Jerzy Kowalak

STEROWANIE STATYSTYCZNIE OPTYMALNE W JEDNOSEKTOROWYM JEDNOCZYNNIKOWYM MODELU WZROSTU

1. Wstęp

W artykule zostanie zwrócona uwaga na możliwości wykorzystania stosunkowo młodego aparatu matematycznego – teorii sterowania statystycznie optymalnego – do rozwiązywania określonych zadań ekonomicznych. Teoria sterowania statystycznie optymalnego rozwinięta została w pracach R.E. Kalmana i R.E. Koepcke [2], P.D. Josepha i J.T. Tou [1], W.M. Wonhama [6], oraz innych i ze względu na charakter procesów do analizy których jest dostosowana wydaje się, że może z powodzeniem być wykorzystana również do rozwiązywania wielu zagadnień dotyczących wzrostu gospodarczego.

W artykule przedstawiono podstawowe pojęcia, oraz zasadnicze twierdzenie teorii sterowania statystycznie optymalnego – tzw. twierdzenie o rozdzielności, a następnie prześledzono możliwości zastosowania tej teorii do jednego z fundamentalnych zagadnień teorii wzrostu jakim jest optymalny podział dochodu narodowego na inwestycje i konsumpcję. W tym celu przedstawiono znany z literatury jednosektorowy, jednoczynnikowy model Harroda-Domara w wersji stochastycznej, tzn. przy założeniu istnienia pewnej stochastycznej zależności dochodu narodowego od zaangażowanego w procesie wytwarzania majątku produkcyjnego. Sam model Harroda-Domara daje na tyle uproszczony obraz gospodarki, że nie może w zasadzie dawać podstaw do wyciągania praktycznych wniosków co do polityki gospodarczej, jaka powinna być prowadzona. Dlatego też – jak to już powiedziano – artykuł ma na celu w zasadzie pokazanie tylko, że pewne metody wypracowane i szeroko stosowane np. w technice, dla celów sterowania optymalnego w warunkach występowania zakłóceń losowych – mogą być również wykorzystane w sferze zagadnień ekonomicznych. Inną przyczyną przyjęcia w artykule tak prostej wersji modelu wzrostu była możliwość uzyskania rozwiązania zadania sterowania w postaci analitycznej i tym samym przeprowadzenia głębszej jego analizy.

2. Sformułowanie zadania sterowania statystycznie optymalnego

Przyjmujemy że:

a) Funkcjonowanie systemu dynamicznego w horyzoncie czasu $T = \{t: t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ opisuje równanie liniowe:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)\cdot x(t) + G(t)\cdot w(t) + D(t)\cdot u(t) \tag{1}$$

w którym x – wektor n wymiarowy (wektor stanów systemu),
u – wektor r wymiarowy (wektor sterowań),
w – wektor p wymiarowy (wektor zakłóceń systemu),
F – macierz o wymiarach n x n (macierz stanów systemu),
D – macierz o wymiarach n x r (macierz sterowania),
G – macierz o wymiarach n x p (macierz zakłóceń systemu).

Jak wynika z powyższego równania, zakładamy, że stan systemu zakłócany jest przez pewien proces losowy $\{w(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ co do którego przyjmujemy, że jest to biały szum gaussowski o zerowej wartości średniej i nieujemnie określonej macierzy kowariancji Q(t). Przyjmujemy, że $x(t_0)$ – jest n wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie normalnym, o zerowej wartości średniej i macierzy kowariancji $P(t_0)$, przy czym proces zakłóceń systemu jest niezależny od wektora $x(t_0)$.

b) Na wyjściu systemu obserwowane są wielkości $\{z(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ powiązane ze zmiennymi stanu systemu równaniem:

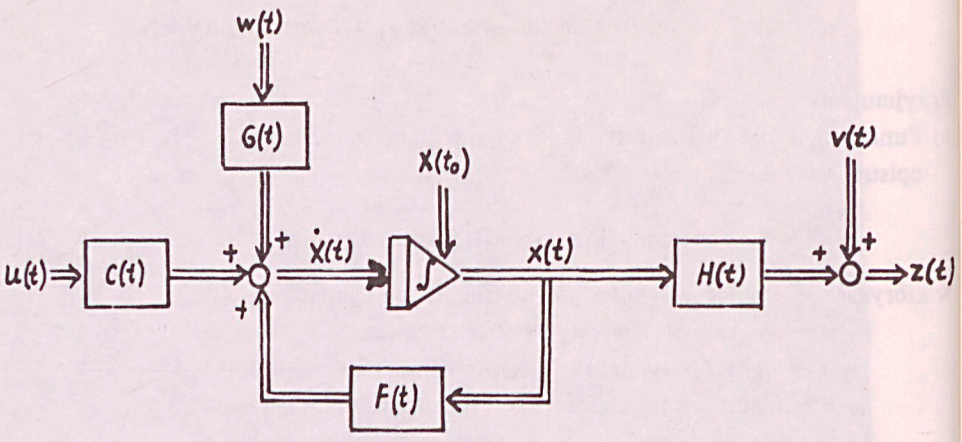
$$z(t) = H(t)\cdot x(t) + v(t) \tag{2}$$

gdzie z – wektor m wymiarowy (wektor obserwacji),
v – wektor m wymiarowy (wektor zakłóceń obserwacji),
H – macierz m x n wymiarowa (macierz wyjść).

Odnośnie wektora $\{v(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ przyjmujemy, że jest to proces losowy zakłócający możliwość dokładnej obserwacji stanów wewnętrznych systemu; ma on charakter białego szumu gaussowskiego o zerowej wartości średniej i nieujemnie określonej macierzy kowariancji R(t), oraz jest niezależny od $x(t_0)$. Można pokazać, że przy powyższych założeniach wektor stanów wewnętrznych $\{x(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ jest procesem Gaussa- Markowa; procesy x(t) oraz w(t) są niezależne dla każdego $t \in T$, natomiast procesy z(t) i w(t') są niezależne dla wszystkich $t \leqslant t'$, $t, t' \in T$.

Dopuszczamy możliwość skorelowania wzajemnego procesów w(t) oraz v(t) z macierzą korelacji wzajemnej V(t).

Schemat blokowy opisywanego systemu przedstawia rys. 1.



Rys. 1

c) Ustalony jest tzw. wskaźnik jakości sterowania, czyli funkcja aktualnego (i ewentualnie poprzednich) stanów systemu, oraz poprzednich sterowań, w postaci:

$$J = E\left\{ x'(t_1) \Lambda x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [x'(t) \cdot A(t) \cdot x(t) + u'(t) \cdot B(t) \cdot u(t)]\, dt \right\} \qquad (3)$$

gdzie Λ i $A(t)$ – są macierzami symetrycznymi o wymiarach n x n, nieujemnie określonymi, natomiast $B(t)$ jest macierzą symetryczną o wymiarach r x r, dodatnio określoną. Ze względu na niemalejącą zależność wskaźnika J od stanu systemu i sterowania w horyzoncie czasu T, można powiedzieć, że jest on funkcją odpowiednio wyważonych (za pomocą macierzy Λ, $A(t)$ i $B(t)$) „odchyleń systemu", oraz tzw. „wydatku sterowania".

Zadaniem sterowania statystycznie optymalnego nazywamy zadanie wyboru spośród wszystkich możliwych sterowań $u(t)$ (na które a priori nie nakładamy żadnych ograniczeń, poza ciągłością) takiego sterowania $u^*(t)$, które w określonym horyzoncie sterowanie T minimalizuje wskaźnik jakości J określony wzorem (3).

Jest oczywiste, że ze względu na tylko pośrednią obserwowalność stanu wewnętrznego systemu (od którego zależy wskaźnik jakości) poprzez obserwacje na wyjściu $z(t)$, wstępnym zadaniem w stosunku do zadania sterowania statystycznie optymalnego musi być zadanie oceny (ściśle – filtracja) stanu wewnętrznego w momencie sterowania.

Zasada rozdzielności sterowania statystycznie optymalnego[1]

Oznaczymy symbolem $\hat{x} = \hat{x}(t/t)$ ocenę stanu wewnętrznego przy filtracji (w sensie filtru Kalmana) w momencie t, wyznaczoną w oparciu o obserwacje $z(\tau)$ dla $\tau \leqslant t$ i sterowanie $u(\tau)$ dla $\tau < t$. Ocena taka jest całką równania:

[1] Patrz np. [5], [3], [4].

$$\dot{\hat{x}} = F(t)\cdot\hat{x} + K(t)\cdot[z(t) - H(t)\cdot\hat{x}] + D(t)\cdot u^*(t) \tag{4}$$

dla $t \in T$, przy warunku początkowym $x(t_0/t_0) = 0$;
$K(t)$ jest macierzą filtru o wymiarach n x m, określoną wzorem:

$$K(t) = [P(t/t)\cdot H'(t) + G(t)\cdot V(t)]\cdot R^{-1}(t) \tag{5}$$

dla $t \in T$, natomiast $P(t/t)$ – jest macierzą kowariancji błędu filtracji $\tilde{x}(t/t) = x(t) - \hat{x}(t/t)$, o wymiarach n x n, spełniającą równanie:

$$\dot{P} = F(t)\cdot P + P\cdot F'(t) - P\cdot H'(t)\cdot R^{-1}(t)\cdot H(t)\cdot P + G(t)\cdot Q(t)\cdot G'(t) \tag{6}$$

dla $t \in T$, przy warunku początkowym $P(t_0/t_0) = P(t_0)$, $P = P(t/t)$.
Sterowanie statystycznie optymalne $u^*(t)$ dla systemu opisanego warunkami (1)–(2) wyznaczone jest przez ocenę przy filtracji stanu wewnętrznego $\hat{x}(t/t)$ określoną zależnościami (4)–(6), oraz przez tzw. macierz sprzężenia zwrotnego $S(t)$ o wymiarach r x r określoną w oparciu o zasadę Bellmana przy założeniu, że system nie podlega zakłóceniom losowym, a stan wewnętrzny jest obserwowany na wyjściu (obserwacje jego również nie podlegają zakłóceniom); przy tym $\hat{x}(t/t)$ i $S(t)$ są wyznaczone niezależnie. Sterowanie to wyrażone jest zależnościami:

$$u^*(t) = S(t)\cdot\hat{x}(t/t) \tag{7}$$

$$S(t) = -B^{-1}(t)\cdot C'(t)\cdot W(t) \tag{8}$$

przy czym $W = W(t)$ jest macierzą symetryczną o wymiarach n x n, spełniającą równanie różniczkowe:

$$\dot{W} = F'(t)\cdot W - W\cdot F(t) + W\cdot D(t)\cdot B^{-1}(t)\cdot D'(t)\cdot - A(t) \tag{9}$$

przy warunku początkowym $W(t_1) = \Lambda$; $W = W(t)$.

2. Model wzrostu

Rozpatrywana będzie gospodarka dysponująca dostatecznymi zasobami siły roboczej, w której wzrost majątku produkcyjnego w ustalonym horyzoncie czasu $T = [t_0, t_1]$, $t_1 \leq \infty$ opisuje równanie:

$$\frac{d\,m(t)}{dt} = i(t) - \mu\cdot m(t), \tag{10}$$

wpływ majątku produkcyjnego na wytworzony dochód narodowy opisuje liniowa funkcja produkcji z nakładającym się addytywnie składnikiem losowym:

$$y(t) = a\cdot m(t) + \xi(t), \tag{11}$$

natomiast na konsumpcję przeznaczona zostaje część dochodu narodowego nie wykorzystana na inwestycje:

$$c(t) = y(t) - i(t) \tag{12}$$

gdzie: m(t) – oznacza wielkość majątku produkcyjnego w momencie czasu t (zasób, wymiar: zł), i(t), y(t), c(t) – wielkość inwestycji (brutto), dochodu narodowego i konsumpcji w momencie t (strumienie, wymiar: zł/R, R – ustalona jednostka czasu); a, oraz μ – parametry dodatnie (a – wskaźnik efektywności majątku produkcyjnego, wymiar: 1/R, μ – wskaźnik wycofywanej z eksploatacji części majątku produkcyjnego, wymiar: 1/R; $\{\xi(t), t \in T\}$ – proces losowy ciągły (zakłócenie), co do którego przyjmujemy, że ma on charakter białego szumu gaussowskiego, $E\{\xi(t)\} = 0$, $E\{\xi^2(t)\} = \sigma^2$.

Przyjmujemy, że w horyzoncie czasu T konsumpcja powinna wzrastać ze stałą dodatnią stopą ν (wymiar: 1/R). Zatem wzrost konsumpcji w czasie powinien przebiegać zgodnie z zależnością:

$$c^d(t) = c_o \cdot e^{\nu(t-t_o)} \tag{13}$$

gdzie: c_o – jest wielkością konsumpcji w momencie początkowym t_o.
Przyjmujemy również, że wzrost majątku produkcyjnego powinien przebiegać w taki sposób, aby w końcowym momencie t_1 horyzontu czasu T osiągnął wielkość $m^d(t_1)$.

Funkcje (ściśle: wykresy realizacji funkcji) $m_T = \{(t, m(t)); t \in T\}$, $y_T = \{(t, y(t)); t \in T\}$, oraz $c_T = \{(t, c(t)); t \in T\}$ nazywamy rzeczywistymi trajektoriami majątku produkcyjnego, dochodu narodowego itd., natomiast funkcję $c^d(t)$ – pożądaną (złożoną) trajektorią konsumpcji. O ile bowiem wzrost majątku produkcyjnego, inwestycji itd. opisany zależnościami (10) – (12) ma – ze względu na wytępujący proces zakłóceń $\{\xi(t), t \in t\}$ – charakter losowy w czasie, to zależność (13) opisuje jednoznacznie pożądaną wielkość konsumpcji jaką chcemy uzyskać w każdym momencie czasu $t \in T$.

3. Zagadnienie sterowania statystycznie optymalnego wzrostem

Wykorzystując zależności (12) i (11) równanie (10) opisujące wzrost majątku produkcyjnego w czasie (w horyzoncie T) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{d\,m(t)}{dt} = (a - \mu)\cdot m(t) + \xi(t) - c(t) \tag{14}$$

a wykorzystując jeszcze równanie (11):

$$y(t) = a\cdot m(t) + \xi(t) \tag{11}$$

otrzymujemy model liniowego systemu dynamicznego, w którym w horyzoncie czasu T na wyjściu obserwowany jest dochód narodowy y(t), stanem wewnętrznym (jedynym) jest majątek produkcyjny m(t), natomiast na wejściu – jako sterowanie – występuje konsumpcja c(t). Przy tym zarówno sam system, jak i obserwacje na wyjściu zakłócane są tym samym procesem – białym szumem gaussowskim $\{\xi(t), t \in T\}$ o zerowej wartości średniej i wariancji σ^2.

Zgodnie z tym co powiedziano wyżej, majątek produkcyjny $\{m(t), t \in T\}$ – jako stan wewnętrzny systemu – jest procesem Gaussa-Markowa. Przyjmujemy zatem, że określona jest wartość oczekiwana i wariancja majątku produkcyjnego w momencie początkowym t_o, tzn:

$$E\{m(t_o)\} = m_o, \quad m_o > 0 \tag{15}$$

$$E\{(m(t_o) - m_o)^2\} = \sigma_m^2$$

Jako kryterium sterowania pzyjmujemy wskaźnik jakości postaci:

$$J = E\left\{ (m(t_1) - m^d(t_1))^2 + \int_{t_o}^{t_1} (c(t) - c^d(t))^2 \, dt \right\},$$

tzn.

$$J = E\left\{ (m(t_1) - m^d(t_1))^2 + \int_{t_o}^{t_1} (c(t) - c_o \cdot e^{v(t-t_o)})^2 \, dt \right\} \tag{16}$$

Trajektorię konsumpcji $\{c^*(t); t \in T\}$ minimalizującą wskaźnik jakości (16) przy warunkach (14), (11) i (15), oraz odpowiadającą jej trajektorię majątku produkcyjnego $\{m^*(t); t \in T\}$ nazywamy statystycznie optymalnym procesem wzrostu w horyzoncie czasu T. Z postaci analitycznej przyjętego wskaźnika wzrostu (16) wynika, że sterowanie optymalne (czyli konsumpcja) w każdym momencie $t \in T$ powinno być tak dobierane, aby – w zależności od obserwowanego wzrostu dochodu narodowego – zminimalizowane zostało przeciętne łączne odchylenie konsumpcji rzeczywistej od konsumpcji pożądanej (w całym horyzoncie czasu T), oraz odchylenie rzeczywistego zaangażowania majątku produkcyjnego w końcowym momencie horyzontu T – od zaangażowania założonego na ten moment (w sensie odchyleń z kwadratem).

Ze względu na przyjęte założenie (15) dotyczące wartości oczekiwanej majątku produkcyjnego w początkowym momencie t_o jako wielkości dodatniej (trudno bowiem przyjąć, że oczekiwana wartość majątku w jakiejkolwiek gospodarce w jakimś momencie jest równa zero), jak również ze względu na postać przyjętego wskaźnika optymalności (16), powyższy model nie spełnia warunków przyjmowanych dla liniowych modeli dynamicznych (opisanych powyżej). Trudność tę jednak stosunkowo łatwo można przezwyciężyć rozszerzając sytem opisany zależnościami (14), (11), (15) i (16) o jeden stan wewnętrzny – „swobodny" z punktu widzenia sterowania. Wprowadzimy w tym celu dodatkowe oznaczenia:

$x_1(t) = m(t) - m^d(t_1)$, $x_2(t) = 1$, $z(t) = y(t) - y^d(t_1)$, $y^d(t_1) = a \cdot m^d(t_1)$,

$u_1(t) = c(t) - c^d(t)$, $j^d(t) = (a - \mu) \cdot m\ (t_1) - c^d(t)$.

Zależności (16), (14), (11), (15) możemy teraz zapisać w postaci:

$$\frac{d\,x_1(t)}{dt} = (a - \mu) \cdot x_1(t) + j^d(t) \cdot x_2(t) + \xi(t) - u_1(t)$$

$$\frac{d\,x_2(t)}{dt} = 0 \qquad (17)$$

$$z(t) = a \cdot x_1(t) + \xi(t)$$

oraz:

$$J = E\left\{x_1^2 + \int_{t_o}^{t_1} u_1^2(t) \cdot dt\right\}$$

lub w postaci wektorowo-macierzowej:

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = F(t) \cdot x(t) + G(t) \cdot \xi(t) + D(t) \cdot u_1(t) \qquad (18)$$

$$z(t) = H(t) \cdot x(t) + \xi(t)$$

oraz:

$$J = E\left\{x'(t_1)\,\Lambda\,x(t_1) + \int_{t_o}^{t_1} u_1^2(t) \cdot dt\right\} \qquad (19)$$

gdzie:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} a - \mu, & j^d(t) \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \\ 0, & 0 \end{bmatrix}, \quad H(t) = [a,\ 0]$$

Model (18) – (19) spełnia obecnie już wszystkie warunki liniowego modelu dynamicznego, jaki opisany został powyżej w p. 1. Opisuje on teraz system, w którym występują dwa stany wewnętrzne $x_1(t)$ i $x_2(t)$, przy czym sterowaniu podlega tylko pierwszy z nich. Na wyjściu systemu obserwowany jest (pośrednio) tylko pierwszy stan, natomiast na wejściu występuje tylko jedno sterowanie odnoszące się – jak powiedziano – do pierwszego stanu wewnętrznego[2].

[2] Ściśle można powiedzieć, że drugi stan wewnętrzny jest dokładnie obserwowany na wyjściu (bez zakłóceń), a jego zachowanie się nie podlega sterowaniu.

Trzeba tutaj zaznaczyć, że stanem wewnętrznym systemu jest teraz już nie zaangażowany majątek produkcyjny, ale jego odchylenie w chwili $t \in T$ od założonego poziomu majątku na moment końcowy t_1; podobnie sterowaniem jest nie sama konsumpcja w chwili $t \in T$, ale jej odchylenie od konsumpcji pożądanej (w tym samym momencie). Można też powiedzieć, że na wyjściu systemu obserwowane jest teraz odchylenie aktualnego w chwili $t \in T$ dochodu narodowego od pożądanego na moment końcowy dochodu $y^d(t_1)$ (przeciętnego).

Jak powiedziano już wyżej – wstępnym zadaniem w stosunku do wyznaczenia sterowania statystycznego optymalnego w momencie $t \in T$ musi być filtracja stanu wewnętrznego w tym samym momencie. Oczywiście w przypadku systemu opisanego zależnościami (18) i (19) ocenę musimy wyznaczyć tylko dla pierwszego stanu $x_1(t)$. Oznaczymy $\hat{x}_1(t/t)$ – ocenę przy filtracji w momencie t – w oparciu o obserwacje $z(\tau)$ dla $\tau \leqslant t$, oraz $u(\tau)$ dla $\tau < t$ (zakładamy, że tymi danymi dysponujemy). Ponieważ zarówno system, jak i obserwacje zakłócane są przez ten sam proces losowy $\{\xi(t), t \in T\}$, wobec tego macierze kowariancji procesów zakłócających, oraz macierz ich korelacji wzajemnej są identyczne ($Q(t) = R(t) = V(t)$). Wobec tego równania (6) określające wariancję błędu filtracji $P(t/t)$ przybiera postać:

$$\dot{P} + 2\mu P = -\frac{a^2}{\sigma^2} \cdot p^2 \tag{20}$$

przy warunku początkowym $P(t_0/t_0) = P(t_0) = \sigma_m^2$; $P = P(t/t)$.
Jest to równanie Bernoulliego rzędu 2, którego całka – przy wskazanym warunku początkowym – ma postać:

$$P(t/t) = \frac{2\mu\sigma^2\sigma_m^2}{(2\mu\sigma^2 + a^2 \cdot \sigma_m^2) \cdot e^{2\mu(t-t_0)} - a^2 \cdot \sigma_m^2} \tag{21}$$

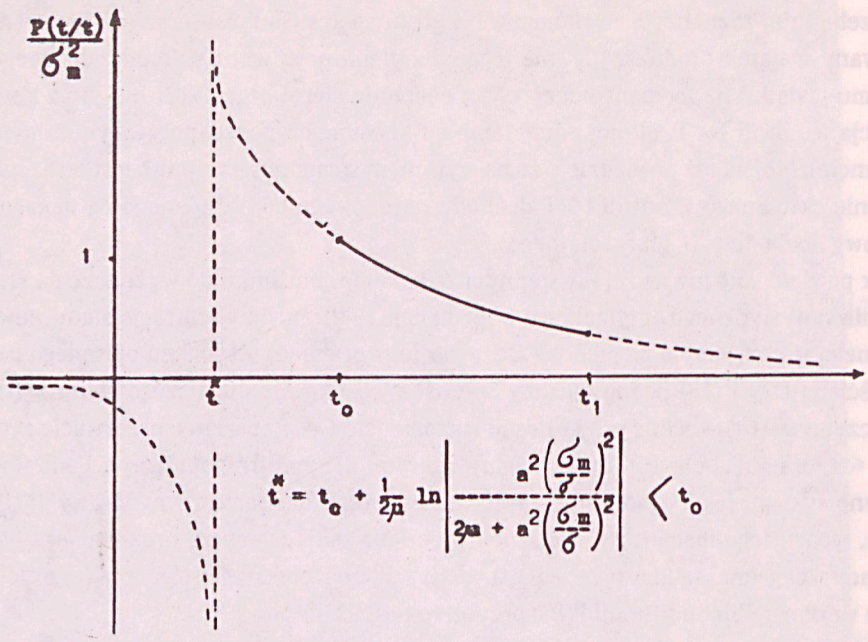
a w postaci znormalizowanej:

$$\frac{P(t/t)}{\sigma_m^2} = \frac{2\mu}{\left[2\mu + a^2\left(\frac{\sigma_m}{\sigma}\right)^2\right] \cdot e^{2\mu(t-t_0)} - a^2\left(\frac{\sigma_m}{\sigma}\right)^2} \tag{22}$$

Dla momentu początkowego $t = t_0$ mamy oczywiście $\frac{P(t/t)}{\sigma_m^2} = 1$, a wykres tej funkcji przedstawia rys. 2.

Jak widać błąd filtracji (wariancja $P(t/t)$) maleje do zera wraz z upływem czasu, tzn. wraz z dopływem następnych informacji $z(t)$. W dostatecznie długim horyzoncie czasu T ocena stanu wewnętrznego układu powinna być praktycznie dokładna[3].

[3] Jest to zrozumiałe, gdyż w długim horyzoncie czasu powinno się uzyskiwać coraz bardziej dokładną ocenę na skutek stałego korygowania poprzedniej oceny w oparciu o nowe obserwacje.



Rys. 2

Macierz Kalmana określona zależnością (5) będzie w naszym przypadku równa (ściśle jest to element tej macierzy interesujący z punktu widzenia oceny stanu pierwszego):

$$K(t) = \frac{2\mu a \sigma_m^2}{(2\mu\sigma^2 + a^2 \cdot \sigma_m) \cdot e^{2\mu(t-t_0)} - a^2 \cdot \sigma_m^2} + 1 \qquad (23)$$

Przy dostatecznie długim horyzoncie czasu T mamy K(t) = 1, co oznacza, że filtracja będzie mogła być przeprowadzana ze stałym tzw. „wzmocnieniem", równym 1.

Równanie różniczkowe (4) określające ocenę przy filtracji dla pierwszego stanu wewnętrznego systemu (18) – (19) będzie miało postać:

$$\dot{\hat{x}}_1 = [a\cdot(1 - K(t)) - \mu]\,\hat{x}_1 + j^d(t) + K(t)\cdot z(t) - u_1^*(t)$$

przy warunku początkowym $\hat{x}_1(t_o/t_o) = m_o$; $\hat{x} = \hat{x}(t/t)$.

Zakładając jeszcze, że sterowanie statystycznie optymalne $u_1^*(t)$ (dla którego macierz sprzężenia zwrotnego S(t) zupełnie niezależnie wyznaczymy dalej) ma postać $u_1^*(t) = S(t)\cdot\hat{x}_1(t/t)$ – równanie to możemy zapisać w postaci:

$$\dot{\hat{x}}_1 = [a(1 - K(t)) - \mu - S(t)]\cdot\hat{x}_1 + j^d(t) + K(t)\cdot z(t) \qquad (24)$$

przy tym samym warunku początkowym.

Oczywiście w dostatecznie długim horyzoncie czasu T równanie to przyjmie postać:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -(\mu + S(t))\cdot\hat{x}_1 + j^d(t) + z(t) \tag{25}$$

Dysponując oceną przy filtracji pierwszego stanu rozpatrywanego systemu, wyznaczamy sterowanie statystycznie optymalne dla tego stanu, określając w oparciu o równanie (8) macierz sprzężenia zwrotnego S(t). Oczywiście wstępnie musimy rozwiązać równanie różniczkowe postaci (9) określające macierz W(t) – od której macierz S(t) jest zależna. Dla rozpatrywanego przez nas systemu równanie to przybiera postać:[3]

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_1, & \dot{W}_2 \\ \dot{W}_2, & \dot{W}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(a-\mu)W_1+W_2^2 & W_1W_2-j^d(t)\cdot W_1-(a-\mu)\cdot W_2 \\ W_1W_2-j^d(t)\cdot W_1-(a-\mu)\cdot W_2, & -2j^d(t)\cdot W_2+W_2^2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

z warunkiem początkowym $W(t_1) = \Lambda = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}$; $W_k = W_k(t)$.

Ze względu na fakt, że sterowanie dotyczy tylko pierwszego stanu, konieczna jest dla nas znajomość tylko elementów $W_1(t)$ i $W_2(t)$ macierzy W(t). Porównując odpowiednie elementy powyższego równania macierzowego, otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= -2(a-\mu)\cdot W_1 + W_1^2 \\ \frac{dW_2}{dt} &= W_1W_2 - j^d(t)\cdot W_1 - (a-\mu)\cdot W_2 \end{aligned} \tag{27}$$

Rozwiązanie pierwszego z tych równań przy warunku początkowym $W_1(t_1) = 1$ wyznacza funkcję $W_1(t)$ o postaci:

$$W_1(t) = \frac{2(a-\mu)}{1 + [2(a-\mu) - 1]\cdot e^{2(a-\mu)(t-t_1)}} \tag{28}$$

a jej podstawienie do drugiego równania i jego rozwiązanie – przy warunku początkowym $W_2(t_1) = 0$ – daje postać funkcji $W_2(t)$:

$$W_2(t) = \frac{j^d(t_1)\cdot W_1(t)\cdot e^{\nu(t-t_1)}\cdot(1 - e^{(a-\mu-\nu)(t-t_1)})}{a-\mu-\nu} \tag{29}$$

[3] Macierz W(t) – co powiedziano już wyżej – jest macierzą symetryczną.

Macierz sprzężenia zwrotnego – zgodnie z zależnością (8) – będzie więc miała postać:

$$S(t) = [W_1, \quad W_2] \tag{30}$$

natomiast sterowanie statystycznie optymalne pierwszym stanem wewnętrznym $x_1(t)$ będzie określone następująco:

$$u^*(t) = W_1(t) \cdot \hat{x}_1(t/t) + W_2(t) \tag{31}$$

dla każdego $t \in T$, przy $x_2(t) = 1$.

Wracając do oznaczeń jakie przyjęte zostały powyżej, sterowanie (31) można zapisać w postaci:

$$c^*(t) = c^d(t) + W_1(t) \cdot [\hat{m}(t/t) - m^d(t_1)] + W_2(t) \tag{32}$$

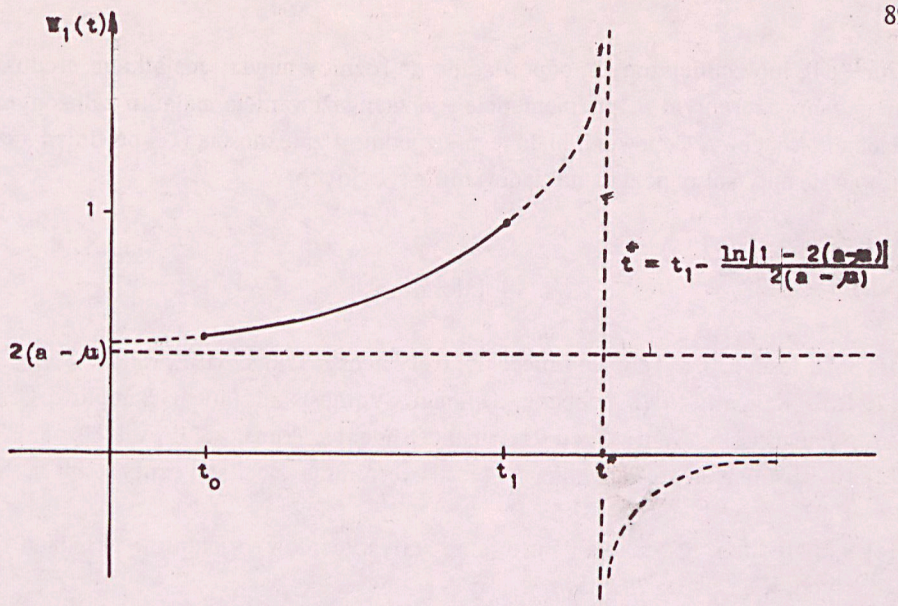
Dla osiągnięcia w założonym horyzoncie czasu $T = \{t: t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$, $t_1 \leqslant \infty$, minimalnej wartości przyjętego wskaźnika jakości (określonego zależnością (19), należy więc utrzymywać w każdym momencie czasu $t \in T$ konsumpcję na poziomie konsumpcji pożądanej $c^d(t)$ – „skorygowanym" proporcjonalnie do obserwowanej (ocenionej) w tym momencie rozpiętości między wielkością majątku produkcyjnego zaangażowanego w tym momencie, a założonym zaangażowaniem majątku na moment końcowy t_1.[4]

4. Wnioski. Interpretacja uzyskanych wyników

Ze względu na fakt, że w realnej gospodarce efektywność majątku produkcyjnego jest dużo większe od wskaźnika wycofywania majątku z eksploatacji (tzn. $a > \mu$, przy czym $a - \mu < 0{,}5$), wobec tego $W_1(t)$ jest w określonym horyzoncie czasu $T = \{t: t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ rosnącą funkcją czasu (przedstawia jej wykres rys. 3). Oznacza to oczywiście, że rozpiętość między aktualnymi nakładami majątku produkcyjnego w momencie t, a nakładami majątku przewidzianego na moment końcowy t_1 ma – wraz z upływem czasu – coraz silniejszy wpływ na statystycznie optymalny poziom konsumpcji. W długim horyzoncie sterowania wpływ ten się ustala, gdyż przy $t_1 \to \infty$ otrzymujemy $W_1(t) \to 2(a - \mu)$.

W przypadku funkcji $W_2(t)$ – jej wpływu na sterowanie statystycznie optymalne – to trudniej jest tutaj o interpretację. Trudność ta jest tego samego rodzaju, z jaką mamy do czynienia w przypadku interpretacji tzw. parametrów „wolnych" ekonometrycznych równań opisowych. Funkcja $W_2(t)$ reprezentuje bowiem wpływ zachowa-

[4] Funkcje $W_1(t)$ i $W_2(t)$ odzwierciedlają w każdym momencie czasu $t \in T$ wpływ odpowiednio pierwszego i drugiego stanu wewnętrznego na sterowanie pierwszym stanem.



Rys. 3

nia się drugiego stanu wewnętrznego (co do którego zakładamy zresztą że jest on stały w czasie) na sterowanie stanem pierwszym. Drugi stan wewnętrzny $x_2(t)$ – w zasadzie nas nie interesujący – pojawia się w modelu (18) – (19) tylko ze względu na postać przyjętego wskaźnika jakości sterowania, a ściśle – ze względu na założenie pewnej pożądanej, rosnącej trajektorii konsumpcji $c^d(t)$, oraz ze względu na ustalony a priori docelowy poziom zaangażowania trwałego majątku produkcyjnego $m^d(t_1)$. Można więc powiedzieć, że funkcja $W_2(t)$ reprezentuje wpływ tych założeń na sterowanie w każdym momencie czasu $t \in T$. Ponieważ można przyjąć, że w realnej gospodarce efektywność majątku produkcyjnego jest większa od sumy wskaźnika wycofywania majątku produkcyjnego, oraz stopy wzrostu konsumpcji ($a > \mu + \nu$), wobec tego $W_2(t)$ jest funkcją rosnącą w czasie i w końcowym momencie horyzontu T przyjmuje wartość:

$$W_2(t_1) = \frac{j^d(t_1)}{a-\mu-\nu}$$

Tak więc wpływ wskazanych powyżej założeń na sterowanie statystycznie optymalne również wzrasta (przy ustalonym momencie końcowym sterowania). W długim natomiast horyzoncie czasu wpływ tych założeń na sterowanie zanika, gdyż dla $t_1 \to \infty$ mamy $W_2(t_1) \to 0$.

Generalnie więc w odpowiednio długim horyzoncie czasu optymalna w każdym momencie konsumpcja powinna się kształtować na poziomie założonym na ten moment $c^d(t)$ – proporcjonalnie powiększonym (ze współczynnikiem proporcjonalności

$2(a - \mu)$), lub zmniejszonym, odpowiednio do różnicy między majątkiem produkcyjnym zaangażowanym w tym momencie – a zaangażowaniem majątku założonym na moment końcowy. Odpowiednio do tego – zgodnie z zależnością (12) powinien kształtować się optymalny poziom nakładów inwestycyjnych.

Literatura

[1] P.D. Joseph, J.T. Tou, On Linear Control Theory, Trans. AIEE, vol. 80, 61.
[2] R.E. Kalman, R.W. Koepcke, Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Reformance Indexes, Trans. ASME, vol. 80, 68.
[3] H. Kushner, Wprowadzenie do teorii sterowania stochastycznego, PWN, W-wa 1983.
[4] J.S. Meditch, Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych, WNT, W-wa 1975.
[5] F.C. Schweppe, Układy dynamiczne w warunkach losowych, WNT, W-wa 1978.
[6] W.M. Wonham, On the Separation Theorem of Stochastic Control, PM-38, NASA Electronics Research Center, Cambridge, Massachusetts, 1968.

Część II. STATYSTYKA