Michał KONOPCZYŃSKI
Katedra Ekonomii Matematycznej
Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

ZNACZENIE KAPITAŁU LUDZKIEGO W UNII MONETARNEJ W ŚWIETLE NEOKLASYCZNEGO MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO

Wstęp

Dobrobyt ekonomiczny społeczeństw jest w istotnym stopniu uzależniony od zasobu tzw. kapitału ludzkiego. Mianem tym określa się wykształcenie, doświadczenie i umiejętności pracowników zatrudnionych w danym kraju[1]. W artykule analizujemy rolę kapitału ludzkiego w małym kraju należącym do (dużej) unii gospodarczej i walutowej (UGW). Wykorzystujemy w tym celu prosty, matematyczny model wzrostu małego (w sensie gospodarczym) kraju należącego do UGW. Jest on oparty na założeniach typowych dla Europejskiej Unii Monetarnej (EMU), ale przy tym na tyle ogólny, że po ewentualnych niewielkich modyfikacjach nadaje się do opisu każdego małego kraju w ramach dowolnej UGW – w tym również Polski po jej ewentualnym przystąpieniu do EMU.

Punktem wyjścia jest neoklasyczny model gospodarki zamkniętej Mankiw, Romera i Weila [9], który przypomniany jest krótko w punkcie 1. Wzorując się na nim zbudowano analogiczny model dotyczący małej gospodarki w UGW. Oprócz doskonałej mobilności kapitału, zakładana jest m.in. wspólna waluta

[1] Zob. [3]. W niektórych pracach empirycznych zwraca się uwagę na to, że o wielkości kapitału ludzkiego decyduje również poziom zdrowia, długość i jakość życia itp. Dlatego do pomiaru wielkości kapitału ludzkiego stosuje się dwie grupy wskaźników: edukacyjne i zdrowotne. Zob. [10] i [11].

i wynikające z tego wyrównywanie się nominalnych i realnych stóp procentowych na obszarze unii. Pozostałe założenia mają standardowy, neoklasyczny charakter. Wykazano, że w tak opisanej gospodarce istnieje stan stacjonarny (SS), charakteryzujący się tzw. naturalną stopą wzrostu. Stan ten jest asymptotycznie stabilny. Szukając maksymalnej konsumpcji *per capita* w SS, wyprowadzono tzw. złotą regułę, czyli optymalne wartości stóp inwestycji w kapitał rzeczowy i w kapitał ludzki. Wykazano, że istnieje nieskończenie wiele optymalnych kombinacji tych stóp, ale są one związane prostym równaniem. Udowodniono, że złota reguła rekomenduje dwie skrajnie odmienne strategie inwestowania w kapitał ludzki i rzeczowy, w zależności od relacji między naturalną stopą wzrostu gospodarczego a realną stopą procentową. Jest to uogólnienie złotej reguły oszczędzania, sformułowanej w modelu nieuwzględniającym kapitału ludzkiego[2].

Na koniec w symulacjach badano dynamiczne skutki zwiększenia stopy inwestycji w kapitał ludzki, dochodząc do wniosku, że dla małej gospodarki w UGW najlepszą metodą pobudzania wzrostu gospodarczego jest inwestowanie w kapitał ludzki. Dość powiedzieć, że w analizowanym realistycznym przykładzie zwiększenie (trwałe) stopy inwestycji w kapitał ludzki z 5% do 7% owocuje *ceteris paribus* wzrostem stacjonarnej wielkości konsumpcji aż o 36,2%, i to niezależnie od wartości (długookresowej) realnej stopy procentowej. Dla porównania, takie samo zwiększenie stopy inwestycji w kapitał rzeczowy (z 22% do 24%, czyli również o 2 punkty procentowe) podnosi *ceteris paribus* wielkość konsumpcji w SS o zaledwie 7,3%.

1. Model wzrostu gospodarki zamkniętej z kapitałem ludzkim[3]

Przyjęto, że technologię wytwarzania produktu w gospodarce opisuje trójczynnikowa funkcja produkcji typu Cobba-Douglasa, charakteryzująca się zerowymi korzyściami skali:

$$Y=K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}, \qquad \alpha+\beta<1, \qquad A,\alpha,\beta>0. \tag{1}$$

gdzie:

K – zasób kapitału rzeczowego,
H – zasób kapitału ludzkiego,
L – zasób pracy,
A – wskaźnik postępu technicznego.

[2] Model taki przedstawiony jest w artykule [6].
[3] Przedstawiony w tym punkcie model jest oparty na pracy [9].

Zakładamy, że A i L rosną egzogenicznie ze stałymi stopami wzrostu (odpowiednio) σ oraz n. Kapitał rzeczowy jest powiększany dzięki inwestycjom:

$$\dot{K}=I_K-\delta K, \tag{2}$$

gdzie δ oznacza stopę deprecjacji kapitału. Podobnie jest opisana akumulacja kapitału ludzkiego:

$$\dot{H}=I_H-\delta H. \tag{3}$$

Inwestycje w kapitał ludzki I_H obejmują szeroko rozumiane wydatki na edukację. Deprecjacja kapitału ludzkiego wynika przede wszystkim z ciągłej przemiany pokoleń[4].

W gospodarce zamkniętej wytworzony produkt Y jest albo konsumowany, albo inwestowany: $Y=C+I$. Naturalnie spełnione jest równanie bilansowe $I=I_K+I_H$. Realny dochód do dyspozycji obywateli kraju jest równy wytworzonej produkcji: $Y_d=Y$. Część dochodu jest konsumowana, a reszta oszczędzana: $Y=C+S$. Oznaczając przez γ przeciętną stopę oszczędności, otrzymujemy:

$$S=\gamma Y, \quad C=(1-\gamma)Y, \quad \text{gdzie} \quad \gamma\in[0,1). \tag{4}$$

Jak wynika z powyższych rozważań, w gospodarce zamkniętej (bez rządu) $I=S$, czyli $I_K+I_H=\gamma Y$. Zakładając, że struktura inwestycji jest stała w czasie, otrzymujemy:

$$I_K=\gamma_K Y, \quad I_H=\gamma_H Y, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_K+\gamma_H=\gamma \text{ i } \gamma_K,\gamma_H\geqslant 0. \tag{5}$$

Teraz zajmijmy się rynkami czynników produkcji. Funkcja produkcji i – w konsekwencji – funkcja zysku reprezentatywnej firmy jest dodatnio jednorodna stopnia 1. Dzięki temu całą gospodarkę można traktować jak jedną (zagregowaną) firmę, działającą w warunkach konkurencji doskonałej. Oznacza to, że owa reprezentatywna firma nie ma wpływu ani na ceny zatrudnianych czynników produkcji, ani na cenę produktu P. Popyt na czynniki produkcji wynika z maksymalizacji zysku przez firmę-gospodarkę, który jest różnicą

[4] Dla prostoty zakładamy, że kapitał ludzki ulega deprecjacji w takim samym tempie jak kapitał rzeczowy (δ). Wprowadzenie osobnych, różnych stóp deprecjacji nie wpływa zasadniczo na wnioski płynące z modelu, a tylko niepotrzebnie komplikuje analizę.

między wartością produkcji (utożsamianą z przychodem) a całkowitym kosztem produkcji:

$$J = PY - W_K K^D - W_H H^D - WL^D, \tag{6}$$

gdzie:

K^D, H^D, L^D – popyt na poszczególne czynniki produkcji w gospodarce,
W_K – cena wynajmu jednostki kapitału rzeczowego,
W_H – cena wynajmu (stawka płacy) jednostki kapitału ludzkiego,
W – przeciętna stawka płacy.

Analiza zadania maksymalizacji zysku (6) prowadzi do wniosku, że racjonalnie postępująca firma zatrudnia poszczególne czynniki produkcji w ściśle określonych proporcjach. Optymalny (dla firm) stosunek kapitału rzeczowego do efektywnego zatrudnienia $k^D = K^D/AL^D$ oraz optymalny stosunek kapitału ludzkiego do efektywnego zatrudnienia $h^D = H^D/AL^D$ można wyznaczyć z warunków koniecznych optymalności:

$$\frac{\partial J}{\partial K^D} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial J}{\partial H^D} = 0, \quad \text{i} \quad \frac{\partial J}{\partial L^D} = 0,$$

równoważnych z układem równań:

$$\begin{aligned} &\alpha (k^D)^{\alpha - 1} (h^D)^{\beta} = w_K = r + \delta, \\ &\beta (k^D)^{\alpha} (h^D)^{\beta - 1} = w_H, \\ &(1 - \alpha - \beta)(k^D)^{\alpha} (h^D)^{\beta} A = w, \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie małymi literami w_K, w_H i w oznaczono realne stawki płac (stawki nominalne podzielone przez poziom cen P). Zakładamy standardowo, że realna cena wynajmu kapitału w_K jest równa realnej stopie procentowej r, powiększonej o stopę deprecjacji kapitału rzeczowego δ.

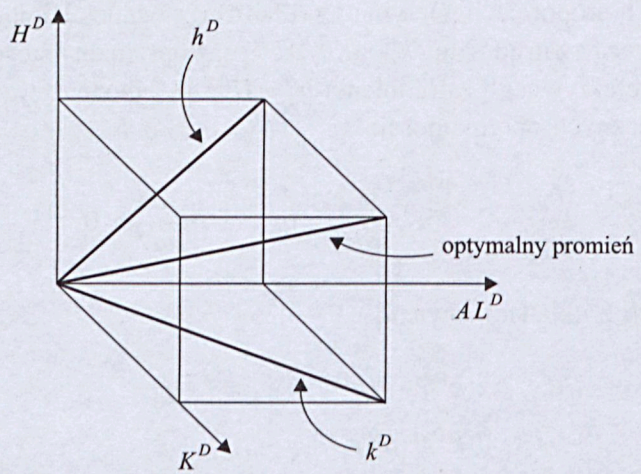
Z warunków koniecznych optymalności (7) wynika:

$$k^D = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \cdot \frac{w}{r + \delta} \cdot \frac{1}{A}, \tag{8}$$

$$h^D = \frac{\beta}{1 - \alpha - \beta} \cdot \frac{w}{w_H} \cdot \frac{1}{A}. \tag{9}$$

Optymalny (dla firm) stosunek kapitału do efektywnego zatrudnienia oraz kapitału ludzkiego do efektywnego zatrudnienia nie zależy od poziomu cen P. Przy danych (niezmiennych) parametrach technologicznych α i β oraz danym A, zależy on wyłącznie od relatywnych stawek wynagrodzeń czynników produkcji. Warto zauważyć, że wzrost realnej stopy procentowej r skłania firmy do zastępowania kapitału pracą (ponieważ powoduje spadek k^D), ale nie ma wpływu na h^D. Analogicznie, wzrost wynagrodzenia kapitału ludzkiego zachęca firmy do zastępowania go „zwykłą" pracą. Podrożenie kapitału ludzkiego nie wpływa jednak na k^D.

Obliczone optymalne wielkości k^D oraz h^D wyznaczają **optymalny promień** w trójwymiarowej przestrzeni czynników produkcji K^D, H^D, AL^D, co ilustruje poniższy rysunek.



Rys. 1. Optymalny (dla firm) promień w przestrzeni czynników produkcji

Firma maksymalizująca zysk zawsze stara się zachować optymalne wartości k^D oraz h^D, czyli stara się być na optymalnym promieniu. Łatwo sprawdzić, że zysk takiej firmy (w ujęciu realnym) wyraża się wzorem:

$$j=\left[1-\left(\frac{w}{A(1-\alpha-\beta)}\right)^{1-\alpha-\beta}\cdot\left(\frac{r+\delta}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{w_H}{\beta}\right)^{\beta}\right]\cdot Y. \qquad (10)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest (w warunkach konkurencji doskonałej) dane – firma nie ma na nie żadnego wpływu. Zatem zysk firmy zatrudniającej czynniki produkcji w sposób optymalny jest liniową funkcją wielkości

produkcji. W zależności od znaku wyrażenia w nawiasie, jest to funkcja rosnąca, malejąca lub stała. Zależy to od wartości parametrów technologicznych α, β, δ, A oraz obowiązujących w danym momencie realnych cen (stawek płac) czynników produkcji: w, w_H, $r+\delta$. Zatem zysk firmy pozostającej na optymalnym promieniu:

- jest dodatni i rośnie nieograniczenie (liniowo) ze wzrostem skali produkcji

albo

- jest zerowy bez względu na skalę produkcji,

albo

- jest ujemny i maleje nieograniczenie (liniowo) ze wzrostem skali produkcji.

Zakładamy, że konkurencja doskonała prowadzi (w długim okresie) do wyzerowania zysków, co jest równoważne z założeniem, że czynniki produkcji są wynagradzane zgodnie z ich krańcowymi produktywnościami. Matematycznie jest to założenie równoważne z układem równań (7)[5]. Przy tym założeniu popyt na czynniki produkcji i podaż produktu są nieokreślone, dlatego dodatkowo zakładamy, że firmy starają się produkować jak najwięcej, mimo że nie przynosi im to (w długim okresie) dodatkowych zysków[6]. Graficznie oznacza to, że gospodarka znajduje się na optymalnym promieniu, jak najdalej od początku układu współrzędnych.

Zakładamy ponadto, że ceny czynników produkcji są (w gospodarce zamkniętej) doskonale elastyczne, dzięki czemu na rynkach wszystkich czynników występuje permanentna równowaga[7], a więc popyt na czynniki produkcji w gospodarce jest zawsze równy ich podaży. Ta zaś jest (z założenia) równa zasobom czynników produkcji: $K^D = K$, $H^D = H$ oraz $L^D = L$, gdzie K, H, L to dostępne w kraju zasoby czynników produkcji. Zatem:

---

[5] Z pozoru wydaje się, że cała analiza od wzoru (7) jest zbędna, skoro i tak w końcu wracamy do tej formuły. Jednak nie jest to prawdą. Warunki (8) i (9) wynikają z układu warunków koniecznych optymalności (7). Ogólnie nie jest jednak prawdziwa implikacja w drugą stronę. Prawdą jest natomiast, że jeżeli warunki (8) i (9) są spełnione, to możliwe są trzy sytuacje: albo wszystkie czynniki produkcji są wynagradzane powyżej ich krańcowych produktywności, albo poniżej, albo na poziomie krańcowych produktywności. Uzasadnia to celowość przedstawionej analizy.

[6] W praktyce istnieją pewne dodatkowe bodźce, skłaniające do pełnego wykorzystania istniejącego kapitału (czyli maksymalizacji produkcji), które nie są ujęte *explicite* w modelu. Zob. [6], s. 15.

[7] *De facto* ze względu na przyjęte wcześniej założenia (o tym, że firmy produkują jak najwięcej i zawsze pozostają na optymalnym promieniu) permanentna równowaga na rynkach wszystkich **trzech** czynników produkcji wymaga jedynie, aby stawki płac co najmniej **dwóch** czynników produkcji były doskonale elastyczne.

$$k^D=\frac{K^D}{AL^D}=\frac{K}{AL}=k \quad \text{oraz} \quad h^D=\frac{H^D}{AL^D}=\frac{H}{AL}=h. \tag{11}$$

Reasumując, z (7) i (11) wynika, że rynek kapitału, kapitału ludzkiego i pracy w gospodarce zamkniętej w warunkach konkurencji doskonałej spełnia następujące warunki:

$$r=\alpha k^{\alpha-1}h^{\beta}-\delta, \tag{12}$$

$$w_H=\beta k^{\alpha}h^{\beta-1}, \tag{13}$$

$$w=A(1-\alpha-\beta)k^{\alpha}h^{\beta}. \tag{14}$$

Równania te pokazują, w jaki sposób muszą się kształtować realne stawki wynagrodzeń czynników produkcji, aby (zgodnie z przyjętymi założeniami) dostępne zasoby czynników produkcji były w pełni wykorzystywane.

Małymi literami oznaczmy realne wartości poszczególnych zmiennych, przypadające na jednostkę efektywnej pracy (*njep*), czyli $y=Y/AL$, $k=K/AL$ itd. Wówczas, uwzględniając wszystkie dotychczasowe założenia, model gospodarki zamkniętej można zapisać w zwartej formie następującego układu równań:

[y]	$y=k^{\alpha}h^{\beta}$,	gdzie	$\alpha,\beta>0$ i $\alpha+\beta<1$,
[k]	$\dot{k}=\gamma_K\cdot y-\varphi k$,	gdzie	$\varphi=n+\sigma+\delta$,
[h]	$\dot{h}=\gamma_H\cdot y-\varphi h$,		
[c]	$c=(1-\gamma_K-\gamma_H)y$,	gdzie	$\gamma_K,\gamma_H\geqslant 0$, $\gamma_K+\gamma_H\in[0,1)$,

z warunkami początkowymi: $k(0)=k_0>0$ i $h(0)=h_0>0$.

Dynamikę gospodarki opisuje układ dwóch nieliniowych równań różniczkowych, który otrzymujemy podstawiając [y] do [k] i [h]:

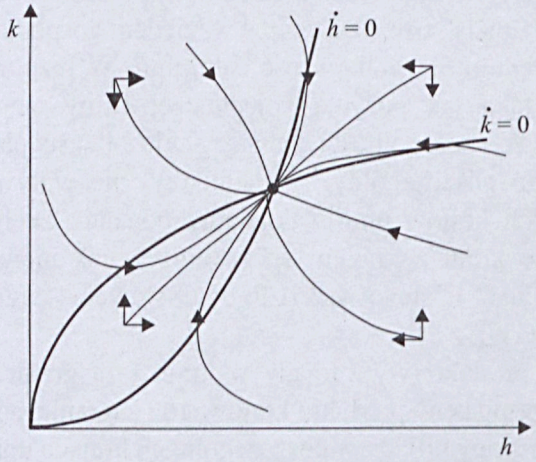
$$\begin{aligned}\dot{k}&=\gamma_K\cdot k^{\alpha}h^{\beta}-\varphi k,\\ \dot{h}&=\gamma_H\cdot k^{\alpha}h^{\beta}-\varphi h.\end{aligned} \tag{15}$$

W stanie stacjonarnym (SS) dynamika kapitału rzeczowego i ludzkiego wygasa. W SS gospodarka spełnia zatem układ równań:

$$\begin{aligned}\gamma_K\cdot k^{\alpha}h^{\beta}&=\varphi k,\\ \gamma_H\cdot k^{\alpha}h^{\beta}&=\varphi h.\end{aligned} \tag{16}$$

Dla dowolnych parametrów układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zatem w modelu gospodarki zamkniętej istnieje zawsze dokładnie jeden SS.

Portret fazowy modelu przedstawia rysunek 2. Jak widać, stan stacjonarny jest globalnie asymptotycznie stabilny. Zbieżność do SS ma formę węzła niewłaściwego[8].



Rys. 2. Portret fazowy gospodarki zamkniętej

Rozwiązując układ równań (16) i wykorzystując równanie [c], otrzymujemy wzór, opisujący stacjonarną wielkość konsumpcji *njep*:

$$\bar{c}=(1-\gamma_K-\gamma_H)\left(\frac{\gamma_K^{\alpha}\gamma_H^{\beta}}{\varphi^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

Łatwo wykazać, że $\bar{c}$ osiąga maksimum wówczas, gdy

$$\gamma_K=\alpha \quad \text{i} \quad \gamma_H=\beta. \tag{17}$$

Jest to tzw. złota reguła, zgodnie z którą konsumpcja na osobę jest w SS maksymalna, jeżeli w długim okresie stopa inwestycji w kapitał rzeczowy wynosi α, a stopa inwestycji pomnażających kapitał ludzki β[9]. Reguła ta dotyczy gospodarki zamkniętej. Poniżej przekonamy się, że w warunkach unii gospodarczej i walutowej (UGW) ulega ona całkowitej zmianie.

---

[8] Zob. [12], s. 137-138.

[9] Parametry α i β szacuje się zwykle na poziomie około $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{3}$; zob. np. [3] i [9]. W myśl złotej reguły w gospodarce zamkniętej należałoby zatem około $\frac{1}{3}$ PKB inwestować w kapitał rzeczowy i tyle samo w kapitał ludzki.

2. Model wzrostu małej gospodarki w UGW

2.1. Podstawowe założenia

Wzorując się na modelu gospodarki zamkniętej z kapitałem ludzkim, zbudowano analogiczny model wzrostu małej gospodarki w UGW. Założenie, że gospodarka jest „mała" oznacza, że pod względem gospodarczym opisywany kraj stanowi względnie niewielką część całej unii. W rezultacie jego pozycja wobec unii jest taka jak pozycja pojedynczej firmy na rynku doskonale konkurencyjnym. W szczególności zmiany salda bilansu płatniczego danego kraju (a także jego poszczególnych składników) nie wpływają na stan gospodarki pozostałych krajów unii. Zakładamy ponadto, że handel i transfery kapitałowe danego kraju z krajami spoza unii są tak niewielkie, że można je w modelu pominąć. Dlatego wszędzie dalej słowem „zagranica" określono pozostałe kraje UGW.

Zagregowany produkt (wytwarzany w kraju i za granicą) jest doskonale mobilny, dzięki czemu ceny produktu krajowego i zagranicznego są jednakowe. W rezultacie także stopy inflacji w poszczególnych krajach unii są jednakowe[10].

Przyjmujemy, że kapitał rzeczowy i finansowy przepływa między krajami unii bez żadnych przeszkód i kosztów (doskonała mobilność kapitału). Dlatego nominalne stopy procentowe w całej unii są jednakowe. W świetle poprzedniego założenia oznacza to, że również realne stopy procentowe są w całej unii jednakowe. Ponieważ pod względem gospodarczym opisywany kraj jest mały, nie ma on możliwości oddziaływania na realną stopę procentową r, jest ona bowiem równa egzogenicznej unijnej stopie procentowej r^*.

Zakładamy jak poprzednio, że kapitał rzeczowy i ludzki ulegają deprecjacji z jednakową stopą δ. Dzięki doskonałej mobilności kapitału rzeczowego w unii podaż kapitału w kraju jest doskonale elastyczna – ewentualna nadwyżka popytu nad podażą kapitału w kraju wywołuje natychmiastowy napływ kapitału z zagranicy i odwrotnie. Popyt na kapitał w kraju jest zatem zawsze zaspokojony, a rynek kapitału w kraju zawsze w równowadze.

Kapitał wykorzystywany do produkcji w kraju (K) należy częściowo do obywateli kraju, a częściowo do obywateli zagranicy. Jednocześnie część kapitału ulokowanego za granicą (w pozostałych krajach unii) należy do obywateli kraju. Analogicznie wygląda struktura inwestycji.

[10] Choć przyznać trzeba, że w na przykład w Europejskiej Unii Monetarnej proces wyrównywania się cen przebiega wolniej niż oczekiwano, zob. [1] i [8]. Również niektóre opracowania empiryczne dla gospodarki USA stwierdzają występowanie trwałych znacznych różnic w poziomie cen detalicznych tych samych towarów w różnych stanach, zob. np. [5].

Klasyfikacja kapitału angażowanego w procesie produkcji

Czyj? \ Gdzie?	W kraju (K)	Za granicą
Krajowy (KK)	KK_K	KK_Z
Zagraniczny (KZ)	KZ_K	KZ_Z

KK_K – kapitał krajowy w kraju, KK_Z – kapitał krajowy za granicą, KZ_K – kapitał zagraniczny w kraju, KZ_Z – kapitał zagraniczny za granicą.

Zauważmy, że kapitał w kraju $K=KK+KZ_K-KK_Z$. Gdy przez E oznaczymy aktywa zagraniczne netto, wówczas $E=KK_Z-KZ_K$, zatem $KK=K+E$, co oznacza, że kapitał krajowy to kapitał w kraju powiększony o aktywa zagraniczne netto.

Zakładamy brak mobilności pracy i (związanego z nią) kapitału ludzkiego w unii. Założenie to może wydawać się naiwne, ale badania empiryczne wskazują, że w Unii Europejskiej mimo braku formalnych przeszkód, mobilność pracy jest niewielka, ze względu na poważne bariery kulturowe, językowe itp. (zob. [4] i [7]). Zakładamy zatem, że podaż pracy w kraju jest doskonale sztywna, równa zasobowi pracy w gospodarce (L). Zasób ten rośnie wykładniczo, ze stałą stopą wzrostu n.

Inwestycje zagraniczne mogą dotyczyć wyłącznie kapitału rzeczowego. Natomiast inwestycje w kapitał ludzki są finansowane wyłącznie ze środków krajowych[11].

2.2. Rachunek rozdysponowania produktu oraz tworzenia i podziału dochodu

Przy założeniu doskonałej mobilności towarów w unii, rynek produktu w kraju jest zawsze w równowadze, tzn. popyt na produkt krajowy jest równy produkcji. Dlatego zachodzi równość:

$$Y=C+I+X-M. \tag{18}$$

[11] Założenie to jest uzasadnione empirycznie. Na przykład Barro, Mankiw i Sala-i-Martin w pracy [2] argumentują, że neoklasyczny model gospodarki otwartej z kapitałem ludzkim jest zgodny z obserwowanym empirycznie niskim tempem konwergencji (między krajami bogatymi a biednymi) wówczas, gdy kapitał ludzki jest finansowany wyłącznie z krajowych oszczędności.

Część inwestycji powiększa kapitał rzeczowy w kraju (K), a pozostała część – kapitał ludzki:

$$I = I_K + I_H. \tag{19}$$

Realny dochód do dyspozycji obywateli kraju Y_d jest naturalnie sumą dochodu z kapitału krajowego, wynagrodzeń z tytułu pracy oraz dochodu z kapitału ludzkiego:

$$Y_d = (r+\delta)KK + wL + w_H H. \tag{20}$$

Ze względu na założenie o zerowych zyskach firm, wielkość produkcji Y jest równa realnemu kosztowi wszystkich czynników produkcji. Dlatego równanie (20) można przekształcić do postaci:

$$Y_d = (r+\delta)K + wL + w_H H + (r+\delta)E = Y + (r+\delta)E. \tag{21}$$

Część dochodu jest konsumowana, a reszta oszczędzana: $Y_d = C + S$. Z tego, po uwzględnieniu (21) i (18), wynika, że:

$$S - I = Q, \tag{22}$$

gdzie $Q = X - M + (r+\delta)E$ oznacza saldo rachunku obrotów bieżących gospodarki. Jest to jedna z podstawowych tożsamości makroekonomicznych: nadwyżka oszczędności obywateli kraju nad inwestycjami w gospodarce jest równa saldu rachunku obrotów bieżących.

Podobnie jak w gospodarce zamkniętej zakładamy, że:

$$S = \gamma Y_d, \quad C = (1-\gamma)Y_d, \quad \text{gdzie} \quad \gamma \in [0, 1). \tag{23}$$

Oszczędności dzielą się na dwie części:

$$S = \gamma_H Y_d + \gamma_K Y_d, \quad \text{gdzie} \quad \gamma = \gamma_H + \gamma_K \ \text{ i } \ \gamma_H, \gamma_K \geqslant 0. \tag{24}$$

Pierwsza część oszczędności jest przeznaczona na inwestycje w kapitał ludzki ($\gamma_H Y_d$). Zakładamy, że obywatele kraju nie inwestują w kapitał ludzki za granicą (choć mogą inwestować w kapitał rzeczowy). Również inwestycje zagraniczne w kapitał ludzki zaangażowany w kraju są zerowe. Innymi słowy, w sferze kapitału ludzkiego gospodarka jest zamknięta. Jest to, naszym zdaniem, naturalne i realistyczne założenie, wziąwszy pod uwagę fakt, że rzeczywiście

nakłady na edukację, doskonalenie zawodowe itp. w różnych krajach są ponoszone praktycznie w całości przez obywateli kraju (na ogół ze znacznym pośrednictwem budżetu państwa). Zatem:

$$I_H = \gamma_H Y_d, \tag{25}$$

oraz

$$\dot{H} = I_H - \delta H. \tag{26}$$

Druga część oszczędności powiększa kapitał krajowy *KK*:

$$\dot{KK} = \gamma_K Y_d - \delta KK. \tag{27}$$

Z (24), (25), (19) i (22) wynika, że:

$$Q = \gamma_K Y_d - I_K, \tag{28}$$

co oznacza, że saldo rachunku obrotów bieżących Q jest równe nadwyżce oszczędności przeznaczonych na powiększenie kapitału krajowego (*KK*) nad inwestycjami w kapitał w kraju (*K*). Ponieważ $E = KK - K$, zatem:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{KK} - \dot{K} = \gamma_K Y_d - \delta KK - (I_K - \delta K) = \\ &= \gamma_K Y_d - I_K - \delta(KK - K) = Q - \delta E, \end{aligned} \tag{29}$$

a więc o aktywach zagranicznych netto decyduje dynamika sald rachunku obrotów bieżących.

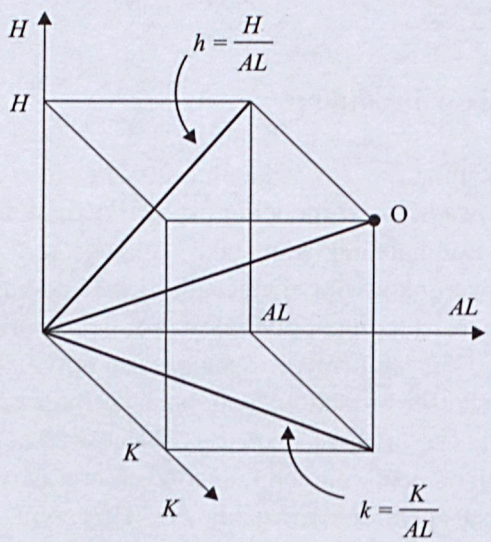
2.3. Rynki czynników produkcji

Analiza popytu na kapitał rzeczowy, kapitał ludzki i pracę jest bardzo podobna do tej, którą przeprowadzono w modelu gospodarki zamkniętej. Funkcja zysku i warunki optymalności mają dokładnie taką samą postać – zob. wzory (6) – (7). Wynikające z tych warunków optymalne (dla firm) wielkości k^D oraz h^D mają postać (8) i (9). Wyznaczają one optymalny promień w przestrzeni czynników produkcji (zob. rys. 1). Zysk firmy pozostającej na optymalnym promieniu jest liniową funkcją wielkości produkcji. Podobnie jak poprzednio zakładamy, że zyski firm w kraju są zerowe, co jest równoważne z wynagradzaniem czynników produkcji na poziomie ich krańcowych produktywności. Zakładamy zatem, że zawsze są spełnione równania (7). Przy tym założeniu popyt na czynniki produkcji i podaż produktu są nieokreślone, dlatego dodatkowo

zakładamy, że firmy starają się maksymalizować wielkość produkcji. Graficznie oznacza to, że gospodarka znajduje się na optymalnym promieniu – jak najdalej od początku układu współrzędnych.

Zakładamy, że rynki pracy i kapitału ludzkiego są w długim okresie w równowadze, czyli popyt na pracę L^D jest równy podaży pracy L i analogicznie $H^D = H$. Innymi słowy, zakładamy, że dostępne w gospodarce zasoby pracy L i kapitału ludzkiego H są w pełni wykorzystywane. Jest to możliwe dzięki doskonale elastycznym realnym stawkom płac w i w_H, które kształtują się (w długim okresie) na takim poziomie, przy którym popyt na te dwa czynniki produkcji jest równy ich podaży. Przyjmujemy, że rynek kapitału jest również w równowadze (pomimo sztywnej realnej ceny wynajmu kapitału $w_K = r^* + \delta$), co zawdzięczamy doskonałej mobilności kapitału w unii. Ilość kapitału w kraju K dostosowuje się natychmiast do popytu K^D. Ewentualny chwilowy niedobór kapitału wywołuje natychmiastową reakcję w postaci gwałtownego napływu kapitału do kraju. Podobnie chwilowy nadmiar kapitału (czyli częściowe jego niewykorzystanie) wywołuje natychmiastowy odpływ kapitału za granicę. Bodźcem skłaniającym do przemieszczania kapitału jest fakt, że kapitał niewykorzystywany w produkcji nie przynosi żadnego dochodu, podczas gdy kapitał wykorzystywany przynosi dochód $r^* + \delta$.

Omówiony wyżej układ założeń o rynkach czynników produkcji można zilustrować graficznie w przestrzeni trójwymiarowej. Warto w tym miejscu na moment powrócić do gospodarki zamkniętej. W danym momencie w kraju określone były zasoby czynników produkcji: AL, H i K. Zasoby te wyznaczały jednoznacznie pewien punkt O w przestrzeni nakładów – zob. rysunek 3.

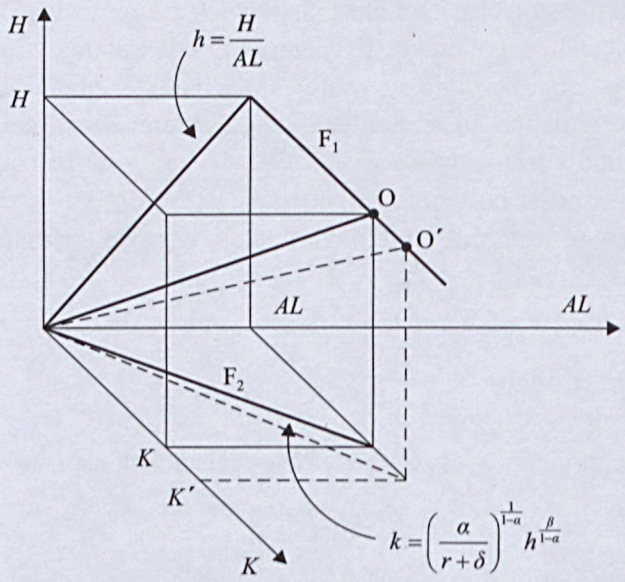


Rys. 3. Optymalny promień czynników produkcji w gospodarce zamkniętej

Założone pełne wykorzystanie wszystkich czynników produkcji oznaczało, że optymalny promień musiał w każdym momencie przechodzić przez (dany) punkt O. W gospodarce zamkniętej było to możliwe dzięki doskonałej elastyczności realnych stawek płac (w, w_H) oraz stopy procentowej (r). Dzięki niej pozycja optymalnego promienia była „doskonale elastyczna" – mógł on przemieszczać się dowolnie szybko tak, aby zawsze przechodzić przez (dany) punkt O.

W przypadku małej gospodarki w UGW jest nieco inaczej, ponieważ stopa procentowa jest egzogeniczna, a więc całkowicie nieelastyczna ($r = r^*$). Za to doskonale elastyczna jest podaż kapitału, co wynika z doskonałej mobilności kapitału w unii. W wybranym momencie dana jest wielkość AL i H. Założone pełne wykorzystanie tych czynników produkcji oznacza, że gospodarka musi znajdować się na półprostej F_1 – zob. rysunek 4. Optymalny promień czynników musi zatem przecinać półprostą F_1. Czynniki produkcji są wynagradzane zgodnie z ich krańcowymi produktywnościami, czyli spełnione są równania (7). Zauważmy, że z pierwszego z nich wynika:

$$k = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}. \tag{30}$$



Rys. 4. Optymalny promień czynników produkcji w małej gospodarce w UGW

W ustalonym momencie dana jest wielkość h (H i AL) oraz stopa procentowa r. Zatem dana jest wielkość k. Graficznie oznacza to, że rzut pionowy optymalnego promienia czynników na płaszczyznę (K, AL) musi

odpowiadać półprostej F_2, zdefiniowanej równaniem (30). Mówiąc prościej, optymalny promień musi leżeć dokładnie nad daną półprostą F_2.

Istnieje dokładnie jeden optymalny promień spełniający oba wymienione warunki. Gospodarka znajduje się w punkcie przecięcia owego promienia z prostą F_1 (punkt O). Aby (zgodnie z przyjętymi założeniami) wszystkie czynniki produkcji były zawsze w pełni wykorzystywane, optymalny promień musi zawsze przechodzić przez punkt O. Jest to możliwe dzięki doskonałej mobilności kapitału K oraz doskonałej elastyczności cen w i w_H. Na przykład każde przesunięcie punktu O wzdłuż prostej F_1, wywołane zmianą stopy r, wymaga skokowego dostosowania się (wzrostu lub spadku) poziomu K, czyli gwałtownego odpływu lub napływu kapitału do kraju. Dla przykładu, na rysunku 4 przedstawione są dostosowania wywołane spadkiem stopy r (linie kropkowane). Spadek ów przesuwa prostą F_2 i gospodarka musi „przeskoczyć" z punktu O do O′. Następuje to dzięki skokowemu napływowi kapitału do kraju (do poziomu K').

Oczywiście, pozycja półprostych F_1 i F_2, a co za tym idzie punktu O, może zmieniać się w czasie. Na przykład zmiany egzogenicznej stopy procentowej r, zmieniające pozycję prostej F_2, przemieszczają punkt O wzdłuż prostej F_1. Niezależnie od tego zasoby kapitału ludzkiego H i efektywnej pracy AL rosną w czasie, wskutek czego prosta F_1 przesuwa się systematycznie „w prawo i w górę". To przemieszczanie się może mieć charakter nieliniowy – wówczas systematycznie zmienia się h, wskutek czego przemieszcza się też prosta F_2 (nawet jeśli stopa r jest stała w czasie). Oczywiście h może maleć lub rosnąć w czasie, w zależności od tempa zmian H, A i L. Natomiast sposób przemieszczania się prostej F_2 zależy od konkretnych wartości parametrów modelu (w zasadzie wszystkich).

2.4. Równania modelu

Wykorzystując zmienne *njep*, omawiany model można zapisać w następującej zwartej postaci:

[i] $k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$ gdzie $\alpha, \beta>0$ i $\alpha+\beta<1$,

[ii] $y=k^{\alpha}h^{\beta}$,

[iii] $y_d=y+(r+\delta)e$,

[iv] $c=(1-\gamma_K-\gamma_H)y_d$, gdzie $\gamma_K, \gamma_H \geqslant 0$, $\gamma_K+\gamma_H \in [0, 1)$,

[v] $y=c+i+x-m,$

[vi] $i=i_K+i_H=i_K+\gamma_H y_d,$

[vii] $q=x-m+(r+\delta)e,$

[viii] $\dot{k}=i_K-\varphi k,$ gdzie $\varphi=n+\sigma+\delta,$

[ix] $\dot{h}=\gamma_H y_d-\varphi h,$

[x] $\dot{e}=q-\varphi e,$

z warunkami początkowymi: $h(0)=h_0>0$, $e(0)=e_0$.

Układ ten ma 10 zmiennych endogenicznych: k, y, y_d, c, $x-m$, i, h, q, i_K, e. Obliczając pochodną kapitału *njep* względem czasu na podstawie [i] otrzymujemy[12]:

$$\dot{k}=N\cdot\dot{h}\cdot h^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}, \quad \text{gdzie} \quad N=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\frac{\beta}{1-\alpha}=\text{const}>0. \tag{31}$$

Z (31), [viii] i [ix] wynika, że:

$$i_K=N\cdot h^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}[\gamma_H y_d-\varphi h]+\varphi k. \tag{32}$$

Wykorzystując (31) i (32) model ten można zapisać w wygodniejszej *postaci iteracyjnej*[13]:

[k] $k=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}},$

[y] $y=k^{\alpha}h^{\beta},$

[y_d] $y_d=y+(r+\delta)e,$

[c] $c=(1-\gamma_K-\gamma_H)y_d,$

[i_K] $i_K=N\cdot h^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}[\gamma_H y_d-\varphi h]+\varphi k,$

[12] Przyjmujemy, że stopa procentowa r oraz wszystkie parametry technologiczne są stałe w czasie.

[13] Na ogół postać iteracyjną układu równań utożsamia się z sytuacją, gdy po prawej stronie kolejno po sobie następujących równań występują jedynie zmienne wcześniej określone (ang. *predetermined*), czyli wyliczone we wcześniejszych równaniach. Ściśle rzecz biorąc, przedstawiony układ równań miałby taką strukturę dopiero po jego przedstawieniu w formie dyskretnej (z czasem skokowym).

$$[x-m] \quad x-m=y-c-\gamma_H y_d-i_K,$$
$$[q] \quad q=x-m+(r+\delta)e,$$
$$[h] \quad \dot{h}=\gamma_H y_d-\varphi h,$$
$$[\mathrm{e}] \quad \dot{e}=q-\varphi e,$$

z warunkami początkowymi: $h(0)=h_0>0$, $e(0)=e_0$.

2.5. Dynamika modelu

Dynamikę modelu opisuje układ dwóch równań różniczkowych postaci:

$$\begin{aligned} \dot{h}&=f^1(h,e),\\ \dot{e}&=f^2(h,e). \end{aligned} \tag{33}$$

Funkcje f^1 i f^2 znajdujemy wykonując kilka przekształceń. Podstawiając $[k]$ do $[y]$ otrzymujemy:

$$y=\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}. \tag{34}$$

Podstawiając (34) do $[y_d]$, a następnie do $[h]$ dostajemy pierwsze równanie układu (33):

$$\dot{h}=\gamma_H\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}-\varphi h+\gamma_H(r+\delta)e=f^1(h,e). \tag{35}$$

Drugie równanie wyprowadzamy w podobny sposób. Korzystając z (34), $[y_d]$, $[c]$, $[x-m]$, $[q]$ oraz $[e]$, po przekształceniach otrzymujemy:

$$\dot{e}=\gamma_K\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}-i_K+[\gamma_K(r+\delta)-\varphi]e. \tag{36}$$

Podstawiając $[k]$ oraz (34) do $[i_K]$ dochodzimy do równania:

$$i_K=N\gamma_H\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\alpha+2\beta-1}{1-\alpha}}+\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}N\varphi h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}+N\gamma_H(r+\delta)h^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}e. \tag{37}$$

Podstawiając następnie (37) do (36), po przekształceniach otrzymujemy drugie równanie dynamiki:

$$\dot{e}=\left[\gamma_K\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\frac{1-\alpha-\beta}{\beta}N\varphi\right]h^{\frac{\beta}{1-\alpha}}-N\gamma_H\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}h^{\frac{\alpha+2\beta-1}{1-\alpha}}+$$

$$-N\gamma_H(r+\delta)h^{\frac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}}e+[\gamma_K(r+\delta)-\varphi]e=f^2(h,e). \tag{38}$$

Zatem (33) to układ równań różniczkowych nieliniowych i niejednorodnych, o bardzo złożonej formie. Dlatego nie jest tu możliwa graficzna ilustracja ewentualnej stabilności SS – przynajmniej nie w tak prostej formie, jak w modelu gospodarki zamkniętej z punktu 1. Można natomiast analitycznie udowodnić, że SS jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Dowód ten przeprowadzimy po znalezieniu stacjonarnych wartości poszczególnych zmiennych.

2.6. Wartości zmiennych w stanie stacjonarnym

W stanie stacjonarnym dynamika zmiennych *njep* wygasa, więc spełniony jest układ warunków: $\dot{k}=0$, $\dot{h}=0$, $\dot{e}=0$, równoważny z układem:

$$i_K=\varphi k, \tag{39a}$$

$$q=\varphi e, \tag{39b}$$

$$\gamma_H y_d=\varphi h. \tag{39c}$$

Wzory na wartości zmiennych modelu w SS wyprowadzamy na podstawie warunków (39) z uwzględnieniem równań modelu [*k*]-[*e*]. Korzystając z [*x*−*m*] i [*c*] równanie [*q*] można zapisać w następującej postaci:

$$q=\gamma_K y_d-i_K. \tag{40}$$

Z (39a), (39c) i (40) wynika, że $\gamma_K y_d=\varphi(k+e)$. Dzieląc to równanie stronami przez (39b) otrzymujemy:

$$\frac{k+e}{h}=\frac{\gamma_K}{\gamma_H}. \tag{41}$$

Wykorzystując powyższe wzory oraz równania [k] – [e] otrzymujemy:

$$\bar{y}=M^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}, \quad \text{gdzie} \quad M=\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\gamma_H(r+\delta)}{\varphi-\gamma_K(r+\delta)}, \tag{42}$$

$$\bar{k}=\frac{\alpha}{r+\delta}\bar{y}, \tag{43}$$

$$\bar{h}=\frac{(1-\alpha)\gamma_H}{\varphi-\gamma_K(r+\delta)}\bar{y}, \tag{44}$$

$$\bar{e}=\frac{\gamma_K(r+\delta)-\alpha\varphi}{(r+\delta)[\varphi-\gamma_K(r+\delta)]}\bar{y}. \tag{45}$$

Wzory na stacjonarne wartości pozostałych zmiennych *njep* można otrzymać na podstawie równania modelu i otrzymanych wzorów na $\bar{y}$, $\bar{k}$, $\bar{h}$ oraz $\bar{e}$. W szczególności kapitał krajowy w SS jest równy

$$\overline{kk}=\bar{k}+\bar{e}=\frac{(1-\alpha)\gamma_K(r+\delta)}{(r+\delta)[\varphi-\gamma_K(r+\delta)]}\bar{y}. \tag{46}$$

Przy założeniu (55), zapewniającym lokalną asymptotyczną stabilność SS (zob. niżej), kapitał krajowy *njep* w SS jest dodatni. Jak wynika z (46), jest on proporcjonalny do wielkości produkcji w kraju *njep*. Saldo rachunku obrotów bieżących w SS jest określone wzorem:

$$\bar{q}=\varphi\bar{e}=\frac{\varphi\gamma_K(r+\delta)-\alpha\varphi^2}{(r+\delta)[\varphi-\gamma_K(r+\delta)]}\bar{y}, \tag{47}$$

natomiast saldo bilansu handlowego wynosi:

$$\overline{(x-m)}=\bar{q}-(r+\delta)\bar{e}=(n+\sigma-r)\bar{e}=\frac{(n+\sigma-r)[\gamma_K(r+\delta)-\alpha\varphi]}{(r+\delta)[\varphi-\gamma_K(r+\delta)]}\bar{y}. \tag{48}$$

Z (47) i (48) wynika, że w SS saldo rachunku obrotów bieżących ma zawsze taki sam znak, jak aktywa zagraniczne netto, ale niekoniecznie taki sam jak saldo bilansu handlowego. Zależy to od wysokości naturalnej stopy wzrostu $n+\sigma$ oraz realnej stopy procentowej r. Jeżeli $r<n+\sigma$, to saldo bilansu handlowego w SS i saldo obrotów bieżących mają takie same znaki (dodatnie, ujemne lub zerowe). Jeżeli $r>n+\sigma$, to saldo bilansu handlowego ma znak

przeciwny do salda obrotów bieżących. Wreszcie jeżeli $r=n+\sigma$, to saldo bilansu handlowego jest w SS zerowe (niezależnie od znaku salda obrotów bieżących)[14].

Wreszcie konsumpcja *njep* w SS jest określona wzorem:

$$\bar{c}=(1-\gamma_K-\gamma_H)\cdot\frac{(1-\alpha)\varphi}{\varphi-\gamma_K(r+\delta)}\bar{y}. \tag{49}$$

2.7. Lokalna asymptotyczna stabilność SS

Dynamikę modelu opisuje układ nieliniowych równań różniczkowych (33), dlatego analitycznie potrafimy wykazać jedynie lokalną asymptotyczną stabilność SS. W tym celu przeprowadzamy aproksymację liniową układu (33) w otoczeniu SS, poprzez rozwinięcie funkcji f^1 i f^2 w szeregi Taylora. Pochodne tych funkcji względem zmiennych h i e są w SS równe:

$$\left.\frac{\partial f^1}{\partial h}\right|_{ss}=\gamma_H\frac{\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{h}}-\varphi, \qquad \left.\frac{\partial f^1}{\partial e}\right|_{ss}=\gamma_H(r+\delta),$$

$$\left.\frac{\partial f^2}{\partial h}\right|_{ss}=\gamma_K\frac{\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{h}}-\gamma_H\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2\frac{\alpha}{r+\delta}\left(\frac{\bar{y}}{\bar{h}}\right)^2,$$

$$\left.\frac{\partial f^2}{\partial e}\right|_{ss}=\gamma_H\frac{-\alpha\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{h}}+[\gamma_K(r+\delta)-\varphi].$$

Jak zauważyliśmy wcześniej, w SS spełnione są równania (41) oraz

$$\gamma_K[\bar{y}+(r+\delta)\bar{e}]=\varphi(\bar{k}+\bar{e}), \tag{50}$$

Wyznaczając aktywa zagraniczne netto $\bar{e}$ z (41) i uwzględniając (43) otrzymujemy:

$$\bar{e}=\frac{\gamma_K}{\gamma_H}\bar{h}-\frac{\alpha}{r+\delta}\bar{y}. \tag{51}$$

Z (50) i (41) po przekształceniach otrzymujemy:

---

[14] Można wykazać, że jeśli $r=n+\sigma$, to $\bar{e}=\frac{\gamma_K-\alpha}{\varphi(1-\gamma_K)}\cdot\bar{y}$.

$$\gamma_H \frac{\bar{y}}{\bar{h}} = \frac{\chi}{1-\alpha}, \quad \text{gdzie} \quad \chi = \varphi - (r+\delta)\gamma_K. \tag{52}$$

Wobec tego:

$$\left.\frac{\partial f^1}{\partial h}\right|_{SS} = \frac{\beta\chi}{(1-\alpha)^2} - \varphi, \qquad \left.\frac{\partial f^1}{\partial e}\right|_{SS} = \gamma_H(r+\delta),$$

$$\left.\frac{\partial f^2}{\partial h}\right|_{SS} = \frac{\gamma_K}{\gamma_H} \cdot \frac{\beta\chi}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{\gamma_H}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2 \frac{\alpha\chi^2}{r+\delta},$$

$$\left.\frac{\partial f^2}{\partial e}\right|_{SS} = -\alpha\beta\chi - (1-\alpha)^2\chi.$$

Zatem w otoczeniu SS układ równań różniczkowych (33) można zapisać w następującej postaci zlinearyzowanej (w konwencji odchyleń od SS):

$$\begin{aligned} \dot{\hbar} &= \left[\frac{\beta\chi}{(1-\alpha)^2} - \varphi\right] \cdot \hbar + [\gamma_H(r+\delta)] \cdot \mathrm{e}, \\ \dot{\mathrm{e}} &= \left[\frac{\gamma_K}{\gamma_H} \cdot \frac{\beta\chi}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{\gamma_H}\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2 \frac{\alpha\chi^2}{r+\delta}\right] \cdot \hbar + [-\alpha\beta\chi - (1-\alpha)^2\chi] \cdot \mathrm{e}, \end{aligned} \tag{53}$$

gdzie $\hbar = h - \bar{h}$ oraz $\mathrm{e} = e - \bar{e}$. Powyższy układ równań można zapisać w formie macierzowej, z macierzą A, od której własności uzależniona jest stabilność SS. Jak wiadomo, SS jest lokalnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy ślad tej macierzy jest ujemny, a jej wyznacznik dodatni[15]. Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\mathrm{tr}A = \frac{-1}{1-\alpha}[(1-\alpha-\beta)\chi + \varphi(1-\alpha)],$$

$$\det A = (1-\alpha)^4[(1-\alpha)^2 + \beta(\alpha-\varphi)]\chi.$$

Jak widać $\mathrm{tr}A < 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(1-\alpha-\beta)\chi + \varphi(1-\alpha) > 0$, natomiast $\det A > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi > 0$. Pierwsza z tych nierówności jest równoważna z warunkiem:

$$\chi > \frac{-\varphi(1-\alpha)}{1-\alpha-\beta}. \tag{54}$$

[15] Zob. [12], s. 149-150.

Przy dowolnych wartościach parametrów, po prawej stronie tej nierówności występuje liczba ujemna. Z tego wynika, że obydwa warunki konieczne i dostateczne stabilności są spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi > 0$, co jest równoważne z nierównością $\varphi - (r+\delta)\gamma_K > 0$. W realnych gospodarkach warunek ten jest spełniony[16], dlatego odtąd zakładamy, że:

$$\gamma_K < \frac{\varphi}{r+\delta}, \quad \text{gdzie} \quad \varphi = n+\sigma+\delta. \tag{55}$$

Założenie to gwarantuje lokalną asymptotyczną stabilność SS. Liczba $\frac{\varphi}{r+\delta}$ to maksymalna stopa oszczędności (przeznaczonych na inwestycje w kapitał krajowy) γ_K, powyżej której SS staje się już niestabilny. Liczbę tę będziemy nazywać **granicą stabilności**. Warto podkreślić, że stabilność SS zupełnie nie zależy od drugiego z parametrów decyzyjnych, jakim jest stopa inwestycji w kapitał ludzki γ_H.

2.8. Złote reguły

Poszukamy teraz optymalnych wartości parametrów decyzyjnych γ_K i γ_H. Naturalnym kryterium optymalności jest maksymalizacja konsumpcji na osobę w SS, która jest oczywiście równoważna z maksymalizacją konsumpcji *njep* w SS, wyrażonej wzorem (49). Zapiszmy go w rozwiniętej postaci:

$$\bar{c} = D \cdot (1-\gamma_K-\gamma_H) \cdot \gamma_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot [\varphi - \gamma_K(r+\delta)]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}}. \tag{56}$$

gdzie:

$$D = (1-\alpha)\varphi \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} > 0.$$

Jak widać, D nie zależy od parametrów decyzyjnych γ_K i γ_H. Pochodne cząstkowe konsumpcji *njep* w SS względem interesujących nas parametrów wynoszą:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \gamma_H} = \frac{D}{1-\alpha-\beta} \cdot \gamma_H^{\frac{\alpha+2\beta-1}{1-\alpha-\beta}} \cdot [\varphi - \gamma_K(r+\delta)]^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} \cdot [\beta(1-\gamma_K) - (1-\alpha)\gamma_H], \tag{57}$$

---

[16] Zob. [6], s. 22.

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial \gamma_K} = \frac{D}{1-\alpha-\beta} \cdot \gamma_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \cdot [\varphi - \gamma_K(r+\delta)]^{\frac{2\alpha+\beta-2}{1-\alpha-\beta}} \cdot$$

$$\cdot [(1-\alpha)(r+\delta)(1-\gamma_H) - \beta(r+\delta)\gamma_K - (1-\alpha-\beta)\varphi]. \tag{58}$$

Łatwo sprawdzić, że nierówność $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \gamma_H} \geqslant 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\gamma_H \leqslant \frac{\beta}{1-\alpha}(1-\gamma_K). \tag{59}$$

Zbiór punktów, w których pochodna $\frac{\partial \bar{c}}{\partial \gamma_H}$ jest zerowa, tworzy w płaszczyźnie (γ_K, γ_H) prostą o nachyleniu ujemnym. Prostą tę oznaczmy symbolem H. Powyżej prostej H pochodna ta jest ujemna, a poniżej dodatnia, co na rysunkach 5-7 symbolizują znaki $-$ oraz $+$. Zatem powyżej prostej H zwiększanie stopy γ_H powoduje *ceteris paribus* spadek $\bar{c}$, i odwrotnie. Symbolicznie sygnalizują to pionowe strzałki ze znakami $-$ oraz $+$. Dla dowolnych wartości parametrów prosta H zawsze przecina oś odciętych (γ_K) w punkcie 1, a oś rzędnych (γ_H) w punkcie $\beta/(1-\alpha)$. Z przyjętego założenia $\alpha+\beta<1$ wynika, że $\beta/(1-\alpha)<1$, co oznacza, że punkt ten zawsze leży poniżej 1.

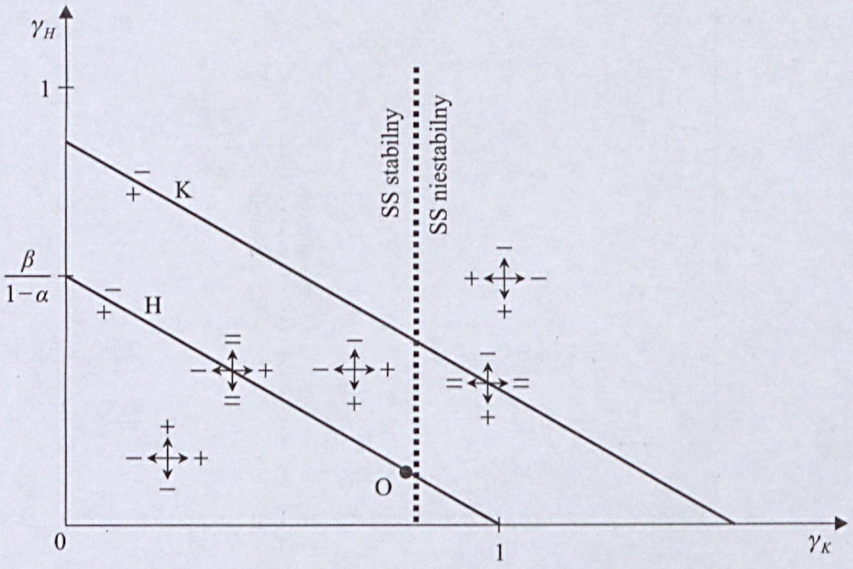
Nietrudno sprawdzić, że nierówność $\frac{\partial \bar{c}}{\delta \gamma_K} \geqslant 0$ jest równoważna z warunkiem:

$$\gamma_H \leqslant 1 - \frac{(1-\alpha-\beta)\varphi}{(1-\alpha)(r+\delta)} - \frac{\beta}{(1-\alpha)}\gamma_K. \tag{60}$$

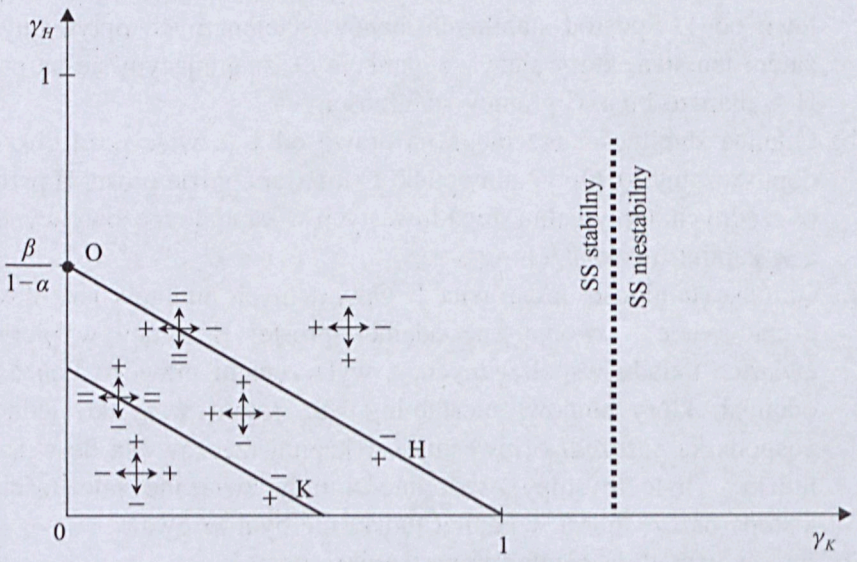
Zbiór punktów, w których pochodna $\frac{\partial \bar{c}}{\delta \gamma_K}$ jest zerowa, również tworzy prostą malejącą w płaszczyźnie (γ_K, γ_H). Prostą tę oznaczmy symbolem K. Powyżej niej zwiększanie γ_K powoduje *ceteris paribus* spadek $\bar{c}$, i odwrotnie (na rysunkach 5-7 symbolizują to poziome strzałki ze znakami $-$ i $+$). Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych wartości parametrów prosta K zawsze przecina oś rzędnych pomiędzy 0 a 1, a ponadto jest równoległa do prostej H. Jeżeli $r>n+\sigma$, to prosta K przecina oś odciętych na prawo od 1 (i odwrotnie). Można więc wyróżnić 3 przypadki:

(a) Jeżeli $r>n+\sigma$, to prosta K leży nad prostą H.
(b) Jeżeli $r<n+\sigma$, to prosta K leży pod prostą H.
(c) Jeżeli $r=n+\sigma$, to obie proste pokrywają się.

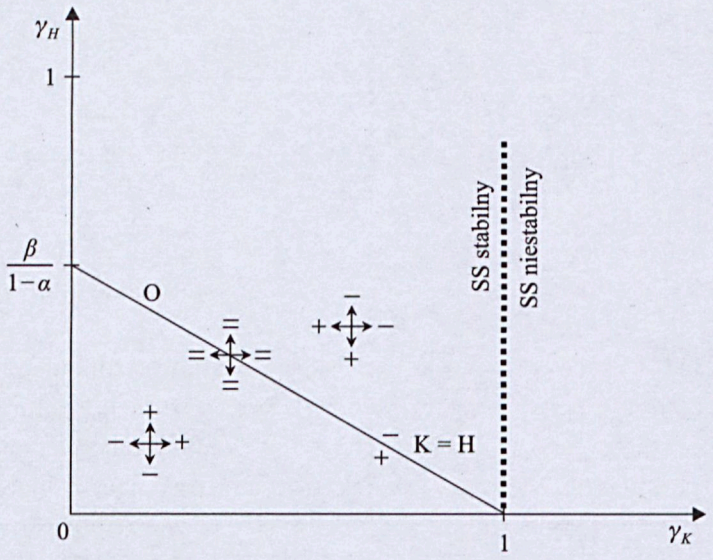
Przypadki te zostały zilustrowane na rysunkach 5-7.



Rys. 5. Złota reguła w przypadku (a), gdy $r > n + \sigma$



Rys. 6. Złota reguła w przypadku (b), gdy $r < n + \sigma$



Rys. 7. Złota reguła w przypadku (c), gdy $r = n + \sigma$

W każdym z trzech wyróżnionych przypadków różne są optymalne stopy inwestycji w kapitał krajowy γ_K i w kapitał ludzki γ_H:

(a) Z (55) wynika, że w tym przypadku granica stabilności przebiega na lewo od 1. Spośród stabilnych stanów stacjonarnych optymalny jest zatem ten stan, który „leży" w punkcie O, znajdującym się na prostej H – „bardzo blisko" granicy stabilności.

(b) Granica stabilności przebiega na prawo od 1 (a więc poza obszarem dopuszczalnym). Optymalny punkt O leży tam, gdzie prosta H przecina oś rzędnych. Optymalna stopa inwestycji w kapitał rzeczowy wynosi 0, a w kapitał ludzki $\beta/(1-\alpha)$.

(c) Granica stabilności jest równa 1. Optymalnych punktów jest nieskończenie wiele – tworzą one odcinek prostej H leżący w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, z wyłączeniem prawego końca tego odcinka, który stanowi niestabilny SS. Zatem wszystko jedno ile gospodarka oszczędza (inwestuje) w kapitał rzeczowy, a ile w kapitał ludzki – byle te stopy oszczędności były związane zależnością H, a stopa oszczędności w kapitał ludzki nie była zerowa.

Podsumowując, złota reguła ma następującą postać:

(a) Jeżeli $r > n + \sigma$, to $\gamma_K^{\text{opt}} \to \frac{\varphi}{r+\sigma}$ oraz $\gamma_H^{\text{opt}} \to \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{r-n-\sigma}{r+\sigma}$.

(b) Jeżeli $r<n+\sigma$, to $\gamma_K^{opt}=0$ oraz $\gamma_H^{opt}=\frac{\beta}{1-\alpha}$.

(c) Jeżeli $r=n+\sigma$, to $\gamma_K^{opt}=1-\frac{1-\alpha}{\beta}\gamma_H$ oraz $0<\gamma_H^{opt}<\frac{\beta}{1-\alpha}$.

Z oczywistych względów łączna stopa oszczędności kraju $\gamma=\gamma_K+\gamma_H$ nie może przekraczać 1. We wszystkich trzech przypadkach optymalne stopy oszczędności warunek ten spełniają.

Naturalnie w rzeczywistości realna stopa procentowa zmienia się w czasie – w pewnych okresach jest wyższa, a w innych niższa od naturalnej stopy wzrostu. Ta ostatnia zresztą również podlega wahaniom, choć są one znacznie mniejsze i wolniejsze. Niemniej w rzeczywistości trzy wyróżnione przypadki występują naprzemiennie i dlatego w praktyce raz warto inwestować więcej w kapitał ludzki, innym razem w kapitał rzeczowy. Nie można zatem jednoznacznie wskazać optymalnych wielkości stóp inwestycji γ_K i γ_H. Niemniej – co warto podkreślić – optymalne stopy inwestycji zawsze (tzn. niezależnie od tego, czy w danym czasie $r>n+\sigma$ czy odwrotnie) są związane wynikającą z (59) zależnością:

$$(1-\alpha)\gamma_H^{opt}=\beta(1-\gamma_K^{opt}). \tag{61}$$

Oznacza to, że niezależnie od aktualnej (i przyszłej, prognozowanej) wysokości realnej stopy procentowej, stopy wzrostu ludności i tempa postępu technicznego, **gospodarka zawsze powinna znajdować się na prostej H zdefiniowanej równaniem (61).** Jak wynika z powyższej analizy, trwały wzrost realnej stopy procentowej (lub spadek naturalnej stopy wzrostu gospodarki) powinien skłaniać do przemieszczania się w górę tej prostej, czyli zwiększania inwestycji w kapitał rzeczowy, kosztem inwestycji w kapitał ludzki. I odwrotnie.

Warto zauważyć, że złota reguła (17), odpowiadająca gospodarce zamkniętej, spełnia równanie (61), a więc jest „szczególnym przypadkiem" złotej reguły dla małej gospodarki w UGW. Dla jej zilustrowania załóżmy realistycznie, że $\alpha=\beta=1/3$. Wówczas reguła (61) ma postać: $2\gamma_H^{opt}+\gamma_K^{opt}=1$. Optymalnych strategii inwestowania w kapitał ludzki i w kapitał rzeczowy może być w takim przypadku nieskończenie wiele, na przykład $\gamma_H^{opt}=\gamma_K^{opt}=1/3$ (jak w gospodarce zamkniętej – por. przypis 9) lub $\gamma_H^{opt}=1/4$ i $\gamma_K^{opt}=1/2$.

*

Warto nieco bliżej przyjrzeć się otrzymanej złotej regule akumulacji kapitału rzeczowego i ludzkiego. Została ona wyprowadzona na podstawie kryterium maksymalizacji konsumpcji na osobę w SS. Jak wiadomo, w praktyce wskutek ciągłych zmian w gospodarce, położenie SS ulega zmianom. Dlatego realne gospodarki nigdy nie dochodzą do jakiegoś konkretnego SS. Niemniej nawet w czysto teoretycznej sytuacji stałych parametrów w czasie, a więc stałego SS, dojście do niego zajmuje dużo czasu. Gdyby zatem kryterium maksymalizacji konsumpcji na osobę w SS (a więc po upływie owego czasu dojścia do SS) zastąpić bardziej realistycznym kryterium **maksymalizacji strumienia konsumpcji w czasie** (obejmującym również czas dojścia do SS), wtedy wnioski dotyczące złotej reguły należałoby nieco zmodyfikować.

Na przykład w rozpatrywanej wyżej sytuacji (c) przestanie być obojętne, w jakim punkcie prostej H gospodarka się znajduje. Im bliżej prawego końca tej prostej, tym większą część dochodu do dyspozycji obywatele kraju oszczędzają (łączna stopa oszczędności $\gamma=\gamma_K+\gamma_H$ jest coraz wyższa). A więc w czasie dochodzenia do SS konsumpcja jest tym bardziej ograniczana, im bliżej prawego końca prostej H się znajdujemy. Dlatego kryterium maksymalizacji strumienia konsumpcji na osobę prowadzi do nieco innego wniosku: w sytuacji (c) optymalny punkt leży w lewym końcu prostej H, gdzie $\gamma_K=0$, a $\gamma_H=\beta/(1-\alpha)$. Jest to wniosek identyczny z wcześniej otrzymanym w sytuacji (b).

Naturalnie w samym SS konsumpcja na osobę będzie w sytuacji (c) taka sama w lewym końcu prostej H jak w jej prawym końcu. Różnica polega jedynie na tym, że w lewym końcu prostej H wysokie inwestycje w kapitał ludzki kosztem inwestycji w kapitał rzeczowy prowadzą do ukształtowania się (w SS) stanu, w którym większość dochodu do dyspozycji obywatele czerpią z własnej produkcji wytwarzanej w kraju (aczkolwiek za pomocą zagranicznego kapitału rzeczowego). Natomiast ich dochody z kapitału są bardzo niskie. W prawym końcu prostej H jest odwrotnie: niskie inwestycje w kapitał ludzki prowadzą do bardzo niskiego poziomu produkcji w kraju. Za to bardzo wysokie inwestycje w kapitał (lokowany głównie w aktywach zagranicznych) dają w SS bardzo wysokie dochody kapitałowe. Większość dochodu do dyspozycji stanowią dochody z kapitału (z aktywów zagranicznych), jedynie niewielką część stanowi produkcja. Niemniej tak osiągany dochód pozwala w SS na równie wysoką konsumpcję jak dochód uzyskiwany w lewym końcu prostej H.

Zastosowanie kryterium maksymalizacji strumienia konsumpcji w czasie nie spowodowałoby modyfikacji złotej reguły w przypadku (b). Natomiast w przypadku (a) kryterium to osłabiłoby otrzymany wniosek. Im wyższą wagę

konsumenci przywiązywaliby do bieżącej konsumpcji (a niższą do przyszłej), tym większa musiałaby być różnica między realną stopą procentową a naturalną stopą wzrostu, aby warto było oszczędzać dużo w kapitał rzeczowy. Innymi słowy, nie wystarczy, aby stopa r była nieznacznie wyższa od $n+\sigma$.

Podsumowując, bardziej realistyczne kryterium maksymalizacji strumienia konsumpcji w czasie prowadzi do bardzo podobnej złotej reguły: $\gamma_K^{opt}=0$, a $\gamma_H^{opt}=\beta/(1-\alpha)$; chyba że stopa procentowa r jest istotnie[17] wyższa od naturalnej stopy wzrostu – wówczas warto dużo inwestować w kapitał rzeczowy, przy czym w każdej sytuacji (czyli niezależnie od preferencji dotyczących bieżącej i przyszłej konsumpcji i od wartości wszelkich parametrów) stopy oszczędności powinny być związane zależnością (61).

2.9. Empiryczna analiza złotej reguły

W ramach numerycznej analizy wrażliwości SS zbadamy wpływ parametrów decyzyjnych γ_K i γ_H na stacjonarne wartości ważniejszych zmiennych modelu. Jako punkt odniesienia przyjmujemy następujący bazowy zestaw parametrów (BZP):

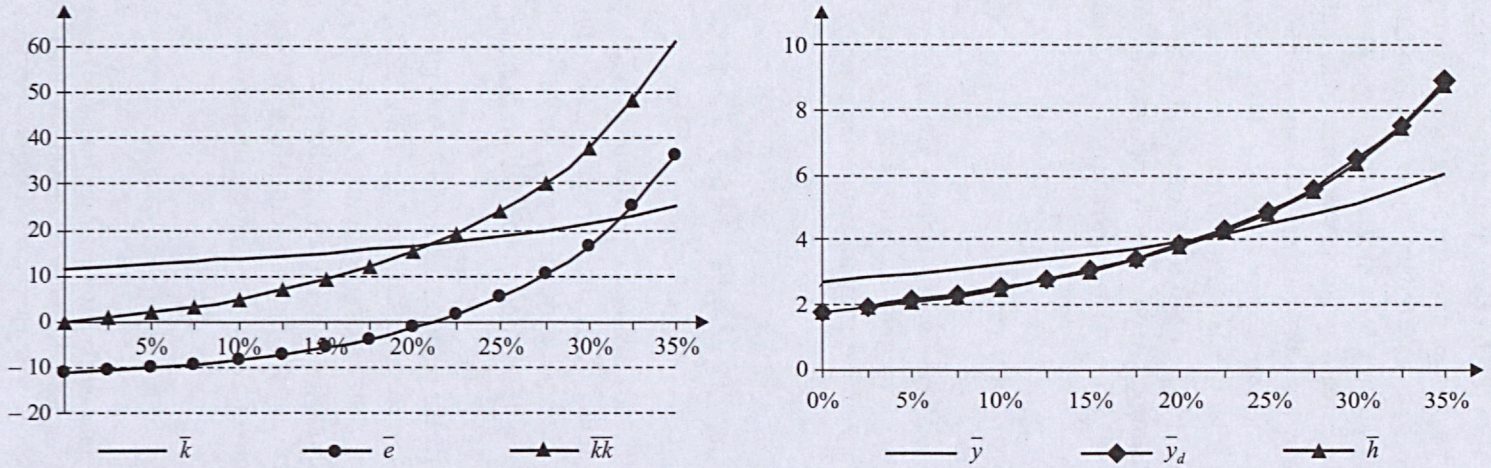
$$\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{1}{3},\ n=0{,}1\%,\ \sigma=2\%,\ \delta=3\%,\ r=5\%,\ \gamma_K=22\%,\ \gamma_H=5\%. \quad (62)$$

Jak widać, przyjęte zostały wartości względnie realistyczne – spotykane w wielu współczesnych krajach[18]. Analizę wrażliwości przeprowadzamy modyfikując tylko jeden (wybrany) parametr, przy czym wszystkie pozostałe parametry mają wartości z BZP. Zacznijmy od przeciętnej stopy inwestycji rzeczowych γ_K (rys. 8 i 9).

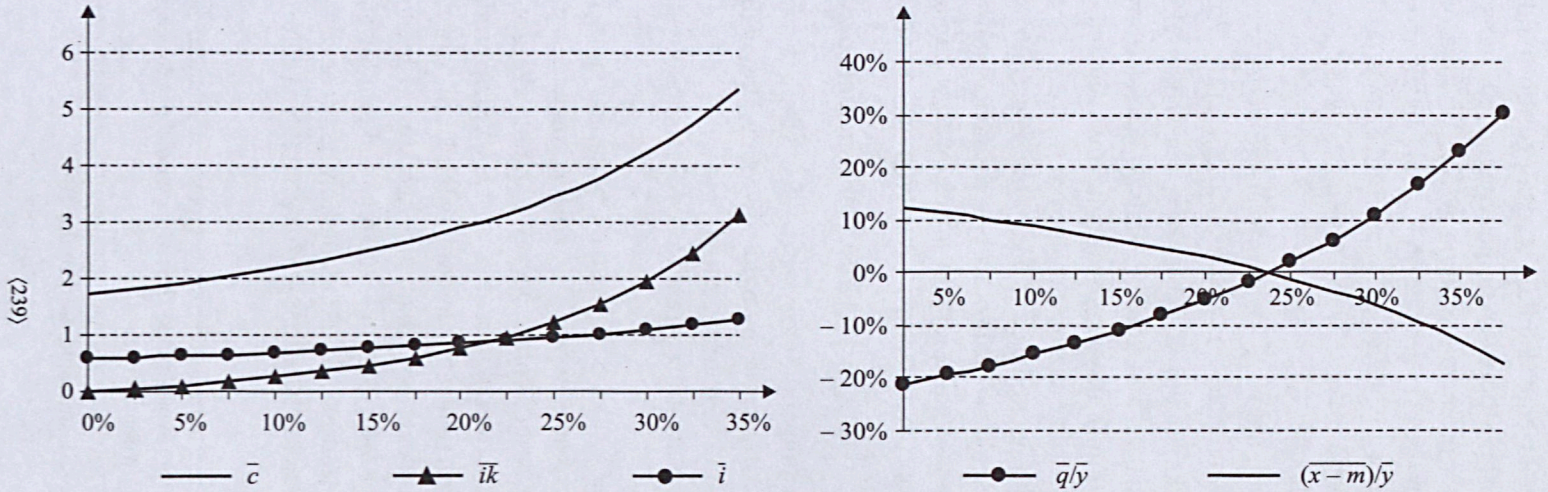
Granica stabilności przebiega na poziomie 63,75% – gdy stopa oszczędności γ_K przekracza 63,75% (przy pozostałych parametrach z BZP), wówczas SS staje się niestabilny. Gdy zaś γ_K zbliża się do tej granicy, niektóre zmienne dążą w SS do plus lub minus nieskończoności. Warto podkreślić, że w modelu małej gospodarki w UGW nieuwzględniającym kapitału ludzkiego stacjonarny poziom kapitału i produkcji nie zależy od stopy inwestycji w kapitał krajowy

[17] Jak bardzo – to zależy od tego, jaką wagę konsumenci przywiązują do konsumpcji bieżącej, a jaką do przyszłej.

[18] Stopa inwestycji w kapitał ludzki jest w praktyce trudna do oszacowania. Przyjęliśmy 5%, ponieważ w przybliżeniu na takim poziomie (w stosunku do PKB) kształtują się wydatki publiczne na edukację w krajach rozwiniętych; zob. Eurostat Yearbook 2004, s. 80.



Rys. 8. Kapitał $\bar{k}$, aktywa zagraniczne netto $\bar{e}$ i kapitał krajowy $\overline{kk}$ oraz produkcja w kraju $\bar{y}$, dochód do dyspozycji $\bar{y}_d$ i kapitał ludzki $\bar{h}$ (*njep*) w SS przy różnych poziomach stopy inwestycji rzeczowych γ_K



Rys. 9. Konsumpcja $\bar{c}$, inwestycje krajowe $\overline{ik}$ i inwestycje w kraju $\bar{i}$ (*njep*) oraz stosunek salda bilansu handlowego $\overline{x-m}$ i salda obrotów bieżących $\overline{q}$ do produkcji w SS przy różnych poziomach γ_K

(zob. [6], s. 23). Wprowadzenie kapitału ludzkiego do modelu powoduje unieważnienie tego wniosku – pojawia się pozytywna zależność między stopą γ_K a poziomem kapitału i produkcji w kraju w SS. Wynika ona stąd, że im wyższa jest stopa γ_K, tym większy jest zasób kapitału ludzkiego (!) *njep* w SS, co wynika z (42) i (44), a to przyciąga kapitał rzeczowy do kraju, zgodnie z równaniem [k]. W efekcie z coraz wyższą stopą γ_K wiąże się coraz wyższy stacjonarny poziom produkcji.

Naturalnie ze wzrostem stopy γ_K rosną inwestycje krajowe *njep* w SS ($\overline{ik}$), aż dla $\gamma_K \cong 21{,}25\%$ zrównują się z inwestycjami w kraju $\bar{i}$. Wówczas kapitał krajowy zrównuje się z kapitałem w kraju: $\overline{kk} = \bar{k}$, a w konsekwencji aktywa zagraniczne netto osiągają poziom zerowy. Dalszy wzrost stopy γ_K wiąże się z coraz wyższymi (dodatnimi) aktywami zagranicznymi netto.

Jak z tego wynika, wraz ze wzrostem stopy inwestycji γ_K rosną zarówno dochody obywateli kraju pochodzące z aktywów zagranicznych netto, jak i dochody z produkcji w kraju. W związku z tym rośnie też konsumpcja. Zatem w analizowanym przykładzie najlepiej jest inwestować w kapitał krajowy jak najwięcej[19]. Natomiast optymalna stopa inwestycji w kapitał ludzki wynosi w tym przykładzie $\frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{r-n-\sigma}{r+\delta} = 18{,}125\%$. Taka strategia przynosi najlepszy efekt (maksymalną konsumpcję). Oczywiście ten rezultat wynika stąd, że w naszym przykładzie $r > n+\sigma$. Gdyby było odwrotnie, optymalna byłaby inna strategia, co było omawiane w punkcie 2.8.

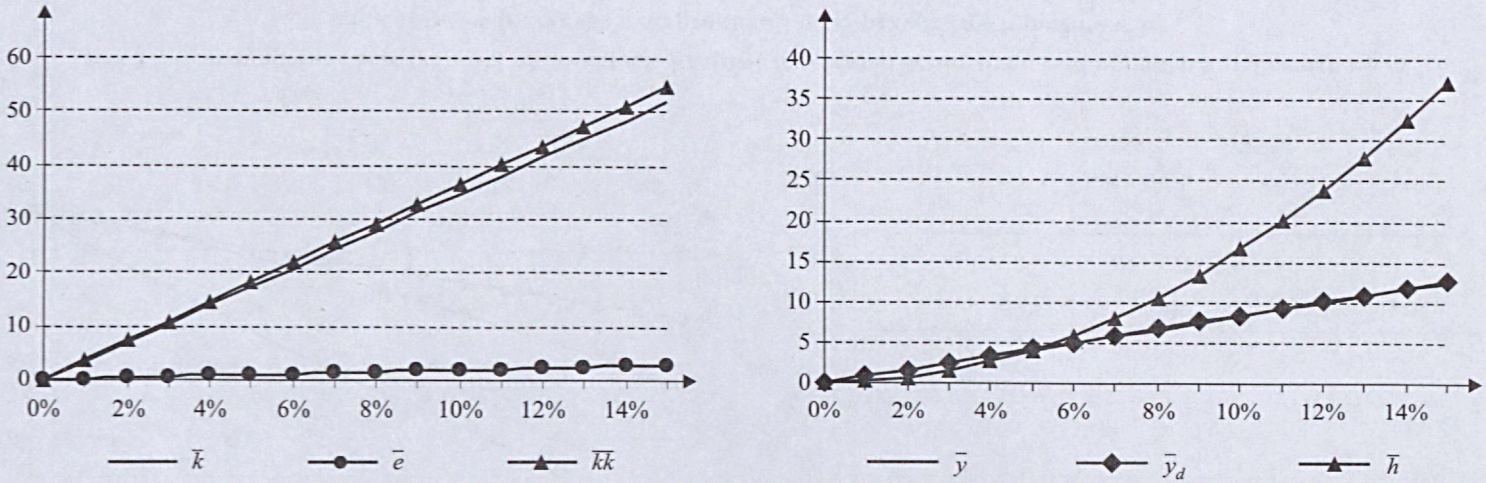
Kolejne cztery wykresy ilustrują wrażliwość SS na zmiany stopy inwestycji w kapitał ludzki γ_H (rys. 10 i 11).

Naturalnie im wyższa jest stopa inwestycji w kapitał ludzki, tym większy jego zasób zostaje w SS zakumulowany[20]. Z kolei coraz większy zasób kapitału ludzkiego przyciąga do kraju coraz więcej kapitału rzeczowego (zgodnie z równaniem [k]). Jest to równoznaczne z coraz wyższą produkcją w kraju i coraz wyższym dochodem do dyspozycji obywateli kraju, który wynika przede wszystkim z rosnących dochodów kapitału ludzkiego. Jednocześnie coraz wyższy dochód do dyspozycji pozwala również zakumulować coraz więcej kapitału krajowego, co stanowi źródło dodatkowego (coraz większego) dochodu. W efekcie obserwujemy bardzo wyraźną pozytywną zależność pomiędzy

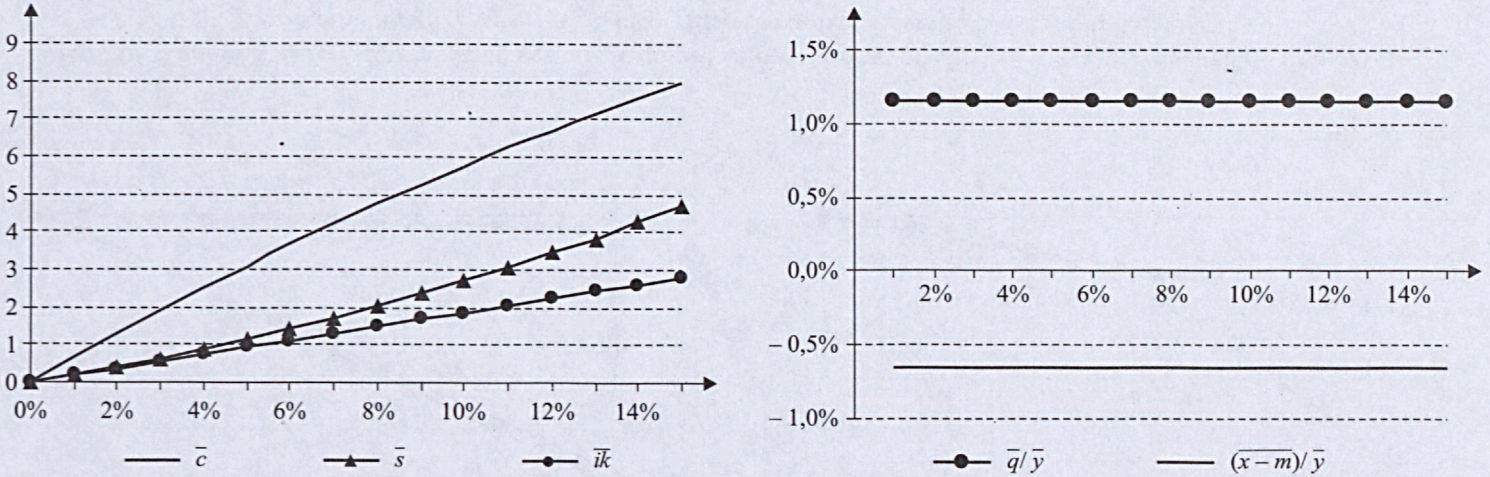
---

[19] Stopa inwestycji γ_K nie może przekroczyć granicy stabilności, jaką stanowi tutaj wartość $\varphi/(r+\delta) = 63{,}75\%$ (porównaj punkt 2.8) Oczywiście przekroczenie tak wysokiej granicy jest w praktyce nieprawdopodobne.

[20] Między stacjonarną wartością $\bar{h}$ a stopą γ_H istnieje zależność potęgowa, co wynika ze wzorów (44) i (46), a zostało zilustrowane na rysunku 10.



Rys. 10. Kapitał $\overline{k}$, aktywa zagraniczne netto $\overline{e}$ i kapitał krajowy $\overline{kk}$ oraz produkcja w kraju $\overline{y}$, dochód do dyspozycji $\overline{y}_d$ i kapitał ludzki $\overline{h}$ (*njep*) w SS przy różnych stopach inwestycji w kapitał ludzki γ_H



⟨242⟩

Rys.11. Konsumpcja $\bar{c}$, oszczędności $\bar{s}$ i inwestycje krajowe $\overline{ik}$ (*njep*) oraz stosunek salda bilansu handlowego $\overline{x-m}$ i salda obrotów bieżących $\bar{q}$ do produkcji w SS przy różnych poziomach γ_H

stopą inwestycji w kapitał ludzki a dochodem do dyspozycji oraz konsumpcją w SS. Na przykład inwestując w kapitał ludzki tylko 5% dochodu, osiągamy konsumpcję, która stanowi jedynie 53,7% tej, jaką osiągnęlibyśmy (w SS), inwestując w kapitał ludzki 10% dochodu. Warto zaznaczyć, że zerowa stopa inwestycji w kapitał ludzki oznacza (w SS) zerowe dochody i brak konsumpcji (następuje całkowita destrukcja gospodarki), czego nie można powiedzieć o zerowej stopie inwestycji w kapitał rzeczowy.

Jako swego rodzaju ciekawostkę odnotujmy, że ani saldo rachunku obrotów bieżących, ani saldo bilansu handlowego (w stosunku do produktu krajowego) nie zależą od stopy inwestycji w kapitał ludzki.

2.10. Znaczenie inwestycji w kapitał ludzki – ujęcie dynamiczne

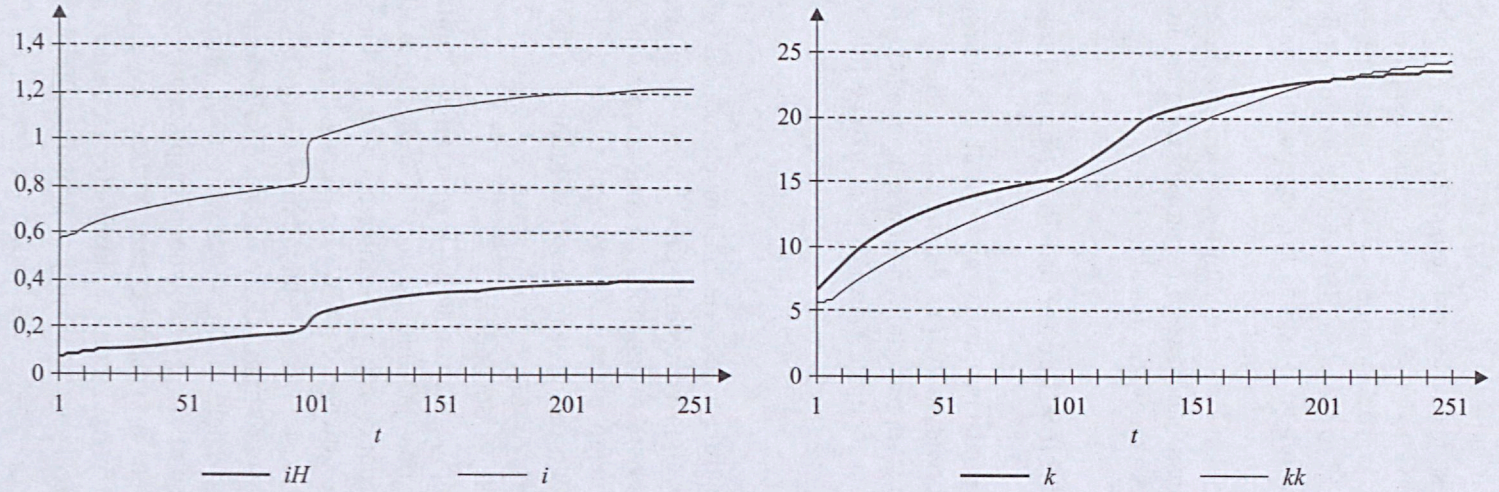
Dla dopełnienia obrazu przedstawiamy wyniki symulacji ilustrujących dynamiczne procesy wywołane trwałym zwiększeniem parametru γ_H. W obliczeniach wykorzystujemy dyskretny odpowiednik modelu ciągłego [k] – [e]. Na potrzeby symulacji przyjmujemy następujące wartości początkowe (dla $t=1$):

$$e(1)=-1, \quad h(1)=0{,}6 \qquad A(1)=1.$$

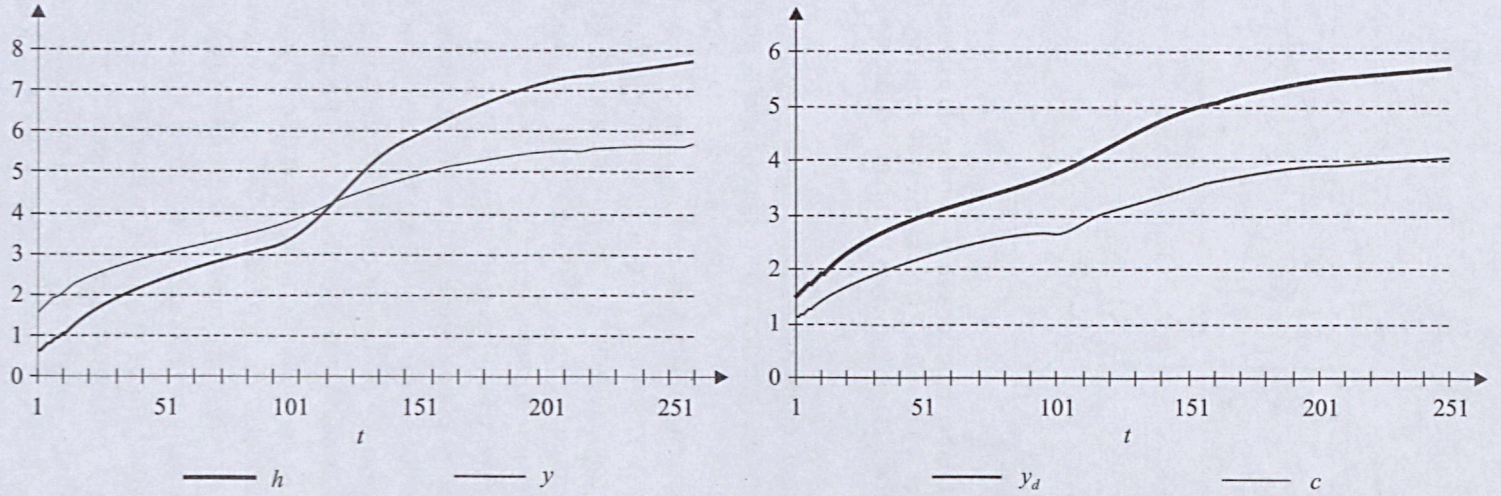
Poniższe wykresy ilustrują trajektorie zmiennych modelu (*njep*) w procesie przejścia wywołanym trwałym wzrostem stopy inwestycji γ_H z 5 do 7%.

Przez pierwszych 100 okresów gospodarka zmierza (asymptotycznie) w kierunku SS, zdeterminowanego przez BZP. W tym czasie dzięki inwestycjom w kapitał ludzki stopniowo rośnie jego zasób w kraju. Dzięki temu do kraju przyciągany jest kapitał rzeczowy (co wynika ze wzoru [k]) i następuje stopniowy wzrost produkcji i dochodów.

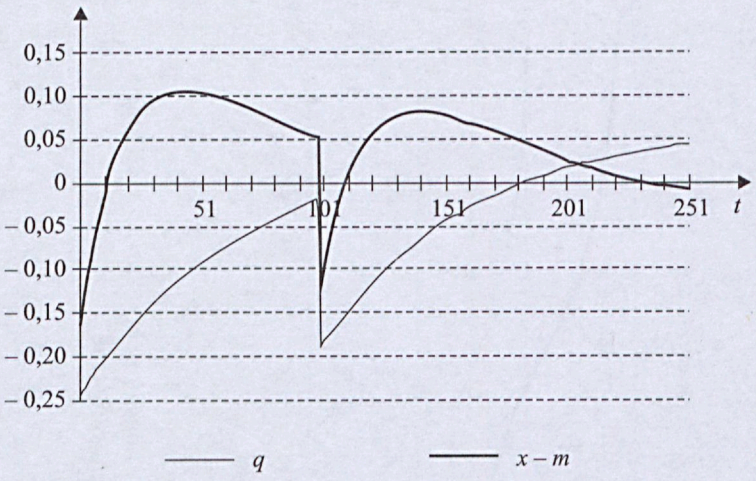
W okresie 101 następuje wzrost stopy inwestycji w kapitał ludzki – od tego momentu wynosi ona już nie 5, lecz 7% dochodu do dyspozycji. Zmienia się SS i gospodarka zaczyna zmierzać w jego kierunku. Jakie są cechy charakterystyczne nowego SS? Wyższe inwestycje w kapitał ludzki owocują radykalnym wzrostem jego stacjonarnej wartości z 4,15 do 8,13 (*njep*), a więc prawie dwukrotnym! Oczywiście dojście do tego nowego SS wymaga czasu, niemniej dzięki skokowemu wzrostowi inwestycji w kapitał ludzki, następuje w gospodarce gwałtowne przyspieszenie. Szybko rosnący zasób kapitału ludzkiego przyciąga coraz wyższe inwestycje w kapitał rzeczowy i w efekcie jego zasób w kraju (k) również szybko rośnie. W nowym SS kapitał rzeczowy w kraju jest o około 40% wyższy niż w SS odpowiadającym stopie $\gamma_H=5\%$.



Rys. 12. Inwestycje w kapitał ludzki (*iH*), inwestycje w kapitał rzeczowy w kraju (*i*), kapitał rzeczowy w kraju (*k*) i kapitał krajowy (*kk*) *njep* – trajektorie tych zmiennych w procesie przejścia wywołanym trwałym wzrostem stopy inwestycji w kapitał ludzki γ_H



Rys. 13. Kapitał ludzki (h), produkcja w kraju (y), dochód do dyspozycji (y_d) i konsumpcja (c) *njep* – trajektorie tych zmiennych w procesie przejścia wywołanym trwałym wzrostem γ_H



Rys. 14. Saldo bilansu handlowego ($x - m$) i saldo rachunku obrotów bieżących (q) *njep* – trajektorie tych zmiennych w procesie przejścia wywołanym trwałym wzrostem γ_H

Dzięki podwyższonemu tempu akumulacji kapitału rzeczowego i ludzkiego następuje gwałtowne przyspieszenie wzrostu gospodarki – produkcja dąży do nowego SS, który jest również o 40% wyższy od poprzedniego. W ślad za tym rosną dochody do dyspozycji (o 40%), konsumpcja (o 36,2%) i oszczędności (o 50,4%). Dzięki coraz wyższym oszczędnościom następuje bardzo szybki wzrost kapitału ludzkiego i rzeczowego (*kk*). Dodajmy, że skokowe zmiany inwestycji w kraju znajdują odbicie w skokowych zmianach sald bilansu handlowego i rachunku obrotów bieżących.

Reasumując, mały (choć trwały) wzrost stopy inwestycji w kapitał ludzki przynosi bardzo pozytywne efekty. Jeśli zmierzyć, je porównując nowy SS z pierwotnym, to okazuje się, że efekty te są nadspodziewanie wysokie – podniesienie stopy inwestycji w kapitał ludzki o zaledwie 2 punkty procentowe skutkuje wzrostem stacjonarnej wartości konsumpcji aż o 36,2%! Dla porównania, gdyby te same fundusze skierować na inwestycje w kapitał rzeczowy (czyli gdyby zwiększyć γ_K z 22 do 24%, pozostawiając $\gamma_H = 5\%$), wówczas przyniosłoby to wzrost stacjonarnej wartości konsumpcji o zaledwie 7,3% (produkcja w SS byłaby wyższa o 5%, a kapitał ludzki o 10,3%).

Interesujące jest również to, że uzyskane wnioski są całkowicie odporne na zmiany realnej stopy procentowej r, która przecież w rzeczywistości podlega znacznym wahaniom. Gdyby w powyższej symulacji stopa r wynosiła (w całym horyzoncie) nie 5% – jak to jest w BZP – lecz na przykład

1 lub 2%, wtedy uzyskalibyśmy dokładnie te same procentowe wskaźniki wzrostu! Zwiększając γ_H z 5 do 7% otrzymamy (niezależnie od wartości r) wzrost konsumpcji o 36,2%[21].

*

Warto zaznaczyć, że równie ciekawe wnioski można otrzymać, zakładając, że ogólna stopa oszczędności $\gamma = \gamma_K + \gamma_H$ nie ulega zmianie, a jedynie część oszczędności przeznaczonych na inwestycje w kapitał rzeczowy zostaje skierowana na inwestycje w kapitał ludzki. Załóżmy na przykład, że stopa inwestycji w kapitał ludzki zostaje zwiększona (tak jak w powyższym przykładzie) z 5 do 7%, ale za to stopa inwestycji w kapitał rzeczowy γ_K zostaje (trwale) zredukowana z 22 do 20%. (Zatem całkowita stopa oszczędności ? nie ulega zmianie i wynosi 27%.) Pozytywne efekty takiej zmiany są niewiele gorsze niż powyżej. Stacjonarna wartość kapitału ludzkiego rośnie o 78,5%, kapitał rzeczowy w kraju (k) i produkcja rosną o 33,6%, dochód do dyspozycji i konsumpcja rosną o 27,5%.

Dodajmy, że przedstawione tu wnioski są spójne z otrzymaną w punkcie 2.7 złotą regułą inwestowania. Zgodnie z nią, przy przyjętych parametrach optymalna stopa inwestycji w kapitał ludzki wynosi 18,125%, a w kapitał rzeczowy około 63,7%.

Reasumując, dla małej gospodarki należącej do UGW (o parametrach zbliżonych do przyjętych w obliczeniach) nie ma lepszej strategii rozwoju niż inwestowanie w kapitał ludzki. Opłaca się ono o wiele bardziej niż inwestowanie w kapitał rzeczowy. Mały kraj w UGW, mając do wyboru, czy inwestować ograniczone środki w kapitał rzeczowy czy w kapitał ludzki, powinien zdecydowanie wybrać kapitał ludzki.

Literatura

[1] Angeloni, I., Ehrmann, M., *Euro Area Inflation Differentials*, ECB Working Paper no. 388, 2004.

[2] Barro, R.J., Mankiw, G., Sala-i-Martin X., *Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth*, American Economic Review vol. 85, 1995, no. 1, s. 103-115.

[3] Barro, R.J., Sala-i-Martin X., *Economic Growth*, MIT Press 2004.

[21] Ponadto przy niższej stopie r konsumpcja w całym horyzoncie jest wyższa niż przy niższej stopie r.

[4] Bertola, G., *Labor Markets in the European Union*, Background paper for a Lecture at EALE, 1999.
[5] Cecchetti, S., Mark, N., Sonora, R., *Price Level Convergence Among United States Cities: Lessons for the European Central Bank*, NBER Working Paper no. 7681, 2000.
[6] Konopczyński, M., *Model wzrostu małej gospodarki w unii monetarnej. Ujęcie neoklasyczne*, w: E. Panek (red.), *Matematyka w ekonomii*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2004.
[7] Krueger, A., *From Bismarck to Maastricht: The March to European Union and The Labor Compact*, NBER Working Paper no. 7456, 2000.
[8] Lutz, M., *Price Convergence under EMU? First Estimates*, w: A. Deardorff (ed.), *Past, Present, and Future of the European Union*, Proceedings of the 13th World Congress of the International Economic Association, Macmillan Press, 2004.
[9] Mankiw, G.N., Romer, D., Weil, D., *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics vol. 107, 1992, no. 2, s. 407-437.
[10] Mushkin, S., *Health as an Investment, Journal of Political Economy* vol. 70, 1962, no. 5, s. 129-157.
[11] Sab R., Smith, S.C., *Human Capital Convergence: International Evidence*, IMF Working Paper, 2001.
[12] Shone, R., *Economic Dynamics*, Cambridge University Press, 1997.

THE ROLE OF HUMAN CAPITAL IN A MONETARY UNION IN THE LIGHT OF THE NEOCLASSICAL GROWTH MODEL

Summary

We analyze the role of human capital in an abstract small open economy which becomes a member of an economic and monetary union. The workhorse of the analysis is the well-known neoclassical model of economic growth developed by Mankiw, Romer and Weil. We prove the uniqueness of the stationary state and its asymptotic stability. We generalize the so-called golden rule of investing into physical and human capital. The main conclusion, supported by numerical simulations, is that there is no better way of improving the economy than investing into human capital, since it attracts physical capital.