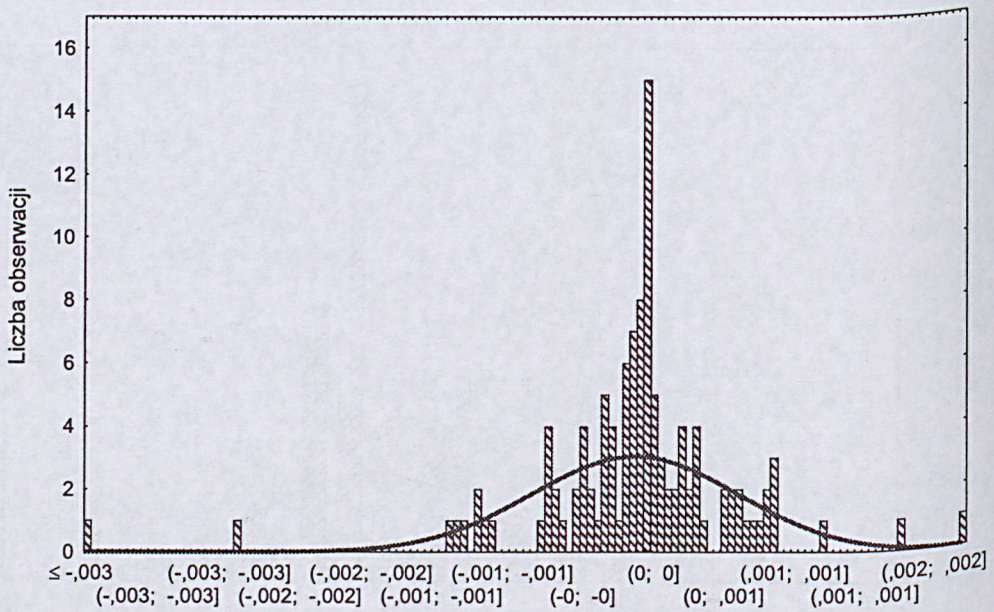
Rys. 40

WIG – 1 min – 100 przedziałów klasowych



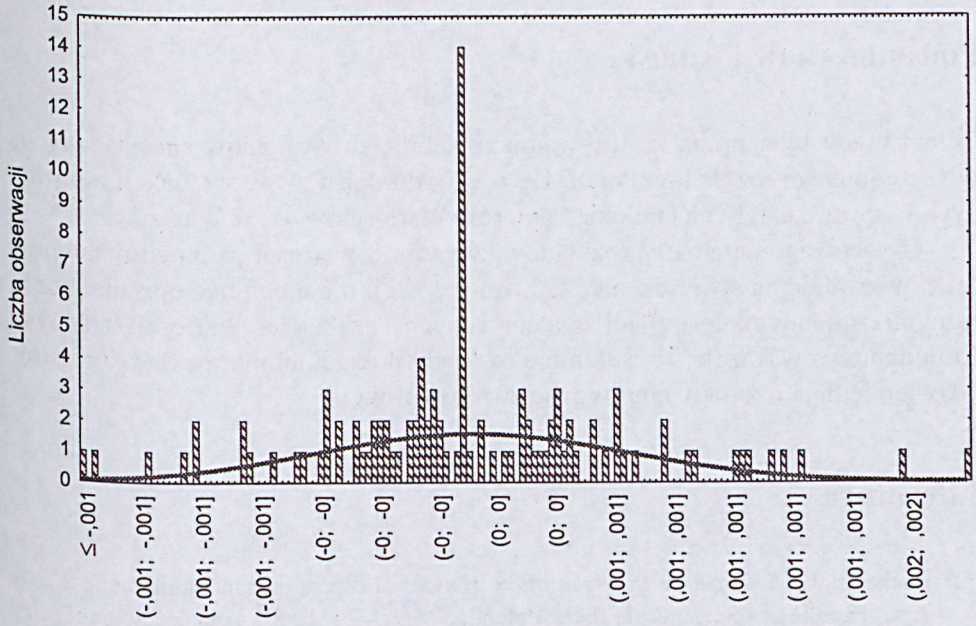
Rys. 41

WIG – 1 min – 125 przedziałów klasowych



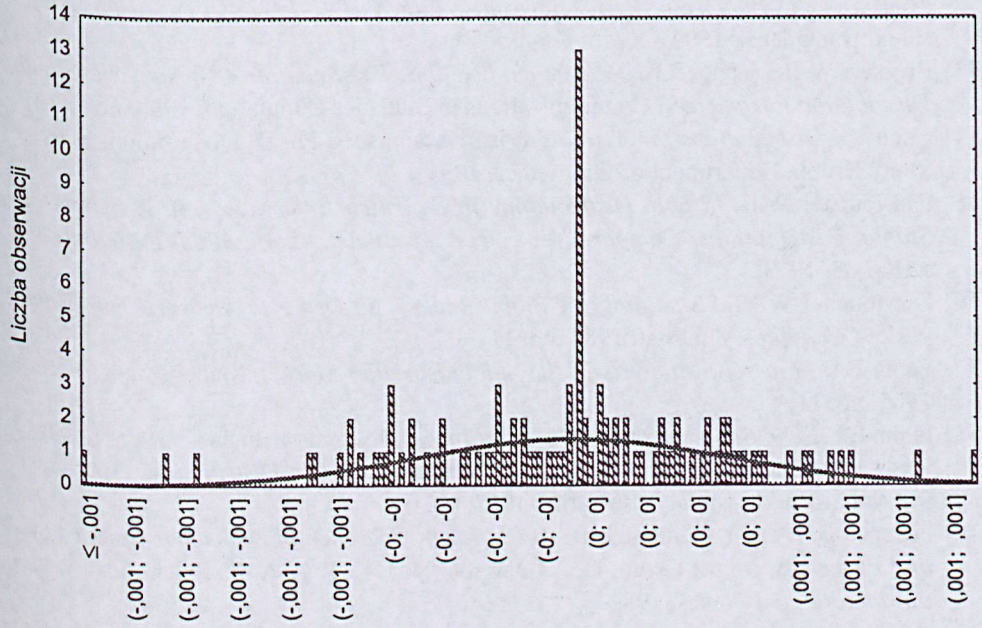
Rys. 42

WIG – 1 min – 150 przedziałów klasowych



Rys. 43

WIG – 1 min – 175 przedziałów klasowych



Rys. 44

Podsumowanie i wnioski

Celem pracy była próba zastosowania α-stabilnych rozkładów statystycznych, w szczególności rozkładów Pareto-Levy'ego, do opisu zwrotów z akcji notowanych w sposób ciągły na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

Oszacowane parametry rozkładów, zwłaszcza wartości parametru stabilności α pozwalają na stwierdzenie, że zwroty z akcji nie mogą być opisane niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładzie. Wartości statystyki Kołmogorowa wskazują, iż α-stabilne rozkłady dokładniej niż rozkład normalny odzwierciedlają rozkłady empiryczne zwrotów z akcji.

Literatura

[1] Bachelier L., *Theorie de la speculation.* (Doctoral disertation in Mathematical Science, Faculte des Sciences de Paris, defended March 29, 1900). Annales Scientifiques de l'Ecole Superieure: III-17, 21-86. Translated into English in: Cootner P.H., (ed.), *The Random Character of Stock Market Prices.*, MIT Press, Cambridge 1964

[2] Bołt T., Miłobędzki P., *Empiryczna analiza procesów zachodzących na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych w latach 1991-1993*, Gdańska Akademia Bankowa, Gdańsk 1994

[3] Brorsen W.B., Yang S.R., *Maximum Likelihood Estimation of Symmetric Stable Distribution Parameters*, Communications in Statistics-Simulation, 1990, no. 19(4)

[4] Chen Y., *Distributions for Asset Returns*. Unpublished Ph. D. Dissertation, SUNY-Stony Brook, Department of Economics, 1991

[5] DuMouchel W.H., *Stable Distributions in Statistical Inference*, vol. 1: *Symmetric Stable Distributions Compared to other Symmetric Longtailed Distributions*, JASA 68, 1973

[6] DuMouchel W.H., *Estimating the Stable Index _ in Order to Measure Tail Thickness: A Critique*, Ann. Stat. 1983, no. 11

[7] Fama E.F., *Portfolio Analysis in the Stable Paretian Market*, Management Science 1965, no. 11,

[8] Fama E.F., *The Bahavior of Stock Market Prices*, Journal of Business 1965, no. 38

[9] Fama E.F., Roll R., *Some Properties of Symmetric Stable Distributions*, Journal of the American Statistical Association 1968, no. 63

[10] Feuerverger A., McDunnough P., *On Efficient Inference in Symmetric Stable Laws and Processes*, in: M. Csrgo, D. A. Dawson, N. J. K. Rao, A. K. Saleh (eds) *Statistics and Related Topics*, 1981

[11] Hill B.M., *A Simple General Approach to Inference About the Tail of Distribution*, Ann. Statistics 1975, no. 3

[12] Hsu D., *A Bayesian Robust Detection of Shifts in the Risk Structure of Stock Markets Returns*, Journal of the American Statistical Society 1982, no. 77

[13] Kogon S.M., Williams D.B., *Characteristics Function Based Estimation of Stable Parameters*, in: R. Adler, R. Feldman, M. Taqqu (eds) *A Practical Guide to Heavy Tailed Data*, Birkhauser, Boston, MA, 1998
[14] Kon S. J., *Models of Stock Returns – a Camparison*, Journal of Finance 1984, no. 39
[15] Krysicki, W., Bartos J., Dyczka W., Królikowski K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995
[16] Levy P. *Theorie des erreurs la loi de Gauss et les exceptionelles*, Bulletin de la Societe de France 1924, nr 52
[17] Levy P., *Theorie de l'addition des variables aleatoires*, Gauthier-Villars, Paris 1937
[18] Łażewski M., *Statystyczna analiza efektywności rynku akcji w Polsce w latach 1991-1994*, w: J. Paradysz (red.) *Prace z Zakresu Statystyki i Demografii*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 1997
[19] Łażewski M., *Autoregresyjna warunkowa wariancja w szeregach czasowych zwrotów akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie*, w: W. Jurek (red.) *Prace z Ekonometrii Finansowej*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2000
[20] Łażewski M., *Test BDS zwrotów z akcji szeregów czasowych notowań ciągłych Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie*, w: W. Jurek (red.) *Prace z Ekonometrii Finansowej*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002
[21] Łażewski M., Matuszewski P., Zator K., *Nieliniowe charakterystyki szeregów czasowych cen akcji z notowań ciągłych Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie*, w: W. Jurek (red.) *Prace z Ekonometrii Finansowej*, Wydawnictwo AE w Poznaniu, Poznań 2002
[22] Mandelbrot B.B., *The Variation of Certain Speculative Prices*, The Journal of Business 1963, no. 36
[23] Mandelbrot B., *The behavior of certain speculative prices*, Journal of Business 1963, no. 36
[24] Mandelbrot B., *The Stable Paretian Income Distribution when the Apparent Exponent is Near Two*, International Economic Review 1963, no. 4
[25] McCulloch J.H., *Simple Consistent Estimators of Stable Distributions Parameters*, *Common*, Statist. Simul. 1986, no. 15
[26] McCulloch J.H., *Measuring Tail Thickness to Estimate the Stable Index Alpha: A Critique*, J. Bus. Econ. Stat. 1997, no. 15
[27] Mittnik S., Rachev S.T., Doganoglu T., Chenyao D., *Maximum Likelihood Estimation of Stable Paretian Models*, Mathematical and Computer Modeling 1999, no. 29
[28] Nolan J.P., *Numerical Computation of Stable Densities and Distributions Functions*, *Communications in Statistics*, Stochastic Models 1997, no. 13(4)
[29] Paulson A.S., Holcomb E.W., Leitch R., *The Estimation of the Parameters of the Stable Laws*, Biometrika 1975, no. 62
[30] Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, Wig-Press, Warszawa 1997
[31] Peters E.E., *Fractal Market Analysis*, John Wiley and Sons, Inc. 1994
[32] Press S.J., *Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions*, JASA 67, 1972

[33] Protter P., *Stochastic Integration and Differential Equations* (second ed.) Springer-Verlag, Berlin 1992
[34] Rachev S., Mittnik S., *Stable Paretian Models in Finance*, Wiley, Nowy Jork 2000
[35] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., *Stable Non-Gausian Random Processes*, Chapman and Hall, New York 1994
[36] Sharpe W.F., *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, New York 1970
[37] Turner A.L., Weigel, E.J., *An Analysis of Stock Market Volatility*, Russel Research Commentaries, Frank Russel Company, Tacoma 1990
[38] Welfe A., Brzeszczyński J., *Direction Quality Measures for ARCH Models: the Case of Warsaw Stock Exchange Stock Prices*, Chair of Econometric Models and Forecast, Łódź 2000
[39] Weron A., Weron R., *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa 1998
[40] Zolotarev V.M., *One-Dimensional Stable Distributions*, Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs 1986, vol. 65. American Mathematical Society, Providence, RI (tłumaczenie z oryginału rosyjskiego z 1983 r.)

ANALYSIS OF RETURN FLUCTUATIONS FROM WARSAW STOCK EXCHANGE USING PARETO-LEVY DISTRIBUTION OVER SCALE

Summary

We study in this paper Pareto-Levy distributions of fluctuations of returns from Warsaw Stock Exchange (WSE) over a time scale Δt. There are six distinct databases considered. First database contains approximately 84000 records, sampled at 1 min. intervals, second – 17000 records, sampled at 5 min. intervals and sixth (the last) – 1000 records, sampled at 2 hour. The data comes from period: 1998.03.02 to 2001.10.09. Estimated parameters of studied distributions for all times scales allow us to claim, that analysed stock returns of WSE are inconsistent with Gaussian behavior and Efficient Market Hypothesis.